Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Aplicações práticas para o ensino e aprendizagem das integrais de linha e superfície

Nathália Muniz nathalia-muniz@hotmail.com
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil

Taciana Oliveira Souza tacioli@ufu.br
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil

Resumo

As integrais de linha são uma ferramenta extremamente importante para a realização de diversos cálculos. Neste artigo serão mostradas suas aplicações para calcular o trabalho realizado para que um pistão se mova. Tal aplicabilidade é utilizada para ilustrar a interpretação física da integral de linha de um campo vetorial. Ademais, será possível também visualizar a aplicabilidade das integrais de superfície, com a utilização dos Teoremas de Stokes e Gauss para a transformação das Equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial.

Palavras-chave

Integrais de Linha, Trabalho, Integral de Superfície, Teorema de Stokes, Teorema de Gauss.

1 Introdução

Este artigo trata de algumas aplicações de conceitos aprendidos em cursos de Cálculo. Estas são mostradas em áreas da Engenharia, na tentativa de despertar o interesse dos discentes para tais conteúdos pois, muitas vezes durante o curso dessas matérias, eles se perguntam a utilidade de tais conceitos. Para tanto, são mostradas aplicações das integrais de linha no cálculo do trabalho realizado por pistões em motores distintos (um processo chamado politrópico). Ademais, é possível visualizar também a aplicação dos Teoremas de Stokes e Gauss no processo de transformação das quatro equações integrais de Maxwell em diferenciais. Estas são amplamente utilizadas na área do eletromagnetismo.

2 Conceitos teóricos

Neste seção, serão discutidos alguns conceitos teóricos para um melhor entendimento da temática abordada pelo artigo.

2.1 Parametrização de curvas

Uma curva C no espaço é chamada parametrizável se existir uma função vetorial de uma variável real, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, que a descreva, sendo $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ funções reais de uma variável real. Em outras palavras, se P é um ponto de C, então existe um parâmetro t tal que

$$P = (x(t), y(t), z(t)).$$

Uma vez escolhida uma função vetorial que descreve C, então dizemos que C é uma curva parametrizada.

2.2 Curva parametrizada suave

Uma curva C é chamada suave se for descrita por uma função vetorial $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ tal que as derivadas $x'(t)$, $y'(t)$ e $z'(t)$ são contínuas e, para cada t, $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$.

2.3 Definição da integral de linha de um campo vetorial

Seja $\vec{F}(x, y, z) = L(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ um campo vetorial contínuo sobre uma curva suave C descrita por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, isto é, as funções coordenadas L, Q e R são contínuas em cada ponto de C. A integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de C, denotada por $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, é estabelecida como a integral definida no intervalo $[a, b]$ do produto escalar $\vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$, isto é

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \vec{r}\,'(t)dt.$$

Observe que

$$\int_a^b \vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot \vec{r}\,'(t)dt = \int_a^b [L(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt,$$

o que sugere a notação

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C Ldx + Qdy + Rdz.$$

2.4 Significado físico da integral de linha de um campo vetorial

Veremos nesta seção que a integral de linha de um campo vetorial corresponde ao trabalho realizado por uma força (relação entre força e deslocamento).

O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ para mover, em linha reta, uma partícula do ponto A ao ponto B é dado por:

τ = (componente da força na direção do movimento) x (distância), isto é:

$$\begin{aligned} \tau &= \|\vec{F}\|\cos(\alpha)\|\vec{AB}\| \\ &= \|\vec{F}\|\|\vec{AB}\|\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Ou seja, o trabalho é calculado pelo produto escalar:

$$\tau = \vec{F}\cdot\vec{AB}$$

De posse desse conceito, será estabelecida uma ideia análoga para quando a força é variável $\vec{F}(x,y,z)$ com deslocamento ao longo de uma curva C.

Supondo que C é uma curva suave descrita por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} +$

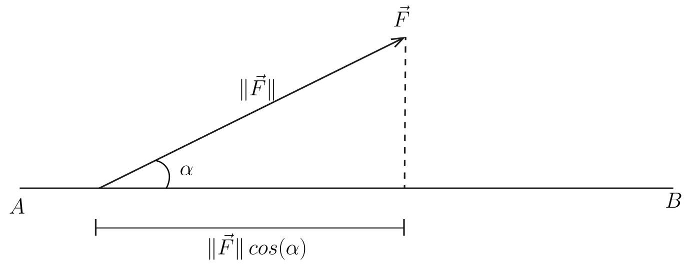

Figura 1: Ilustração do cálculo do trabalho.

