

Os Teoremas das Panquecas

Márcio André dos Santos marcio.andre@ifmg.edu.br
Instituto Federal de Minas Gerais, Ouro Preto, MG, Brasil

Wenderson Marques Ferreira wmf@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Eder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Nosso principal objetivo é estudar os Teorema das Panquecas, resultados que garantem a existência de retas que dividem regiões planas de modo que as sub-regiões obtidas nessa divisão possuem mesma área.

Palavras-chave

Pontos fixos, Teorema das Panquecas, áreas.

1 Introdução

O conhecimento de áreas de figuras planas sempre foi fundamental dentro da Matemática, estando relacionado, por exemplo, a cálculo de áreas destinadas a plantações e à construção de moradias.

Neste trabalho, responderemos questões simples como:

1. Se A e B forem duas figuras planas e limitadas, cujos interiores são conjuntos conexos, existe uma mesma reta dividindo cada uma delas em duas partes de áreas iguais?

2. Se A for uma figura plana e limitada, cujo interior é um conjunto conexo, existem duas retas perpendiculares entre si dividindo A em quatro partes de áreas iguais?

Neste trabalho responderemos às duas perguntas, estabelecendo os Teoremas das Panquecas. O próprio nome pelo qual tais resultados são conhecidos já aguça a curiosidade daqueles que são informados de sua existência. Mais que isso, tais resultados, em especial o primeiro deles, são casos típicos de propriedades geométricas cuja veracidade pode ser intuitivamente aceita através de exemplos simples, pode ser evidenciada com figuras mais complexas e cuja prova, mesmo com todas as evidências de sua validade, demanda conhecimentos matemáticos além daqueles vistos no Ensino Médio.

Embora seja curioso e até engraçado abordar panquecas em um resultado Matemático, e embora os Matemáticos não tenham necessidade de histórias e probleminhas divertidos para empreenderem seus estudos, há muita Matemática por trás deste desprezioso problema de se partir panquecas em uma frigideira.

2 Pontos Fixos, Alguns Teoremas Clássicos e Algumas Definições

Nesta seção, apresentaremos a definição de ponto fixo e veremos exemplos de como encontrá-lo(s) algebricamente e geometricamente.

Definição 1. *Seja \mathbb{X} um conjunto não vazio e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ uma função dada. Dizemos que um elemento $x_0 \in \mathbb{X}$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.*

Observação 1. *De acordo com a Definição 1, se queremos determinar algebricamente o(s) ponto(s) fixo(s) de uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, basta encontrarmos o conjunto solução da equação $f(x) = x$ e, em seguida, fazer a interseção desse conjunto com o conjunto \mathbb{X} .*

Exemplo 1. *0 e 1 são os únicos pontos fixos da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, pois 0 e 1 são as únicas soluções da equação $x^2 = x$ e pertencem a \mathbb{R} .*

Observação 2. *Se queremos determinar geometricamente o(s) ponto(s) fixo(s) de uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, basta encontrarmos a abscissa ou a or-*

denada do ponto de interseção dos gráficos de f e de $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dada por $g(x) = x$.

Observação 3. *Vê-se que podemos estender a Definição 1, da seguinte forma: Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} conjuntos não vazios e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ uma função dada. Dizemos que um elemento $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$.*

Mais informações sobre Teorias referentes a Pontos Fixos podem ser obtidas em [5, 6]. Nesse último trabalho, diversos resultados sobre pontos fixos são demonstrados, dentre eles:

1. Sejam $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ funções. Se x_0 for um ponto fixo de f e de g , então x_0 é ponto fixo de $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$, isto é, $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Z}$ e $g \circ f(x_0) = x_0$.
2. Sejam $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ uma função bijetora e $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ sua inversa. Se x_0 é ponto fixo de f , então x_0 é também ponto fixo de g .

Pensemos na seguinte questão, relativa a pontos fixos de funções bijetivas:

Questão: Se a interseção dos gráficos de f e f^{-1} não for vazia, então f sempre possui ponto fixo?

A resposta é não, como pode ser visto no seguinte contra-exemplo: Dada a função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, definida conforme Figura 1, temos que o conjunto $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$ é o gráfico da função f e o conjunto $\{(1, 2), (2, 1), (4, 3)\}$ é o gráfico da função f^{-1} . Notamos que a interseção dos gráficos de f e f^{-1} não é vazia e que f não possui ponto fixo.

Questão Existem condições para que, sendo a interseção dos gráficos de f e f^{-1} não vazia, f tenha ponto fixo?

Uma condição suficiente é que f deve ser crescente ou decrescente. De fato: sejam $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ uma função crescente (o caso em que f é decrescente se prova de forma análoga) e $f^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ sua função inversa. Como a interseção dos gráficos de f e f^{-1} é não vazia, então existe $x_0 \in \mathbb{X} \cap \mathbb{Y}$ tal que $(x_0, f(x_0)) = (x_0, f^{-1}(x_0))$, donde $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

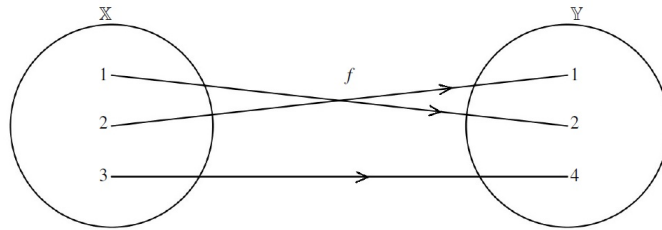


Figura 1: Diagrama correspondente à função f .

