Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

A Equação Logística Aplicada à População Brasileira

Joyce K. Figueiredo joycekellyfigueiredo@hotmail.com
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Eder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Wenderson Marques Ferreira wmf@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar, através das equações diferenciais ordinárias, o crescimento da população brasileira, aplicando a equação logística de Verhulst nos dados obtidos pelo IBGE entre os anos de 1872 e 2010. Para tal, realizamos ajustes dos dados via regressão linear da taxa de variação da população P dividida pela própria população. Ao observar a aproximação obtida por esse método, percebe-se um erro grande entre o modelo e os dados reais, o que nos levou a buscar outro modo de modelar o comportamento da população. Encontramos, então, uma solução através do estudo do ponto de inflexão da função solução da Equação Logística. Realizamos comparações entre os valores teóricos e reais. Além disso, obtivemos, via modelo teórico, uma estimativa para a capacidade de saturação da população brasileira. Feito isso, aplicamos a mesma teoria com os dados da população do estado de Minas Gerais, também obtidos pelo IBGE entre os anos de 1872 e 2010.

Palavras-chave

Equação diferencial ordinária, Modelagem matemática, Ajuste linear, População, Brasil.

1 Introdução

Como é de conhecimento comum, a matemática é amplamente utilizada em outras ciências. Uma dessas aplicações é através da Modelagem, que consiste em uma poderosa ferramenta para descrever matematicamente fenômenos de várias áreas do conhecimento. Segundo Bassanezi (veja [1]), a modelagem "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Em especial, na modelagem populacional, podemos estudar a velocidade do crescimento ou declínio de uma população, o que nos leva ao principal objetivo deste trabalho: estudar e modelar o comportamento da população brasileira, utilizando os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE entre os anos de 1872 e 2010 (veja [4]).

Para a realização deste, foi necessário o estudo das equações diferenciais ordinárias (EDOs), realizado em [2], que nos oferecem alguns modelos populacionais. Entre os modelos estudados, o mais conhecido talvez seja o de Malthus [1]. O modelo malthusiano, ou modelo exponencial, supõe que a taxa de crescimento é proporcional à própria população, isto é, a população cresce ilimitadamente. Há também o Modelo Logístico, proposto pelo matemático belga Pierre Verhulst, que propõe uma taxa de crescimento com limiar. Os dois modelos serão discutidos na primeira seção deste artigo.

Durante nosso trabalho de pesquisa teórico precisamos estudar o

Teorema 1. (*Teorema de Existência e Unicidade de EDOs*) *Sejam as funções f e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas num certo retângulo $R = \{\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta\}$, que contém o ponto (t_0, y_0). Então, em um certo intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, contido em $\alpha < t < \beta$, há uma única solução $y = \Phi(t)$ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Através deste teorema somos capazes de concluir que duas soluções de uma EDO nas condições apresentadas pelo Teorema nunca se interceptam. É importante observar que existe na literatura uma versão mais forte do

[1]Economista inglês que viveu no século XVIII

teorema enunciado em que não se exige que f possua derivada parcial contínua (Veja [3]). O teorema na versão apresentada pode ser visto em [2].

Na segunda seção, tem-se os ajustes dos dados da população brasileira e da população do estado de Minas Gerais utilizando o modelo Logístico. Para encerrar, são feitas algumas observações e explicita-se a conclusão.

2 Modelos Populacionais

2.1 Malthus ou Exponencial

A hipótese de crescimento conhecida como exponencial foi observada primeiramente pelo economista Thomas Malthus, e é, também, conhecida como modelo de Malthus. Essa hipótese considera que a taxa de variação (crescimento ou declínio) da população é proporcional ao número de indivíduos. Isto é, se y representa a população em um dado instante, y' depende diretamente de y. Matematicamente, escreve-se:

$$\frac{dy}{dt} = ry, \tag{1}$$

em que r é uma constante de proporcionalidade, conhecida como taxa de crescimento. Observe que, se $r > 0$, há um aumento da população, ocorrendo diminuição da população caso $r < 0$. Se supusermos que a população esteja crescendo e que no instante de tempo $t = 0$, a população seja y_0, isto é, $y(0) = y_0$, podemos escrever o Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' &= ry \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

A Equação Diferencial Ordinária acima é facilmente resolvida utilizando o fato de ser separável (veja [2]). A solução do PVI anterior é

$$y = y_0 e^{rt}. \tag{2}$$

O Modelo de Malthus prevê que a população crescerá exponencialmente, como mostra a figura abaixo, na qual consideram-se vários valores para y_0 e $r > 0$.