$z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$ e $\vec{F}(x,y,z)$ um campo vetorial contínuo em cada ponto de C. Então, $[a,b]$ será dividido em subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., n$, todos de mesmo comprimento $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$. Isso produz uma divisão de C em subarcos $\widehat{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$, $i = 1, ..., n$, onde $P_{t_i} = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, veja a figura 2.

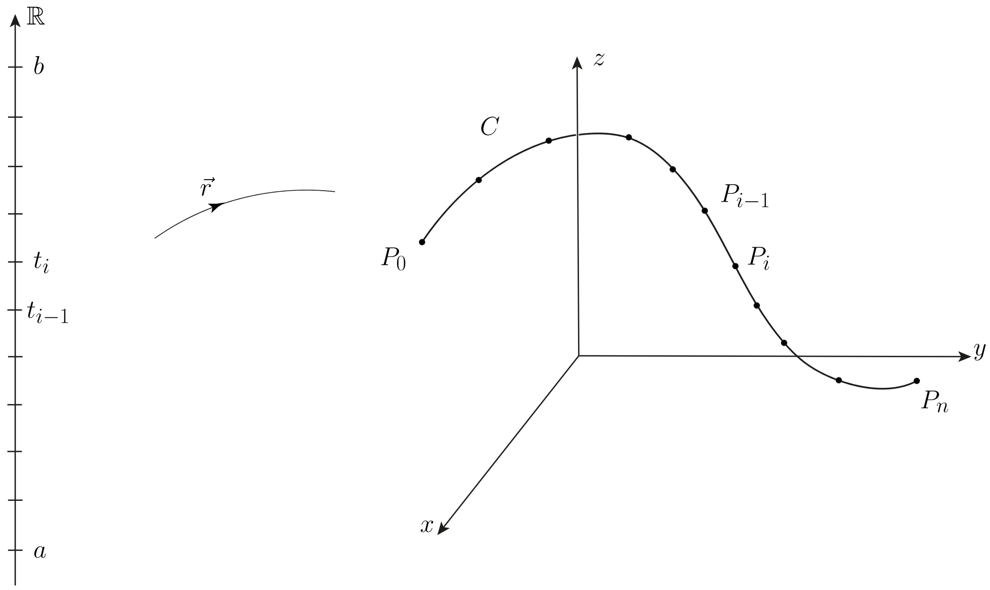

Figura 2: Divisão da curva C em subarcos.

O comprimento do subarco $\widehat{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$ será denotado por Δs_i

Se $\Delta s_i \to 0$, isto é, $n \to \infty$, então o movimento da partícula no subarco $\widehat{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$ ocorre aproximadamente na direção de $\overrightarrow{P_{t_{i-1}}P_{t_i}} \approx \vec{r}\,'(t_{i-1})\Delta t$. Neste contexto o símbolo $\approx$ indica a "proximidade" dos vetores $\overrightarrow{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$ e $\vec{r}\,'(t_{i-1})\Delta t$ estabelecida por $\vec{r}\,'(t_{i-1}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}}{\Delta t}$. Ademais, a força variável $\vec{F}(x,y,z)$ que atua para mover a partícula ao longo de $\widehat{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$ é aproximadamente igual à força constante $\vec{F}_{t_{i-1}} = \vec{F}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), z(t_{i-1}))$.

Portanto, o trabalho realizado por $\vec{F}$ para mover a partícula ao longo de $\widehat{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$ é aproximadamente igual ao trabalho realizado pela força constante $\vec{F}_{t_{i-1}}$ para mover a partícula ao longo do segmento $\overline{P_{t_{i-1}}P_{t_i}}$, isto é,

$$\vec{F}_{t_{i-1}} \cdot \overrightarrow{P_{t_{i-1}}P_{t_i}} \approx \vec{F}_{t_{i-1}} \cdot \vec{r}\,'(t_{i-1})\Delta t.$$

Essa aproximação melhora à medida que $\Delta t \to 0$, isto é, $n \to \infty$. Assim, definimos o trabalho total realizado por $\vec{F}(x,y,z)$ para mover uma partícula ao longo de C por

$$\begin{aligned} \tau &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), z(t_{i-1})).\vec{r}\,'(t_{i-1})\Delta t \\ &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)).\vec{r}\,'(t)dt \\ &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Observações:

(1) Denotando por $-C$ a curva que corresponde à C percorrida no sentido oposto, então

$$\begin{aligned} -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot -\vec{r}\,'(t)dt \\ &= \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Logo, a orientação da curva, isto é, a forma como ela é percorrida, tem influência no cálculo da integral de linha de um campo vetorial.