Agora, suponhamos, por absurdo, que x_0 não seja ponto fixo de f , isto é, $f(x_0) \neq x_0$. Então há duas possibilidades: ou $f(x_0) > x_0$ ou $f(x_0) < x_0$.

Se:

1) $f(x_0) > x_0$, temos que $f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0)$, pois f^{-1} também é crescente (veja, a seguir, [6], Lema 2.2.1) e portanto $x_0 > f(x_0)$, o que é um absurdo.

2) $f(x_0) < x_0$, segue-se que $f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(x_0)$, pois, como mencionado no item anterior, f^{-1} é crescente, e conseqüentemente $x_0 < f(x_0)$, o que também é um absurdo. Portanto x_0 deve ser ponto fixo de f . \square

2.1 Os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e do Valor Intermediário

Dois Teoremas clássicos da Matemática são o

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). ¹ *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então f possui ponto fixo.*

e o

Teorema 2 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < c < f(b)$ ou $f(b) < c < f(a)$, então existe*

¹Versões mais gerais desse Teorema são amplamente conhecidas em Matemática. Em nosso trabalho, apenas a versão unidimensional é demandada e optamos por enunciar o Teorema apenas nesse caso. Para mais informações, ver [4].

$x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Tais Teoremas são fundamentais na sequência do texto e são equivalentes. A demonstração desta equivalência bem como exemplos que ilustrem tais Teoremas podem ser vistos em [2, 3, 5, 6, 7].

2.2 Pontos Antipodais e Coordenada Angular

Nesta seção, vamos definir o que são pontos antipodais e coordenadas angulares.

Dado um círculo C (veja a Figura 2), construa o plano cartesiano com origem no centro de C e o círculo unitário C_1 . Note que para cada $x \in C$, a semirreta com origem no centro de C , e que contém x , determina em C_1 um único x_1 e vice-versa. Isto é, para cada $x_1 \in C_1$, a semirreta com origem no centro de C e que contém x_1 determina em C um único x .

Assim, temos as seguintes definições:

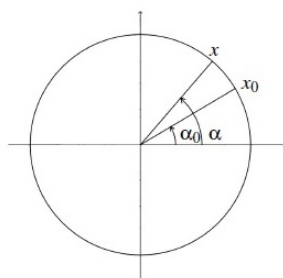


Figura 2: α é a coordenada de x .

Definição 2. *Seja α a medida, em radianos, do menor arco trigonométrico não negativo de extremidade x_1 . Dizemos que α é a coordenada angular de x .*

Definição 3. *Dois pontos x e x^* pertencentes a C são ditos pontos antipodais quando a diferença entre suas coordenadas angulares é igual a $\pm\pi$. Em outras palavras, dois pontos da superfície de uma esfera são antipodais quando são diametralmente opostos.*

As seguintes definições relativas a conceitos de continuidade também serão necessárias na sequência do texto. Optamos por apresentar as definições considerando os domínios e contra-domínios que utilizaremos. Mais informações sobre topologia e continuidade e topologia podem ser vistas em [1] e [2], respectivamente.

Definição 4. *Sejam $h : [0, 2\pi) \rightarrow C$ uma função, C um círculo e $d(h(\alpha), h(\alpha_0))$ a distância de $h(\alpha)$ a $h(\alpha_0)$. Dizemos que h é contínua em $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, então $d(h(\alpha), h(\alpha_0)) < \epsilon$.*

Definição 5. *Sejam $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, C um círculo e $d(x, x_0)$ a distância de x a x_0 . Dizemos que f é contínua em $x_0 \in C$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in C$ e $d(x, x_0) < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*

A partir das definições anteriores, temos as seguintes observações:

Observação 4. *Sejam x e x^* dois pontos antipodais de coordenadas angulares respectivamente iguais a α e β . Se $\alpha < \beta$, tem-se que:*

i) $\alpha \in [0, \pi)$.

ii) $\beta \in [\pi, 2\pi)$.

Observação 5. *Nota-se que, se $\alpha \in [0, 2\pi)$ for a coordenada angular de um ponto x qualquer do círculo C , então existe uma função bijetora*

$$h : [0, 2\pi) \rightarrow C,$$

definida por $h(\alpha) = x$ e contínua (ver Definição 4 e a prova da continuidade de h na seção 4). Assim, se existe $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, também existe $f \circ h : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in C$, existe um único α pertencente a $[0, 2\pi)$ de forma que $f(x) = f \circ h(\alpha)$.

3 Primeiro e Segundo Teoremas das Panquecas

Nesta seção, demonstraremos os Teoremas das Panquecas. Iniciaremos pela demonstração de um importante resultado, o qual é consequência direta do Teorema do Valor Intermediário. A principal referência utilizada foi [7]. Nesta seção, optamos por não demonstrar a continuidade

de muitas das funções utilizadas, deixando sua prova para a seção 4.

Teorema 3 (Teorema de Borsuk-Ulam). ² *Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no círculo C . Então existe um par de pontos antipodais x e x^* tal que $f(x) = f(x^*)$.*

Demonstração: Vamos inicialmente construir o plano cartesiano com origem no centro de C (veja Figura 3) e definir $g : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua (cf. seção 4), em que r é a medida do raio do círculo C , da seguinte forma:

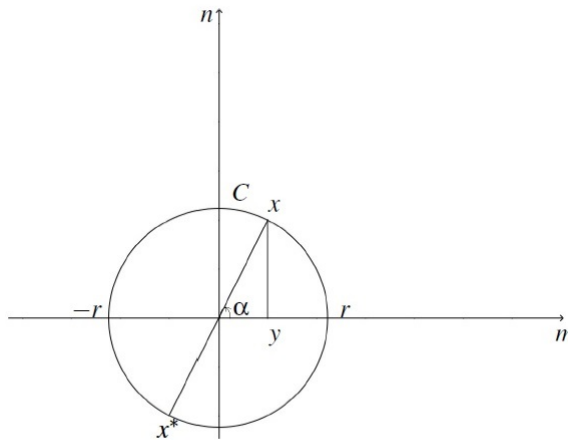


Figura 3: A coordenada α é associada ao ponto $x \in C$ e este é associado a y .