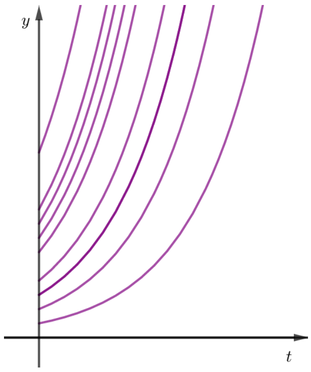

Figura 1: Função $y = y_0 e^{rt}$ com $r > 0$ e diferentes valores para y_0.

A figura 2.1 ilustra o ajuste dos dados da população brasileira com o modelo de Malthus, feito pelo software matemático *Geogebra* utilizando dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Note que a curva solução obtida via modelo exponencial se adequa relativamente bem aos dados da população brasileira (pelo menos até o ano 2000). Observe, porém, que em 2010 existe um erro considerável entre o real valor da população e o valor obtido pela curva de Malthus.

Como visto, num intervalo de tempo pequeno o modelo de Malthus apresenta uma aproximação razoável para os dados. Todavia ele apresenta um problema: a taxa de crescimento, r, é constante, ou seja, a taxa de variação da população continua crescendo ao longo do tempo, o que em termos práticos não se mostra correto. Em algum momento faltará alimento, espaço ou algum outro recurso e é de se esperar que a taxa de crescimento de uma população sofra ajustes ao longo do tempo. Um modelo que tenta contornar este inconveniente é o de Verhulst.

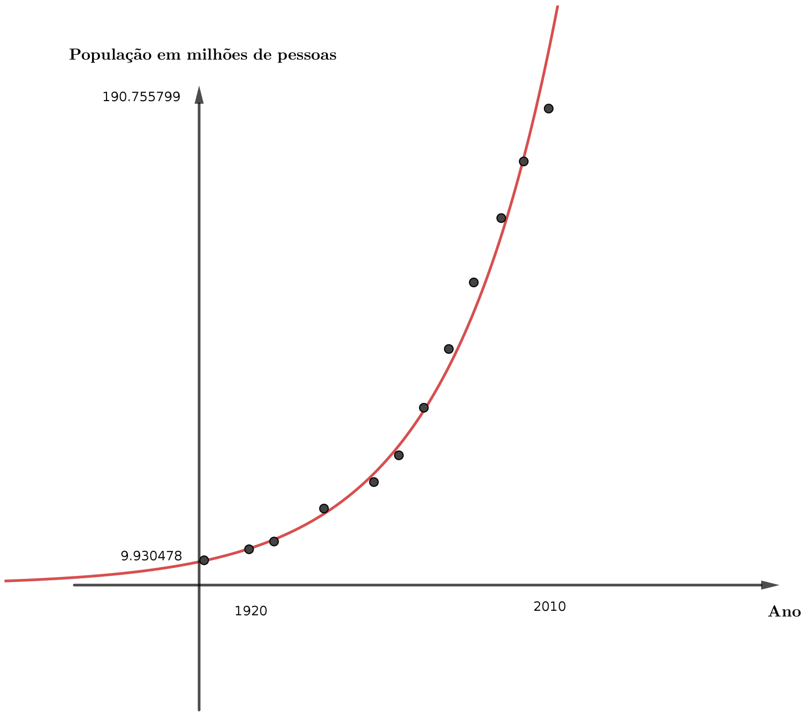

Figura 2: Ajuste exponencial da população brasileira.

2.2 Verhulst ou Logístico

No modelo de Malthus, quanto maior a população, maior a taxa de crescimento. O modelo logístico, no entanto, pensando na impossibilidade do crescimento infinito, considera que a velocidade depende da população, isto é,

$$\frac{dy}{dt} = g(y)y, \tag{3}$$

em que $g(y)$ é a função que representa a velocidade de crescimento. Deste modo, o crescimento populacional é pensado de forma a diminuir com o tempo, estabilizando o número de indivíduos. Deseja-se, então, exibir uma função $g(y)$ de forma que:

- Quando y for pequeno, $g(y)$ se assemelhe a r, ou seja, o crescimento se assemelhe ao exponencial;

- $g(y)$ diminua à medida que y cresce;
- $g(y)$ seja negativa a partir de um certo y.