(2) Se $z(t) = 0$, então C é uma curva no plano e, portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt = \int_C Ldx + Qdy.$$

3 Resultados e Discussão

3.1 O trabalho realizado por pistões

Nesta seção, baseada em [4], [5] e [6], exploramos a aplicação da integral de linha no cálculo do trabalho realizado por pistões.

3.1.1 O trabalho realizado por um pistão durante um ciclo de um motor de quatro cilindros

Iniciamos com a análise da figura 3, na qual cada pistão se move para cima e para baixo e está conectado ao virabrequim por um braço-pivô.

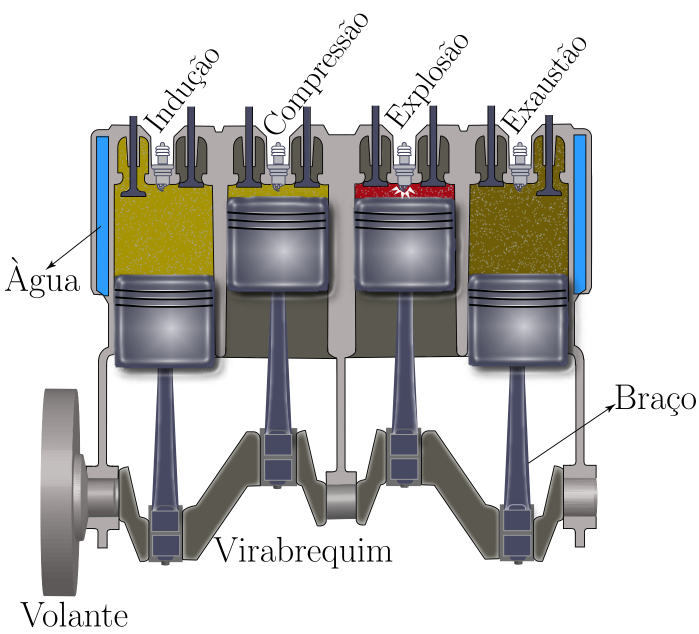

Figura 3: Motor de quatro cilindros de combustão interna.

Sejam $P(t)$ e $V(t)$, respectivamente, a pressão e o volume, dentro de um cilindro no instante t, onde $a \leq t \leq b$ é o tempo necessário para um ciclo completo. A curva C, veja a figura 4, ilustra como P e V variam, por exemplo, no ciclo de um motor de quatro cilindros.

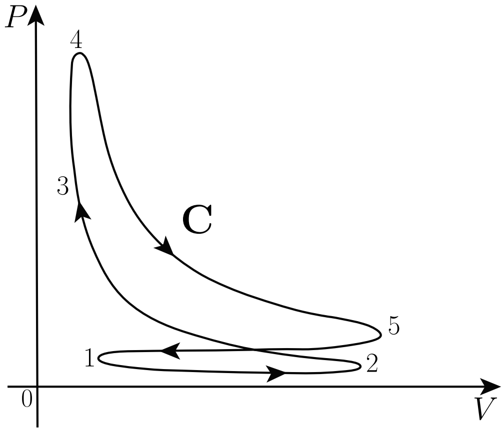

Figura 4: Comportamento de P e V durante um ciclo.

Durante o estágio de indução (de 1 a 2) a mistura de ar e gasolina à pressão atmosférica é aspirada para o interior do cilindro pela válvula de entrada à medida que o pistão se move para baixo. Então, o pistão comprime a mistura com a válvula fechada, no estágio de compressão (de 2 a 3), no qual o volume diminui e a pressão aumenta. Em 3, a vela de ignição produz uma faísca que provoca a combustão, elevando a temperatura e a pressão com um volume praticamente constante até 4. Assim, com a válvula fechada, uma expansão veloz do volume força o pistão para baixo durante o estágio de potência (de 4 a 5). A válvula, então, se abre, a temperatura e a pressão diminuem e a energia mecânica armazenada no volante impulsiona o pistão para cima, empurrando os gases formados no interior do cilindro, devido à combustão, e fazendo com que eles sejam eliminados pela válvula, na fase da exaustão. Esta se fecha e a válvula de entrada é aberta. Assim, o ciclo se reinicia.