- i) Para $y \in [-r, r]$, seja x o ponto de interseção da reta que contém y e é perpendicular ao eixo horizontal com o semicírculo superior.
- ii) Sejam x^* o ponto antipodal a x e α a coordenada angular de x .
- iii) Seja $g(y) = f(x) - f(x^*)$, ou equivalentemente, de acordo com a observação 5,

$$g(y) = foh(\alpha) - foh(\alpha \pm \pi).$$

Admitindo tudo isso, temos que

$$g(-r) = foh(\pi) - foh(0)$$

² Assim como feito no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, optamos por enunciar apenas a versão unidimensional desse resultado, a qual é utilizada em nosso trabalho. Mais informações sobre o caso geral podem ser vistas em [4].

e

$$g(r) = foh(0) - foh(\pi),$$

donde $g(r) = -g(-r)$.

Se:

a) $g(r) = 0$, então da definição de g temos que $f(x) = f(x^*)$ e o teorema está provado.

b) $g(r) \neq 0$, então ou $g(r) < 0 < g(-r)$ ou $g(-r) < 0 < g(r)$. Em ambos os casos, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $y \in [-r, r]$ tal que $g(y) = 0$. Portanto, de acordo com a definição de g ,

$$f(x) = f(x^*),$$

em que x é o ponto associado a y conforme *i*). □

Teorema 4 (Primeiro Teorema das Panquecas). *Se A e B forem duas figuras planas e limitadas, cujos interiores são conjuntos conexos, então existe uma mesma reta dividindo cada uma delas em duas partes de áreas iguais.*

Demonstração: Inicialmente coloquemos as duas figuras dentro de um círculo C (veja Figura 4. Em linguagem figurada, o círculo seria a frigideira onde estão as panquecas). Isso pode ser feito, pois as duas figuras são limitadas.

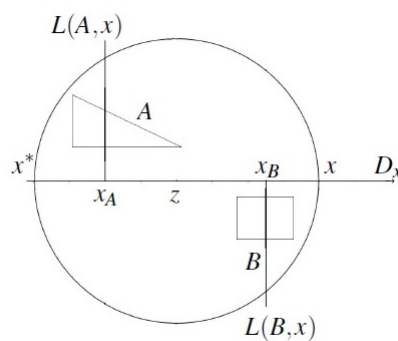


Figura 4: Duas figuras planas ("panquecas") dentro de um círculo ("frigideira").

Seja z o centro de C e r a medida de seu raio. Para qualquer $x \in C$, seja x^* o seu ponto antipodal, e D_x o diâmetro de extremidades x e x^* . De acordo com o Lema 1, a seguir, para todo $x \in C$, existe uma única reta $L(A, x)$ perpendicular a D_x dividindo A em duas figuras de mesma área e uma única reta $L(B, x)$ perpendicular a D_x dividindo B também em duas figuras de mesma área.

Denote, respectivamente, por x_A e x_B , os pontos de interseção de $L(A, x)$ e $L(B, x)$ com D_x . Em D_x , temos uma escala natural (sistema de coordenadas) com z na origem: a coordenada do ponto é a sua distância orientada a z , positiva se o ponto estiver entre z e x , e negativa caso contrário.

Seja $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por

$$g(x) = g_A(x) - g_B(x),$$

em que $g_A(x)$ e $g_B(x)$ são, respectivamente, as coordenadas de x_A e x_B .

De acordo com a definição de g , temos que $g(x) = -g(x^*)$ para todo $x \in C$. De fato, $D_{x^*} = D_x$, então $L(A, x) = L(A, x^*)$ e $L(B, x) = L(B, x^*)$. Dessa forma $x_A = x_A^*$ e $x_B = x_B^*$. Porém as orientações em D_{x^*} e D_x são opostas e portanto $g_A(x^*) = -g_A(x)$ e $g_B(x^*) = -g_B(x)$, de modo que

$$g(x^*) = g_A(x^*) - g_B(x^*) = -g_A(x) + g_B(x) = -g(x).$$

Observemos que tal argumentação é válida para qualquer ponto x do círculo.

Por outro lado, como g é contínua (cf. seção 4), pelo teorema de Borsuk-Ulam, existe um par de pontos antipodais \bar{x} e \bar{x}^* tal que $g(\bar{x}) = g(\bar{x}^*)$. Para este par de pontos, podemos obter únicas $L(A, \bar{x})$ e $L(B, \bar{x})$ perpendiculares a $D_{\bar{x}}$ e dividindo ao meio, respectivamente, A e B . Portanto, para este

par de antipodais, temos

$$\begin{cases} g(\bar{x}) = -g(\bar{x}^*) \\ g(\bar{x}) = g(\bar{x}^*) \end{cases}$$

donde $g(\bar{x}) = 0$. Isto implica em $g_A(\bar{x}) = g_B(\bar{x})$, e então $\bar{x}_A = \bar{x}_B$. Portanto $L(A, \bar{x}) = L(B, \bar{x})$ divide cada uma das figuras A e B ("panquecas") em duas outras figuras de áreas iguais. \square

Lema 1. *Se A é uma figura plana e limitada, cujo interior é um conjunto conexo, então, para todo diâmetro de qualquer círculo C que contenha A , existe uma única reta perpendicular ao mesmo e dividindo A em duas figuras de mesma área.*

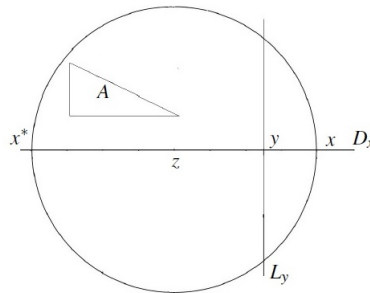


Figura 5: L_y é perpendicular a D_x em y .