Uma função que nos fornece esse comportamento é (veja [2])

$$g(y) = r - ay,$$

em que a é uma constante positiva. Deste modo, a Equação 3 pode ser reescrita:

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y,$$

ou

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y, \tag{4}$$

em que $k = \dfrac{r}{a}$.

A equação anterior é conhecida como equação logística ou de Verhulst, em referência ao matemático Pierre Verhulst, que a introduziu como modelo de crescimento da populacional. A constante r é chamada taxa intrínseca de crescimento, isto é, a taxa quando não há outros fatores limitantes. Observe que as soluções de equilíbrio de (4), isto é as soluções y da equação que são tais que $g(y) = 0$, são $y = 0$ e $y = k$.

Vale observar que num plano cartesiano $t \times y$, o gráfico das soluções de equilíbrio são retas paralelas ao eixo t. Além disso, pelo Teorema de Existência e Unicidade 1, duas soluções nunca passam pelo mesmo ponto. Logo, outras soluções ou se aproximam ou se afastam das soluções de equilíbrio, sem nunca tocá-las. É comum na literatura encontrarmos a (veja [2])

Definição 1. (*Soluções de Equilíbrio assintoticamente estáveis*) *Uma solução de equilíbrio $y = z$ de uma Equação Diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = g(y)y, \tag{5}$$

é assintoticamente estável se qualquer solução $y(t)$, com $y(0) = y_0$ tal que y_0 está *próximo de z é tal que $y(t) \to z$ quando $t \to \infty$. Caso $y(t)$ se afaste de z diz-se que a solução de equilíbrio é instável.*

No caso da Equação Logística, a solução de equilíbrio $y = k$ é assintoticamente estável, pois qualquer solução $y(t)$ tal que $y(t)$ não é identicamente nula tende a k quando $t \to \infty$. Tais observações são claras a partir da análise da equação (4). Podemos ainda concluir que $y = 0$ é uma solução de equilíbrio instável.

A solução $y = k$ não só é uma solução de equilíbrio, mas também representa a quantidade máxima que a população consegue atingir, e por isso é chamada de **Nível de Saturação**, ou capacidade ambiental de sustentação da espécie. Representa o limite de crescimento buscado pelo modelo logístico.

Análise Qualitativa

Podemos obter informações a respeito das soluções de uma Equação Diferencial mesmo sem resolvê-la. Esse tipo de análise é chamada de qualitativa. Façamos uma análise da Equação Logística sem resolvê-la. A Figura 3 ilustra o gráfico de y por y' no plano cartesiano $y \times y'$.

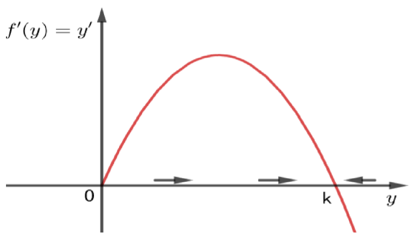

Figura 3: Exemplo de gráfico de equação diferencial $y' = (r - ay)y$, com $r = 2,78$ e $a = 0,66$.

Note que as raízes de $r\left(1 - \dfrac{y}{k}\right)y$ são as soluções de equilíbrio 0 e k, e que $y' > 0$ se $y \in (0, k)$ e $y' < 0$ se $y > k$.

Deste modo, podemos concluir que $y(t)$ é crescente quando $y \in (0, k)$ e decrescente se $y > k$. As setas no gráfico indicam o comportamento de crescimento e decrescimento de y, quando t tende para infinito e $y(0)$ — a condição inicial — pertence a $(0, k)$ ou (k, ∞).

Com as informações dadas já temos uma leve noção do comportamento gráfico de uma solução da Equação Logística: sabemos seu comportamento quando t tende para infinito e se há crescimento ou decrescimento. Para um estudo mais completo do gráfico fazemos a análise da derivada de segunda ordem. Como $\frac{dy}{dt} = f(y) = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y$, temos, pela regra da cadeia,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y) \cdot f(y).$$

Uma vez que

$$f'(y) = \left[r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y\right]' = r\left(1 - \frac{2y}{k}\right),$$

temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} = r\left(1 - \frac{2y}{k}\right) \cdot r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y = r^2y\left(1 - \frac{2y}{k}\right)\left(1 - \frac{y}{k}\right).$$