O trabalho realizado pelo pistão durante um ciclo é

$$\tau = \int_C P dV. \tag{1}$$

Assim, com base na equação (1), será apresentada uma aplicação envolvendo mecanismos dotados de pistões.

Inicialmente, será discutido porque a integral

$$\tau = \int_C P dV$$

calcula o trabalho realizado por um pistão para que o mesmo se mova.

Neste caso, a força que atua sobre o pistão é $\vec{F} = P(t)\, A\vec{i} + 0\vec{j}$, onde A é a área do topo do pistão. Seja $x(t)$ a distância do pistão até o topo do cilindro no instante t, então o trabalho realizado pelo pistão é

$$\tau = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{2}$$

onde $\mathcal{C}$ é descrita por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + 0\vec{j}$, $t \in [a, b]$. Com isso, desenvolvendo a equação (2), temos que,

$$\tau = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt = \int_a^b AP(t)x'(t)dt = \int_a^b P(t)Ax'(t)dt.$$

O volume do cilindro no instante t é dado por

$$V(t) = A\, x(t) \text{ (área da base x altura)}.$$

Assim, $V'(t) = Ax'(t)$ e observando que a curva C é descrita por $\vec{r}(t) = V(t)\,\vec{i} + P(t)\,\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, obtém-se

$$\tau = \int_a^b P(t)Ax'(t)dt = \int_a^b P(t)V'(t)dt = \int_C PdV.$$

Logo, a equação (1) é válida para o cálculo do trabalho realizado por um pistão.

Além disso, utilizando o Teorema de Green, é possível calcular o trabalho por meio da subtração das áreas das regiões D_1 e D_2 delimitadas pelas curvas C_1 e C_2 respectivamente, mostradas na figura 5. De fato, observamos que a curva C pode ser descrita como a união de duas curvas fechadas C_1 e C_2 que têm como ponto inicial e final o ponto de autointerseção de C. Por definição, a integral de linha ao longo de C é dada pela soma das integrais de linha ao longo de C_1 e C_2, veja [5, página 955]. Assim,

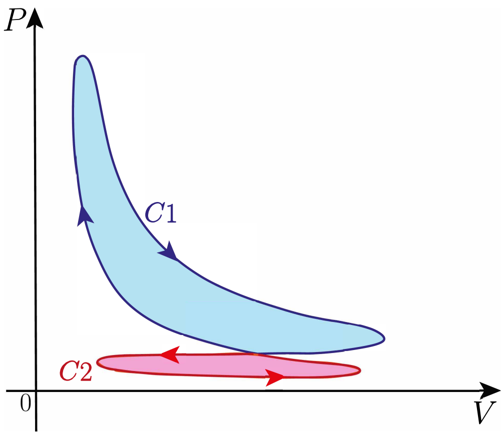

Figura 5: Curvas C_1 (azul) e C_2 (vermelho).

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_C P dV \\
&= \int_{C_1} P dV + \int_{C_2} P dV \\
&= -\int_{-C_1} P dV \; + 0\, dP + \int_{C_2} P dV + 0\, dP.
\end{aligned}$$

Observamos que as curvas C_1 e C_2 satisfazem as hipóteses do Teorema de Green. Assim, aplicando o teorema, obtemos

$$\int_{-C_1} P dV \; + 0\, dP = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial 0}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P} \right) dA = -\iint\limits_{D_1} 1 dA = -\text{ área de } D_1,$$

$$\int_{C_2} PdV + 0\,dP = \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial 0}{\partial V} - \frac{\partial P}{\partial P}\right) dA = -\iint\limits_{D_2} 1dA = -\text{ área de } D_2.$$

Portanto,

$$\tau = -\left(-\text{ área de } D_1\right) + \left(-\text{ área de } D_2\right).$$

Logo, $\tau =$ área de $D_1 -$ área de D_2.

3.1.2 Calculando o trabalho realizado por um pistão em um processo politrópico

Os ciclos de geração de potência retiram calor de uma fonte submetida a altas temperaturas. Considere como sistema o gás contido num cilindro com êmbolo, como mostrado na figura 6.