Primeiramente, mostraremos a existência de tal reta: para todo $x \in C$, em que C é um círculo cujo raio tem medida r , sejam L_y a reta perpendicular a D_x , no ponto de coordenada y (veja Figura 5), e $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(y)$, em que $f(y)$ é a área da parte de A que está no lado positivo de L_y (no sentido de crescimento de y no sistema de coordenadas de D_x).

De acordo com a definição de f , temos que $f(-r) = k > 0$ e $f(r) = 0$; k sendo a área total de A . Assim $f(r) < \frac{k}{2} < f(-r)$ e, como f é contínua (cf. seção 4), segue-se do Teorema do Valor Intermediário que existe $y_0 \in (-r, r)$ tal que $f(y_0) = \frac{k}{2}$ e, portanto, existe L_{y_0} perpendicular a D_x

dividindo A em duas figuras de áreas iguais.

Finalmente, mostremos a unicidade: suponha, por absurdo, que existam retas L_y e $L_{y'}$ perpendiculares a D_x e dividindo A em duas figuras de áreas iguais (o que acarreta $f(y) = f(y')$ e que $y \neq y'$, digamos $y < y'$ (veja Figura 6).

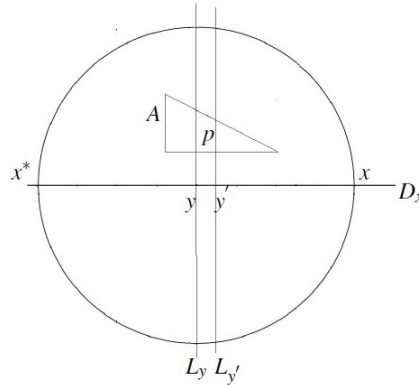


Figura 6: L_y e $L_{y'}$ perpendiculares a D_x e cada uma delas dividindo A em duas figuras de áreas iguais.

A faixa Q entre L_y e $L_{y'}$ é um conjunto aberto, cujo complemento foi dividido em duas partes, uma contendo os pontos de D_x cujas coordenadas são menores ou iguais a y e a outra contendo os pontos de D_x cujas coordenadas são maiores ou iguais a y' . Como o interior de A ($\text{Int}A$) é conexo e possui pontos de cada uma dessas duas partes, então $\text{Int}A$ deve ter um ponto de Q , digamos p . Como $\text{Int}A$ e Q são conjuntos abertos, $\text{Int}A \cap Q$ também é aberto. Assim, $\text{Int}A \cap Q$ contém uma vizinhança de p . Desta forma $\text{Int}A \cap Q$ possui área $m > 0$ e, portanto, $f(y) > f(y')$, mas isso contradiz o fato de $f(y) = f(y')$. Logo $y = y'$ e $L_y = L_{y'}$.

De forma análoga se demonstra a existência e a unicidade de $L(B, x)$.

Teorema 5 (Segundo Teorema das Panquecas). *Se A for uma figura plana e limitada, cujo interior é um conjunto conexo, existem duas retas perpendiculares entre si dividindo A em quatro partes de áreas iguais.*

Demonstração: Como no teorema anterior, suponhamos que a figura, denotada por A , esteja dentro de um círculo C (veja Figura 7). Para qualquer ponto x em C , denote por D_x o diâmetro cujas extremidades são os pontos antipodais x e x^* . Seja L_x uma reta perpendicular a D_x e dividindo A em duas figuras de áreas iguais (a existência de tal reta é garantida pelo teorema anterior) e M_x uma reta paralela a D_x e também dividindo A em duas figuras de áreas iguais (para ver isso, considere um diâmetro perpendicular a D_x e use o teorema anterior). Estas duas retas, com ponto de interseção pertencente ao interior de C , o dividem em quatro regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 , enumeradas no sentido anti-horário e a partir do ponto de interseção de M_x com C mais próximo de x .

Sejam A_i a região de A contida em R_i ; $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, e $S_i(x)$ a sua área.

Como $S_1(x) + S_2(x) = S_3(x) + S_4(x)$ (pois M_x divide A em duas regiões de mesma área) e $S_1(x) + S_4(x) = S_2(x) + S_3(x)$ (pois L_x divide A em duas regiões de mesma área), temos

$$\begin{cases} S_1(x) + S_2(x) = S_3(x) + S_4(x) \\ S_1(x) + S_4(x) = S_2(x) + S_3(x). \end{cases}$$

Multiplicando-se a segunda equação desse sistema por -1 e a somando membro a membro com a primeira equação, obtemos $S_2(x) = S_4(x)$. Usando esse fato na primeira ou na segunda equação, se conclui que $S_1(x) = S_3(x)$.

Essas duas igualdades foram obtidas para um ponto x arbitrário, mas com posição fixada. Agora suponha que este ponto se mova ao longo de C no sentido anti-horário e descreva, a partir de x , um arco de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Denote essa nova posição por y (veja Figura 7). Então, nomeando as regiões determinadas pelo par de perpendiculares L_y e M_y , temos $A_1 = \overline{A_4}$, $A_2 = \overline{A_1}$, $A_3 = \overline{A_2}$ e $A_4 = \overline{A_3}$ e conseqüentemente $S_1(y) = S_2(x)$ e $S_2(y) = S_3(x)$.

Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = S_1(x) - S_2(x).$$

Então

$$f(y) = S_1(y) - S_2(y) = S_2(x) - S_3(x) = S_2(x) - S_1(x) = -f(x),$$

isto é,

$$f(y) = -f(x).$$

Pela bijetividade citada na Observação 5 da seção anterior, existem únicos e distintos α e β pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi)$ tal que $f_{oh}(\alpha) = -f_{oh}(\beta)$ e então, pelo Teorema do Valor Intermediário, visto que f e $f_{oh} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas (cf. seção 4), existe θ pertencente a um dos intervalos (α, β) ou (β, α) tal que $f_{oh}(\theta) = 0$. Novamente, pela bijetividade mencionada anteriormente, existe $w \in C$ tal que $f(w) = 0$ e consequentemente $S_1(w) = S_2(w)$. Como já mostramos que $S_1(x) = S_3(x)$ e $S_2(x) = S_4(x)$ para todo x , então $S_3(w) = S_1(w) = S_2(w) = S_4(w)$. Portanto L_w e M_w dividem A em quatro partes de mesma área. \square

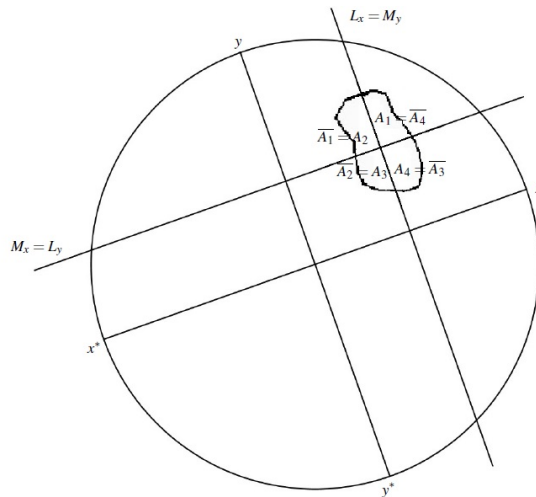


Figura 7: Representação esquemática da construção utilizada na demonstração do Segundo Teorema das Panquecas.

4 Demonstrações da Continuidade das Funções Utilizadas na Demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam e dos Teoremas das Panquecas

Nesta seção, vamos demonstrar que de fato são contínuas as funções $h : [0, 2\pi) \rightarrow C$ da Observação 5, $g : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 3, $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 4, $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 4, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 5 e $f \circ h : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 5.

a) Continuidade de $h : [0, 2\pi) \rightarrow C$, dada por $h(\alpha) = x$, da Observação 5.

Inicialmente note que, conforme esquematizado na Figura 8 e a definição de h ,

$$d(x, x_0) \leq r|\alpha - \alpha_0|.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{r}$, assim, se $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, teremos

$$d(h(\alpha) - h(\alpha_0)) < \epsilon,$$

o que prova que h é contínua.

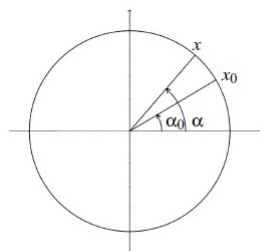


Figura 8: Círculo de raio r .

b) Continuidade de $g : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(y) = f(x) - f(x^*)$, do Teorema 3.

Note que:

i) Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in [-r, r]$ e

$|y - y_0| < \delta$, teremos $|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$, isto é, $|f(x) - f(x^*) - f(x_0) + f(x_0^*)| < \epsilon$.

ii) $|f(x) - f(x^*) - f(x_0) + f(x_0^*)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x^*) - f(x_0^*)|$, pela desigualdade triangular.

iii) $d(x, x_0) = d(x^*, x_0^*)$, em que x^* e x assim como x_0^* e x_0 são dois pares de pontos antipodais (veja Figura 9).

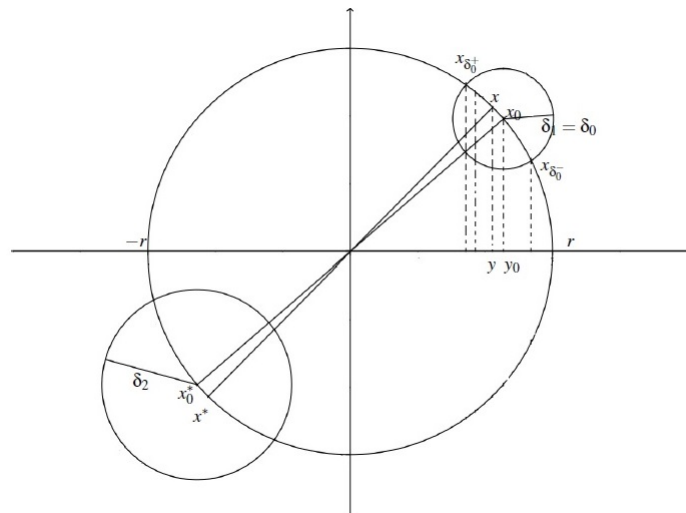


Figura 9: Representação esquemática da construção utilizada na demonstração da continuidade da função $g : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema de Borsuk-Ulam.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como f é contínua em C , existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $x_1 \in C$ e $d(x_1, x_0) < \delta_1$, então $|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Também existe $\delta_2 > 0$ tal que, se $x_2 \in C$ e $d(x_2, x_0^*) < \delta_2$, então $|f(x_2) - f(x_0^*)| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sem perda de generalidade suponha $\delta_0 = \delta_1$.