Assim, podemos concluir que $\frac{d^2y}{dt^2}$ é positivo se $y < \frac{k}{2}$ ou $y > k$ e negativo se $\frac{k}{2} < y < k$. Com as informações obtidas somos capazes de intuir o comportamento do gráfico das soluções, y, da Equação Logística sem precisar de fato encontrá-la, ou seja, exibi-la algebricamente. A Figura 2.2 ilustra o gráfico de várias soluções possíveis. Note que, quando a condição inicial y_0 pertence ao intervalo $(0, k)$, existe um ponto de inflexão quando $y = \frac{k}{2}$, pois há mudança de sinal de $\frac{d^2y}{dt^2}$.

Solução da Equação Logística

Quando desejarmos conhecer apenas o comportamento das soluções, a análise qualitativa é suficiente. No entanto, se desejarmos mais informações tais como uma análise quantitativa, precisamos resolver a equação analiticamente ou numericamente. A Equação Logística é facilmente

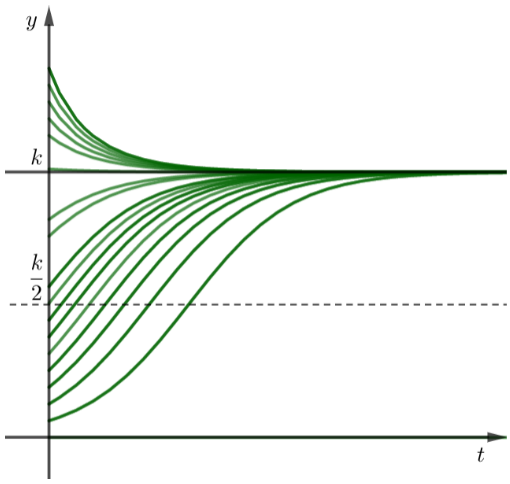

Figura 7: Esboço do gráfico de soluções da equação logística.

resolvida utilizando o método de separação de variáveis. Note que

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y,$$

pode ser reescrita, para $y \neq k$ e $y \neq 0$, como

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)y} = r.dt, \tag{6}$$

Uma vez que, utilizando frações parciais podemos escrever

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)y} = \frac{1}{y} + \frac{1/k}{1 - y/k}.$$

Integrando, obtemos

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1/k}{1 - y/k}\right) dy = \ln|y| - \ln|1 - y/k| = \ln\left|\frac{y}{1 - \frac{y}{k}}\right|.$$

Voltando em (6), temos

$$\ln\left|\frac{y}{1-\frac{y}{k}}\right| = r + C, \text{ em que } C \text{ é uma constante.}$$

Aplicando a função exponencial a ambos os lados da igualdade:

$$\left|\frac{y}{1-\frac{y}{k}}\right| = e^C e^{rt},$$

ou seja

$$\frac{y}{1-\frac{y}{k}} = \pm e^C e^{rt}.$$

Uma vez que $\pm e^C$ é uma constante, iremos denotá-la simplesmente por C, o que nos permite escrever

$$\frac{y}{1-\frac{y}{k}} = Ce^{rt}. \tag{7}$$

Se a condição inicial for $y(0) = y_0$, obtemos

$$C = \frac{y_0}{1-\frac{y_0}{k}} \tag{8}$$

e (7) pode ser reescrita como

$$\frac{y}{1-\frac{y}{k}} = \frac{y_0}{1-\frac{y_0}{k}} \cdot e^{rt}. \tag{9}$$

Isolando-se y na expressão anterior, obtemos

$$y = \frac{y_0 k}{(k-y_0)e^{-rt} + y_0} \tag{10}$$

como sendo a solução procurada.

Na próxima seção iremos combinar o modelo logístico com dados reais.

3 Dados da População Brasileira e Mineira

Na presente seção iremos apresentar dados obtidos no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para as populações de Minas Gerais e Brasil, e ajustá-los ao modelo Logístico. Nossa intenção é fazer com que o modelo aproxime, através da solução da Equação Logística, os dados obtidos. A Tabela 1 apresenta os dados da população brasileira entre os anos de 1872 e 2010.

Ano	População Brasileira
1872	9930478
1890	14333915
1900	17438434
1920	30635605
1940	41236315
1950	51944397
1960	70992343
1970	94508583
1980	121150573
1991	146917459
2000	169590693
2010	190755799

Tabela 1: Dados da População Brasileira

Parametrizou-se 1870 como 0, isto é, 1872 foi representado por $t = 2$, 1890 por $t = 20$, e assim por diante.