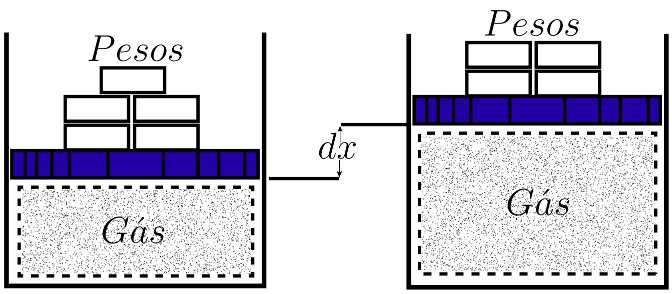

Figura 6: Êmbolo.

Ao retirar um dos pequenos pesos do êmbolo, é provocado um movimento para cima deste, de uma distância dx. Considerando este pequeno deslocamento dx como um processo praticamente estático, pode-se calcular o trabalho, $d\tau$, realizado pelo sistema durante este procedimento. A força total sobre o êmbolo é o produto $P\,A$, no qual P é a pressão do gás e A é a área do êmbolo. Assim, $d\tau = P\,A\,dx$.

Como o produto área por altura é equivalente ao volume, então $d\tau = PdV$.

A relação entre P e V é dada em termos de dados experimentais ou na forma gráfica (como, por exemplo, o traço em um osciloscópio). Neste caso, a relação entre as duas grandezas acima citadas é tal que proporciona o ajuste de uma relação analítica entre elas. Um exemplo comum desse tipo de relação é o caso de um processo chamado politrópico, no qual $PV^n = k$, sendo k uma constante, durante todo o processo. O expoente n pode assumir qualquer valor real dependendo do processo particular sob análise. Sendo 1 e 2 os estágios inicial e final, respectivamente, temos

$$PV^n = k = P_1V_1^n = P_2V_2^n \tag{3}$$

sendo $P_1 = P(1)$, $P_2 = P(2)$, $V_1 = V(1)$ e $V_2 = V(2)$. Assim,

$$P = \frac{k}{V^n} = \frac{P_1V_1^n}{V^n} = \frac{P_2V_2^n}{V^n}. \tag{4}$$

Para esse tipo de processo, calculando a integral da equação (4), obtemos

$$\int_1^2 PdV = k\int_1^2 \frac{dV}{V^n} = \frac{k}{1-n}.\left(V_2^{(1-n)} - V_1^{(1-n)}\right).$$

Substituindo k por $P_1V_1^n$ no primeiro termo da expressão anterior e k por $P_2V_2^n$ no segundo termo da expressão anterior, temos

$$\frac{P_2V_2^nV_2^{(1-n)} - P_1V_1^nV_1^{(1-n)}}{1-n}.$$

Logo, $\displaystyle\int_1^2 PdV = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-n}$.

Porém, este resultado é válido sempre que n é diferente de $1 (n \neq 1)$. No caso $n = 1$, temos o seguinte:

$$PV = k = P_1V_1 = P_2V_2$$
$$\int_1^2 PdV = k\int_1^2 \frac{dV}{V} = P_1V_1\int_1^2 \frac{dV}{V} \quad = P_1V_1.\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

O processo politrópico, como já dito anteriormente, mostra um caso particular de relação entre P e V.

3.1.3 Aplicação dos conceitos

O conjunto cilindro-pistão, mostrado na figura 7, contém, inicialmente, $0,5$ metros cúbicos de dióxido de carbono a $400\,kPa$ e temperatura de $423\,K$. Os pesos são, então, adicionados a uma velocidade tal que o gás é comprimido segundo a relação $P\,V^{1,2} = k$, na qual k é uma constante. Admitindo que a temperatura final seja igual a $543\,K$, vamos determinar o trabalho τ realizado durante esse processo.

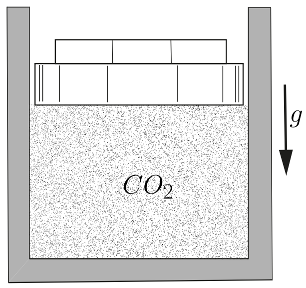

Figura 7: Conjunto cilindro-pistão.