Definindo L_{y_0} como a reta que contém x_0 e o ponto de coordenada y_0 . E $x_{\delta_0^+}$ e $x_{\delta_0^-}$ como os pontos pertencentes a C e cujas distâncias a x_0 são iguais a δ_0 , vê-se que é possível escolher $\delta = \min\{d(x_{\delta_0^+}, L_{y_0}), d(x_{\delta_0^-}, L_{y_0})\} < \delta_0$ tal que, se $|y - y_0| < \delta$, teremos, por iii), $d(x, x_0) = d(x^*, x_0^*) < \delta_0$ e consequentemente

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$|f(x^*) - f(x_0^*)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donde $|f(x) - f(x_0)| + |f(x^*) - f(x_0^*)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Portanto, por *ii*), tem-se

$$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon.$$

□

c) Continuidade de $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 4.

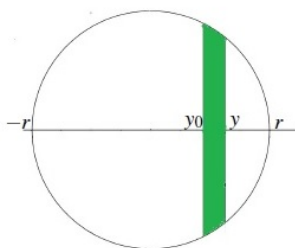


Figura 10: A área da região colorida é maior que o módulo da diferença entre $f(y_0)$ e $f(y)$.

Inicialmente note que, pela definição de f e conforme esquematizado na Figura 10,

$$|f(y) - f(y_0)| < 2r|y - y_0|.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2r}$. De modo que, se $y \in [-r, r]$ e $|y - y_0| < \delta$, teremos

$$|f(y) - f(y_0)| < \epsilon,$$

o que prova que f é contínua.

d) Continuidade de $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 4

Como g é a diferença entre duas funções e a diferença de funções

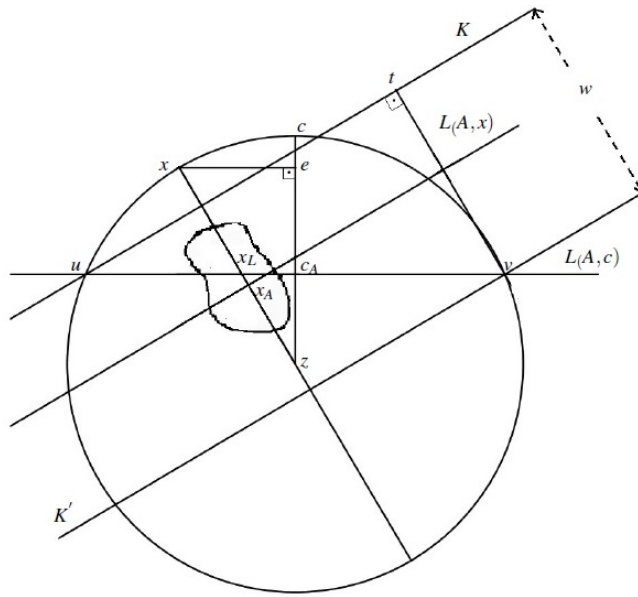


Figura 11: Representação esquemática da construção feita na demonstração da continuidade da função g do Primeiro Teorema das Panquecas.

contínuas é contínua, basta mostrarmos que g_A e g_B são contínuas.

Sejam C um círculo de centro z , c um ponto de C no qual queremos mostrar que g_A é contínua, c_A o ponto de interseção entre a perpendicular $L(A, c)$, que divide A em duas regiões de mesma área, e D_c um diâmetro de C (veja Figura 11).

Seja x um ponto de C próximo a c . Através dos pontos u e v , interseção entre $L(A, c)$ e C , desenhe as retas K e K' perpendiculares a D_x . A reta $L(A, c)$ divide o interior de C em duas partes, U e V (veja Figuras 12 a e b).

A faixa entre K e K' separa o seu complemento no interior de C em duas partes, U' e V' , de forma que $U' \subset U$ e $V' \subset V$. Por isso cada uma das partes U' e V' pode ter área, no máximo, igual à metade da área da figura A . Isso implica em $L(A, x)$, reta perpendicular a D_x e que divide A em duas regiões de mesma área, estar localizada na faixa entre K e K' . Denote por x_A o ponto de interseção entre $L(A, x)$ e D_x e por x_L o ponto de interseção entre $L(A, c)$ e D_x . Como c_A está dentro da faixa determinada por K e K' e o segmento $\overline{c_A z}$ é menor do que o segmento $\overline{x_L z}$ (pois o

$\triangle x_L c_A z$ é retângulo em c_A), então, ao girarmos D_c em torno do centro z de forma que c coincida com x , veremos claramente que $g_A(c)$ e $g_A(x)$ pertencem a um mesmo intervalo real de comprimento w (note que w é também a largura da faixa citada anteriormente), portanto

$$|g_A(x) - g_A(c)| < w.$$

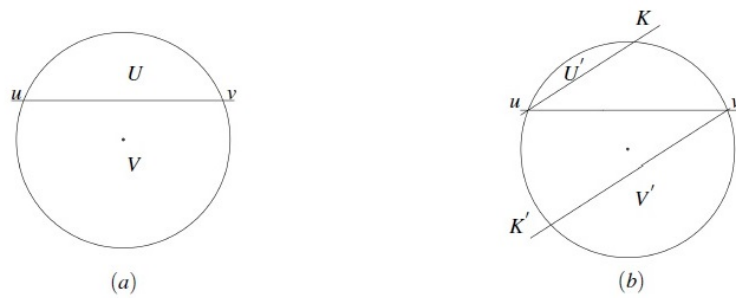


Figura 12: $C = U \cup V, U' \subset U$ e $V' \subset V$.