O objetivo inicial era utilizar regressão linear, através do método dos mínimos quadrados, para encontrar uma equação que modelasse, com razoável precisão, esses dados e nos desse uma previsão da capacidade de saturação da população brasileira. Logo, vários cálculos foram necessários, para os quais usou-se o software livre *Geogebra*.

Utilizamos o modelo logístico no formato

$$\frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P} = r\left(1 - \frac{P}{k}\right), \tag{11}$$

em que P é a população. Note que a expressão do lado direito é um polinômio de grau um na variável P, ou seja, é da forma $y = ax + b$, em que $a = -\frac{r}{k}$, $b = r$, $x = P$ e $y = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{1}{P}$.

A principal dificuldade aqui é que a Equação diferencial trabalha com variáveis contínuas, enquanto que no mundo real nossos dados (variáveis) são discretos. Na prática, com os dados da Tabela 1 não somos capazes de calcular com exatidão os valores de $\frac{dP}{dt}$. Neste caso, fazemos a aproximação de $\frac{dP}{dt}$ por $\frac{P(t+h) - P(t)}{h}$[2], em que $P(t)$ e $P(t+h)$ são calculados através dos valores conhecidos via tabela. Por exemplo, iremos aproximar $\frac{dP}{dt}(2)$ por

$$\begin{aligned} \frac{P(20) - P(2)}{20 - 2} &= \frac{14333915 - 9930478}{18} \\ &= 244635,39. \end{aligned}$$

Observe que temos dados referentes a doze anos, e apenas onze taxas de variação, pois cada uma é calculada usando o próximo dado, não sendo possível então calcular a décima segunda taxa (a menos que optássemos por calcular a derivada em 2010 por outro método, o que não foi nossa premissa). Assim sendo, obtemos a tabela

Utilizando-se o método de regressão linear (veja [1]), sabe-se que para aproximar dados de uma tabela com n dados por uma reta da forma $y = ax + b$, os valores de a e b devem ser dados por

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2}$$

[2]Esse tipo de aproximação é conhecida como diferenças avançadas.

Tempo (t)	Indivíduos - P (X)	Taxa de Variação - dP/dt
2	9930478	244635,39
20	14333915	310451,90
30	17438434	659858,55
50	30635605	530035,50
70	41236315	1070808,20
80	51944397	1904794,60
90	70992343	2351624,00
100	94508583	2664199,00
110	121150573	2342444,18
121	146917459	2519248,22
130	169590693	2116510,60
140	190755799	

Tabela 2: Valores aproximados de $\dfrac{dP}{dt}$ — população brasileira.

e

$$b \quad = \quad \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - < X, Y > \sum_{i=1}^{n} X_i}{\displaystyle n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2},$$

em que $X = \{X_1, \cdots, X_n\}$ e $Y = \{Y_1, \cdots, Y_n\}$ são os dados relativos as variáveis x e y. O termo $< X, Y >$ significa o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$ entre os vetores $X = (X_1, \cdots, X_n)$ e $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$. No caso dos dados obtidos para $\dfrac{dP}{dt}$, temos $n = 11$ e para termos uma reta, precisamos que Y represente os dados de $\dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt}$ e X represente os dados de P.

Naturalmente os cálculos acima podem ser enfadonhos. Neste caso, utilizamos novamente o software livre *Geogebra*, através da opção planilhas, para calcular os somatórios que aparecem nas expressões para a e b:

Daí,

O que nos fornece:

$$a = -0,000000000078682 \text{ e } b = 0,030439122420052$$

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$	Quadrados de P	X_iY_i
0,0246348049800714	98614393308484	244635,388888889
0,0216585559492993	205461119227225	310451,9
0,037839323760379	304098980372356	659858,55
0,017301290442934	938540293716025	530035,5
0,0259676016152268	1700433674779230	1070808,2
0,0366698760599724	2698220379693610	1904794,6
0,0331250371606978	5039912764629650	2351624
0,02819002164068	8931872260667890	2664199
0,0193349822771221	14677461338228300	2342444,18181818
0,0171473713156326	21584739759016700	2519248,22222222
0,0124801105683317	28761003152220200	2116510,6

n	11
$\sum X$	768678795
$(\sum X)^2$	590867089882652000
$\sum X^2$	84940358115859700
$\sum Y$	0,274348975770347
$\sum(X_iY_i)$	16714610,1429293
$\sum X \cdot \sum Y$	210886240,104634

Comparando com (11), vemos que $r = b = 0,030439122420052$ e $-\frac{r}{k} = a = -0,000000000078682$, isto é $k = -\frac{r}{a} = 386861402,342304$.

Como a solução da Equação Logística é dada por

$$P(t) \;=\; \frac{P_0 k}{(k - P_0)e^{-rt} + P_0},$$

e temos os valores de todas as constantes envolvidas (note que $P_0 = 9930478$), podemos escrever a solução para o caso da população brasileira. Uma vez que o valor da expressão P_0k é muito alto, optamos por fazer um reescalamento dos valores envolvidos dividindo ambos os lados por 1.000.000. Assim sendo, $y = \frac{1}{1.000.000}\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ e k é reescrito como $K = \frac{k}{1.000.000}$.

Agora, pode-se substituir os valores de r, K e y_0 na solução da equação logística e obter então a função desejada:

$$P(t) \quad = \quad \frac{3841718645,0094}{376930924,342304 \cdot e^{-0.0304391224200052t} + 9930478}.$$

A Figura 4 ilustra num plano cartesiano os dados da Tabela 1 e a curva dada pela gráfico da função acima.

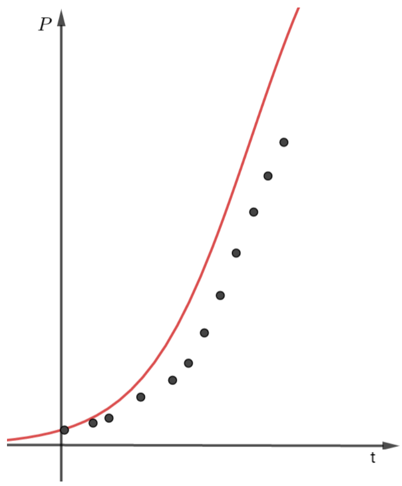

Figura 4: Aproximação obtida através da regressão linear.

Podemos observar que a aproximação feita não é boa. Podemos, inclusive, calcular o erro obtido em relação aos valores conhecidos. O erro é calculado fazendo a diferença entre os valores aproximado e real, dividido pelo valor real, isto é

$$\frac{|y_i - Pi|}{P_i}.$$

A Tabela abaixo apresenta os erros obtidos.

De acordo com a modelagem feita, a previsão para a população brasileira em 2020 seria de 277,363 milhões de pessoas e a capacidade de saturação, k de aproximadamente $386,86$ milhões. No entanto, observando os dados da tabela e o gráfico anteriores, pode-se perceber que a aproximação obtida não é muito condizente com a realidade, os erros obtidos foram muito grandes. Portanto, optamos por buscar uma alternativa ao problema apresentado.

Valor real	Valor aproximado	Erro
9930478	10536831,73	0,0610598737
14333915	17869644,30	0,2466687781
17438434	23835912,95	0,3668608632
30635605	41663322,50	0,3599640844
41236315	70244256,06	0,7034561906
51944397	89457772,66	0,7221832926
70992343	112066519,92	0,5785719302
94508583	137742784,87	0,4574632324
121150573	165753425,84	0,3681604778
146917459	197944600,57	0,3473184325
169590693	224177830,16	0,3218757833
190755799	251986147,84	0,3209881385

Seguindo as ideias de [1], encontrou-se uma alternativa na análise do ponto de inflexão da solução da equação logística. conforme já apontamos na seção anterior, o ponto de inflexão da curva logística, quando existir, ocorre quando $P = \frac{k}{2}$. Se denotarmos por $\bar{t}$ o ponto de inflexão, temos

$$P(\bar{t}) = \frac{k}{2}.$$

Logo

$$P(\bar{t}) = \frac{k}{\left(\frac{k}{p_0} - 1\right) e^{-r\bar{t}} + 1} = \frac{k}{2}.$$