Por outro lado $\triangle zex \sim \triangle utv$, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo (veja Figura 13, a seguir).

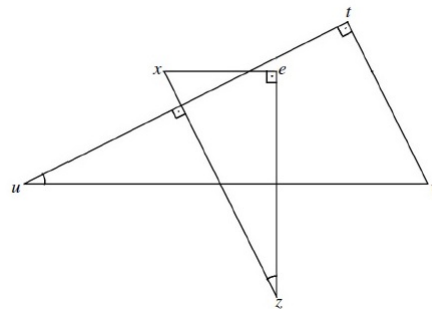


Figura 13: $\triangle zex \sim \triangle utv$.

Então

$$\frac{w}{d(u, v)} = \frac{d(e, x)}{d(z, x)},$$

em que e é o pé da perpendicular baixada de x a D_c e t é o pé da perpen-

dicular baixada de v a K . Como $r = d(z, x)$, então

$$w = \frac{d(e, x)}{r}d(u, v).$$

Além disso, $d(u, v) \leq 2r$ e $d(e, x) \leq d(x, c)$, daí

$$w \leq 2d(x, c),$$

e, portanto,

$$|g_A(x) - g_A(c)| < 2d(x, c).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Assim, se $x \in C$ e $d(x, c) < \delta$, teremos $|g_A(x) - g_A(c)| < \epsilon$, o que prova que g_A é contínua.

De forma análoga se prova que g_B também é contínua e, dessa forma, concluímos a continuidade de g .

e) Continuidade de $f = S_1 - S_2 : C \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 5.

Assim como no item anterior, basta mostrarmos que S_1 e S_2 são contínuas.

Sejam c um ponto de C , no qual queremos mostrar que S_1 é contínua, e x um ponto de C próximo a c (veja a Figura 14). A passagem do par de perpendiculares L_c e M_c para o par L_x e M_x pode ser feita em dois passos. Primeiramente, rotacionamos L_c e M_c em torno do ponto p de interseção entre elas até obtermos o par de perpendiculares L'_c e M'_c paralelas, respectivamente, a L_x e a M_x . O ângulo de rotação de medida α é determinado pelo arco de extremidades c e x . O segundo passo é transladar o par de perpendiculares L'_c e M'_c até o ponto de interseção entre L_x e M_x de forma que L'_c e M'_c se mantenham paralelas, respectivamente, à L_x e M_x .

Denote por $S_i(c)$ as áreas das sub-regiões de A obtidas pelo par L_c e M_c , por $S_i(x)$ as áreas das sub-regiões de A obtidas pelo par L_x e M_x e por $S'_i(c)$ as áreas das sub-regiões de A obtidas pelo par L'_c e M'_c . Temos, de

acordo com a Figura 14:

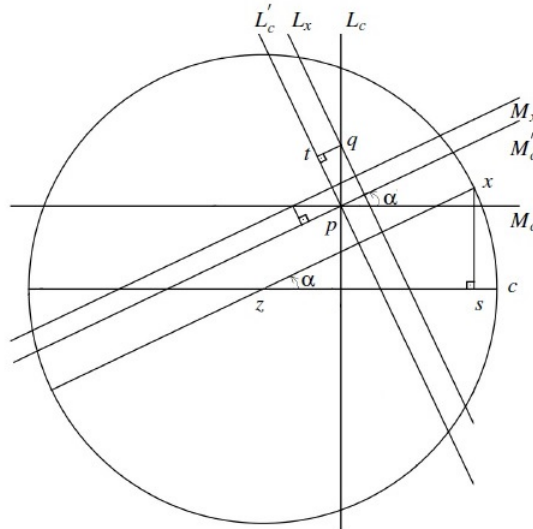


Figura 14: Construção feita na demonstração da continuidade da função f do Segundo Teorema das Panquecas.

i) $|S_1(c) - S'_1(c)|$ não é maior do que a área de um setor de C com vértice p fora do centro. Como essa área é menor do que $2rd(x, c)$, onde r é a medida do raio de C , e x está muito próximo de c (Veja justificativa no final dessa demonstração), então

$$|S_1(c) - S'_1(c)| < 2rd(x, c).$$

ii) A área U entre L'_c e L_x e dentro de C é no máximo $2ru$, em que u é a medida da distância entre L'_c e L_x . De forma análoga, a área V entre M'_c e M_x e dentro de C é no máximo $2rv$, em que v é a medida da distância entre M'_c e M_x . Em outras palavras

$$U \leq 2ru$$

e

$$V \leq 2rv.$$

iii) $|S_1(x) - S'_1(c)| < U + V$, isto é,

$$|S_1(x) - S'_1(c)| < 2r(u + v).$$

iv) Os três triângulos retângulos, cujos ângulos retos estão indicados na Figura 14, são, dois a dois, pelo caso de semelhança ângulo-ângulo, semelhantes. Além disso, o segmento de reta, de extremidades p e q , em que q é o ponto de interseção entre L_c e L_x , mede menos do que $2r$ e o segmento de reta, de extremidades x e s , em que s é o pé da perpendicular baixada de x sobre D_c , mede menos do que $d(x, c)$. Como $\triangle xsz \sim \triangle qtp$, em que t é o pé da perpendicular baixada de q sobre L'_c podemos escrever $\frac{d(p, q)}{r} = \frac{u}{d(x, s)}$, isto é,

$$u = \frac{d(p, q)}{r}d(x, s).$$

Além disso, como exposto anteriormente, $d(p, q) < 2r$ e $d(x, s) < d(x, c)$. Desses fatos se conclui que

$$u < 2d(x, c).$$

De forma análoga mostra-se que

$$v < 2d(x, c).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} |S_1(x) - S_1(c)| &= |S_1(x) - S'_1(c) + S'_1(c) - S_1(c)| \\ &\leq |S_1(x) - S'_1(c)| + |S'_1(c) - S_1(c)|, \end{aligned}$$

então, usando *i*), *iii*) e *iv*), temos $|S_1(x) - S_1(c)| < 8rd(x, c) + 2rd(x, c)$, isto é,

$$|S_1(x) - S_1(c)| < 10rd(x, c).$$

Então, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{10r}$. Assim, se $x \in C$ e $d(x, c) < \delta$, teremos $|S_1(x) - S_1(c)| < \epsilon$, o que prova que S_1 é contínua.