Utilizando as propriedades de logaritmos, podemos isolar r na última expressão e obter

$$r = \frac{1}{\bar{t}} \ln\left(\frac{k - p_0}{p_0}\right). \tag{12}$$

A Figura 3 nos sugere que o ponto $\bar{t}$ deve estar entre 110 e 121. Deste modo, vamos admitir que o valor de inflexão $\frac{k}{2}$ será aproximado pela média entre $P(110)$ e $P(121)$, isto é

$$\frac{k}{2} = \frac{121,150573 + 146,917459}{2} = 134,034016 \Rightarrow k = 268,068032 \text{ (em milhões)}.$$

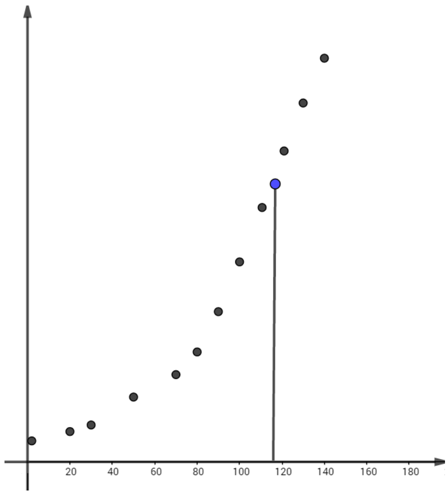

Figura 15: Pontos referentes à população ao longo do tempo.

De forma análoga, realizamos a aproximação

$$\bar{t} = \frac{110 + 121}{2} = 115,5.$$

Assim, voltando à Equação (12), tem-se que

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{115,5} \ln\left(\frac{268,068032 - 9,93047800000002}{9,93047800000002}\right), \\ r &= 0,00865800865800867 \cdot 3,25788398402648, \\ r &= 0,028206787740489. \end{aligned}$$

Com os novos valores obtidos para k e r chegou-se a uma nova solução:

$$P(t) = \frac{268,068032}{\left(\frac{268,068032}{9,930478} - 1\right) e^{-0,028206787740489t} + 1},$$

isto é

$$P(t) = \frac{268,068032}{25,994474183418e^{-0,028206787740489t} + 1}. \quad (13)$$

A Figura 3 ilustra o gráfico da função acima e os dados da População Brasileira.

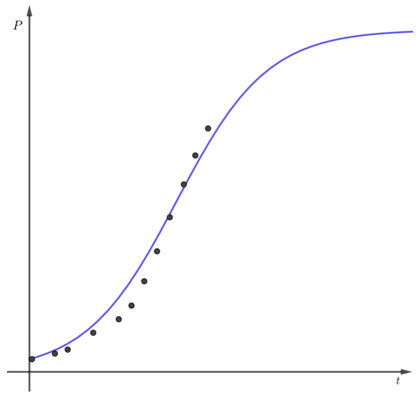

Figura 16: Curva encontrada aproximando os pontos.

Observe que a nova curva obtida melhor aproxima os dados reais. No entanto, pode-se ainda analisar os erros, como na primeira tentativa. Os valores são dados na Tabela 3.

Valor real	Valor aproximado	Erro
9930478	10,4842549826132	0,0557653904085184
14333915	16,9803052509826	0,184624385660343
17438434	22,0583363571178	0,264926446785177
30635605	36,5005312077383	0,191441501081447
41236315	58,162860816542	0,410476683392829
51944397	72,023943401452	0,386558465611834
70992343	87,8065079565311	0,23684476728048
94508583	105,191802494183	0,113039674864053
121150573	123,657978319093	0,0206966030535668
146917459	144,410053680907	0,017066762086412
169590693	161,068059128179	0,050254136716223
190755799	178,588018894026	0,0637872094571268

Tabela 3: Erros obtidos via ponto de inflexão.

Neste ajuste o maior erro encontrado foi aproximadamente $0,41$, menor que $0,72$ dado no primeiro ajuste.

Após encontrar um método mais adequado para a aproximação, utilizou-se então os dados da população do estado de Minas Gerais para encontrar um modelo que caracterizasse o crescimento de tal população. Os dados também foram obtidos no site do IBGE (veja [4]) e são apresentados na Tabela 4.

Ano	tempo (t)	População
1872	2	2039735
1890	20	3184099
1900	30	3594471
1920	50	5888174
1940	70	6763368
1950	80	7782188
1960	90	9960040
1970	100	11645095
1980	110	13651852
1991	121	15731961
2000	130	17866402
2010	140	19597330

Tabela 4: Dados da População Mineira.

A Figura 5 ilustra, num plano cartesiano, os dados da população mineira. Ao analisar os pontos no gráfico 5, pode-se imaginar o ponto de inflexão como o aquele correspondente a $\bar{t} = 130$, isto é, $\dfrac{k}{2} = 17866402$. Desta forma, tem-se

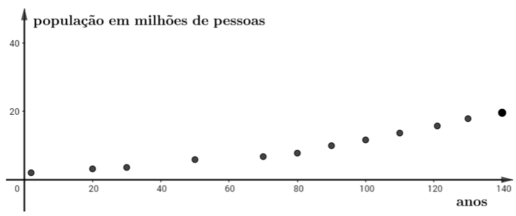

Figura 5: População mineira em milhões de indivíduos - 1872 a 2010.

$$k = 35732804.$$

Novamente utilizamos a normalização de dividir tudo por $1.000.000$.

Ao substituir k e o a população inicial $p_0 = 2039735$ na equação (12), tem-se

$$r = 0,0215728634699438.$$

Obteve-se assim o modelo

$$P(t) = \frac{35,732804}{(17,5183560609589 - 1)e^{-0,02157286346994 38t} + 1}. \qquad (14)$$

A Figura 6 ilustra os dados da população mineira e a curva obtida via ponto de inflexão. Vale observar que neste modelo a capacidade de saturação do estado Minas Gerais seria de aproximadamente $35,73$ milhões de pessoas.

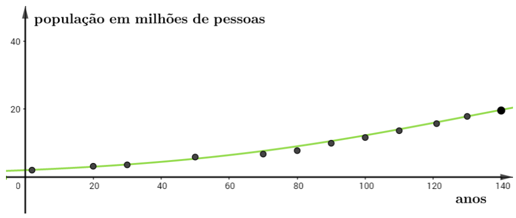

Figura 6: Modelo aproximado da população do estado de Minas Gerais.

4 Considerações Finais

É importante destacar que Malthus foi pioneiro quando se trata de modelos populacionais, tendo pensado no que hoje chama-se de modelo Malthusiano ao observar a população de Londres durante a Revolução Industrial. Isto por si só já marca seu nome na história da modelagem, pois vários outros modelos que temos notícia partem do dele. Criticar seu modelo e melhorá-lo, como fez Vershust não significa diminuí-lo, mas indica que a busca por melhoria nos modelos certamente nunca acabe. Cabe observar ainda que, embora o modelo de Malthus não seja o mais adequado, não deixa de descrever com razoável precisão o crescimento de uma população ao longo de um período de tempo.

No que se refere ao modelo Logístico, pode-se perceber que o segundo método de ajuste utilizado, através do ponto de inflexão, fornece um modelo mais preciso, com erros menores, se comparado com a tentativa inicial via regressão linear do termo $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$. No entanto, é fácil perceber que o modelo via ponto de inflexão está distante de ser perfeito ou ideal.

A busca por modelos melhores é algo inerente à modelagem matemática, pois sempre desejamos nos aproximar mais e melhor da realidade, diminuindo os erros. É assim que é feito o trabalho de modelagem: buscando modelos e métodos mais adequados, que se adaptem aos diversos fatores que influenciam o fenômeno estudado. Como fez Verhulst ao repensar o modelo de Malthus, considerando não só a natalidade, mas também a inevitável mortalidade e escassez de recursos.

Existem outros modelos na literatura que não foram explorados por nós, tais como o modelo de Von Bertalanffy (biólogo australiano que formulou, através de uma modificação no modelo Verhulst, um modelo matemático para analisar o aumento em peso de peixes) e de Lotka Voltera (para duas espécies em competição). Aos interessados em analisar outros modelos recomendamos a leitura de [1].

5 Agradecimentos

Ao Grupo PET Matemática e ao PIVIC-UFOP que permitiram o desenvolvimento deste trabalho. A primeira autora também agradece ao seu orientador, pelos ensinamentos, pela paciência e incentivo

Referências

[1] Rodney Carlos Bassanezi. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto, 2002.

[2] William E Boyce and Richard C DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Guanabara Dois, 1985.

[3] Claus Ivo Doering and Artur O Lopes. *Equações diferenciais ordinárias*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.

[4] IBGE. *Dados da População Brasileira*. SITE Séries Estatísticas, disponível em <https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10& op=2& vcodigo=CD90& t=populacao-presente-residente>, acessado em 23 de agosto de 2018 às 00:13 horas., 2018.