De forma análoga se prova que S_2 também é contínua.

Vejamos os detalhes da justificativa citada, em *i*), acima. Dada a Figura 15, a seguir, temos:

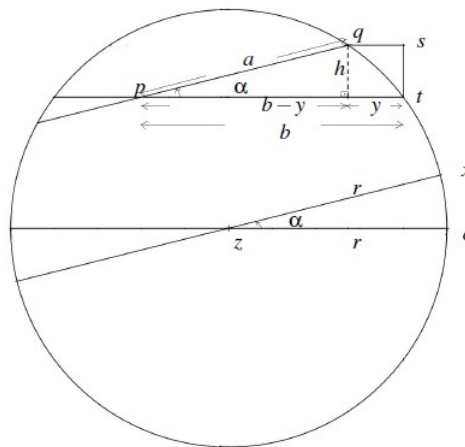


Figura 15: Comparando áreas do setor, trapézio e retângulo.

1) A área do setor com vértice p fora do centro é menor do que a área ($A_{Trap.}$) do trapézio retângulo de vértices $pqst$.

2) A área do retângulo de dimensões $2r$ e $d(x, c)$ é $A_{Ret.} = 2r \cdot (r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha})$, isto é, $A_{Ret.} = 2r^2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \alpha}$. Note que $d(x, c) = r\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}$ foi obtido pela lei dos cossenos.

3) $h = a \sin \alpha$, $y = b - a \cos \alpha$ e $A_{Trap.} = \frac{(2b - a \cos \alpha) a \sin \alpha}{2}$.

4) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{(2b - a \cos \alpha) a \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} = b^2\sqrt{2}$. Como $b^2\sqrt{2} < 4r^2\sqrt{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\alpha \in (0, \delta_1)$, então $\frac{(2b - a \cos \alpha) a \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha}} < 4r^2\sqrt{2}$, isto é,

$$\frac{(2b - a \cos \alpha) a \operatorname{sen} \alpha}{2} < 2r^2 \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \alpha}, \text{ ou seja,}$$

$$A_{Trap.} < A_{Ret.}.$$

Portanto, para α pequeno o suficiente, isto é, para x muito próximo de c , a área do setor com vértice p fora do centro é, de fato, menor do que $2rd(x, c)$.

Note que, mesmo se p coincidir com z , o resultado ainda é verdadeiro, mas, neste caso,

$$a = b = r.$$

f) Continuidade de $f \circ h : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ do Teorema 5 (Lembre-se de que $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = S_1(x) - S_2(x)$, enquanto $h : [0, 2\pi) \rightarrow C$ é definida por $h(\alpha) = x$).

Dado $\epsilon > 0$ existe, pela continuidade de f no ponto x_0 , um número $\delta_1 > 0$ tal que se $x \in C$ e $d(x, x_0) < \delta_1$, então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Por sua vez, a continuidade de h em α_0 garante que existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, então $d(h(\alpha), h(\alpha_0)) < \delta_1$, isto é, $d(x, x_0) < \delta_1$. Portanto, se $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, teremos $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ou seja,

$$|f \circ h(\alpha) - f \circ h(\alpha_0)| < \epsilon,$$

o que prova que $f \circ h$ de fato é contínua.

5 Comentários

Os Teoremas das Panquecas possuem grande apelo geométrico e são facilmente verificados se tivermos figuras com determinada simetria (como círculos, retângulos, losangos, etc). Pretendemos, em outro trabalho, utilizar programas de geometria dinâmica para propormos atividades que possibilitem a abordagem dos resultados aqui estudados com alunos do

Ensino Médio.

Referências

- [1] CHINN, W.G e STEENROD, N.E. *First Concept of Topology: The Geometry of Mapping of Segments, Curves, Circles and Disks*. 6^aed., AMS, New Mathematical Library, 1966.
- [2] LIMA, E.L. *Análise Real*. 6^aed., IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2002.
- [3] MUNIZ NETO, A. C. *Fundamentos de Cálculo*, Rio de Janeiro, SBM, (2015). 561p. (Coleção PROFMAT).
- [4] PARK, S. *Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem*. Vietnam Journal of Mathematics 27:3 (1999) 187-222.
- [5] PEREIRA, R. O, FERREIRA, W. M. MARTINS E. M. *A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário.. v. 1, Ouro Preto - Brasil: Revista de Matemática de Ouro Preto*, 2018. Disponível em: <<https://www.periodicos.ufop.br/pp/index.php/rmat/article/view/1320>>. Acessado em 21 set 2018.
- [6] SANTOS, M. A. *Os Teoremas das Panquecas e a divisão de figuras planas em regiões de mesma área*. Ouro Preto - Brasil: PROFMAT, 2017.
- [7] SHASHKIN, Y. *Fixed Points*. Vol. 2, traduzido do Russo por ViKtor Minachin, AMS, 1991.