Lembrando que $PV^n = k$ e, uma vez que $n = 1,2$, que é diferente de 1 $(n \neq 1)$, temos que:

$$\tau = \int_1^2 PdV = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{1-n}.$$

Assumindo que estamos lidando com um gás ideal, temos a relação $PV = mRT$, na qual P corresponde à pressão do gás, V é o volume, m é o número de moles do gás, R é a constante universal dos gases e T a temperatura.

Usando que $PV = mRT$ e substituindo na expressão do trabalho obtido no caso em que n é diferente de 1, temos:

$$\tau = \frac{mRT_2 - mRT_1}{1-n} = \frac{mR(T_2 - T_1)}{1-n}.$$

Mas,

$$mR = \frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{400\,(0,5)}{423} = 0,4728.$$

Assim,

$$\tau = \frac{0,4728(543-423)}{1-1,2} = -283,6\,kJ.$$

3.2 Aplicações dos Teoremas de Stokes e Gauss

Os teoremas de Stokes e Gauss possuem diversas aplicações nos campos científicos. Nesta seção, baseada em [1], [2] e [3], apresentamos um de seus principais usos que consiste na passagem da forma integral para a forma diferencial das equações de Maxwell. A notação diferencial é muito importante para o estudo do eletromagnetismo de modo mais avançado, sendo muito utilizada neste ramo da física.

As equações de Maxwell são as seguintes:

- Lei de Gauss da Eletricidade

$$\iint\limits_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{q}{\epsilon o}, \tag{5}$$

onde a expressão do lado esquerdo da equação é a integral de super-fície do campo elétrico produzido pela carga q e ϵo é uma constante chamada *permissividade no vácuo* ($\epsilon o \approx 8,8542$ x $10^{-12}\,C^2/N$ m^2). Esta equação diz que e o fluxo elétrico de $\vec{E}$ passando por uma superfície fechada S é proporcional à carga total englobada por S.

A primeira equação diferencial é obtida aplicando o Teorema de Gauss na equação (5), na qual a carga q deve ser expressa em termos da densidade de cargas ρ como

$$q = \iiint\limits_V \rho dV.$$

Assim, substintuindo q em (5), temos

$$\iiint\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}dV = \iint\limits_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{\epsilon o}\iiint\limits_V \rho dV.$$

Logo, $\iiint\limits_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho}{\epsilon o}\right)dV = 0$ e, portanto, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\frac{\rho}{\epsilon o}=0$. Desse modo, chegamos à forma diferencial

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon o}.$$

- Lei de Gauss do Magnetismo

$$\iint\limits_S \vec{B}\cdot\vec{n}dS = 0. \tag{6}$$

Esta segunda equação constata a inexistência do monopólo magnético, ou seja, não há formação de fluxo magnético em uma superfície fechada, já que todas as linhas do campo magnético $\vec{B}$ saem e entram na mesma superfície. Utilizando o Teorema de Gauss na forma integral (6) obtém-se $\iiint\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$. Desse modo, chegamos à forma diferencial

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0.$$

- Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt} \tag{7}$$

onde $\Phi_{\vec{B}}$ é o fluxo magnético. Esta equação relaciona a força eletromotriz com a variação do fluxo magnético. Utilzando o Teorema de Stokes e assumindo que as variáveis tempo e espaço dos campos vetoriais são independentes e sabendo que a Lei de Faraday na forma integral dá o fluxo magnético $(\Phi_{\vec{B}})$ através de uma superfície aberta, isto é,

$$\Phi_{\vec{B}} = \iint\limits_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS,$$

então,

$$\iint\limits_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad = - \iint\limits_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS.$$

Assim, $\displaystyle\iint\limits_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS = 0$ e, portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Isso indica que o campo elétrico $\vec{E}$ será um campo de vórtice (ou seja, possuirá rotacional diferente de zero e será um campo não conservativo) desde que o campo de indução magnética $\vec{B}$ varie com o tempo.

- Lei de Ampère-Maxwell

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(I + \iint\limits_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right) \tag{8}$$

onde $\mu_0 = 4\pi$ x 10^{-7} (N/A^2) é uma constante física chamada *permeabilidade do vácuo* e I é a corrente elétrica.

A quarta equação de Maxwell relaciona o campo magnético induzido $(\vec{B})$ à corrente elétrica (I) e à variação de fluxo elétrico no tempo $\left(\dfrac{d\Phi_E}{dt}\right)$ (corrente de deslocamento).

Sabe-se que a corrente elétrica I pode ser relacionado ao campo densidade de corrente $\vec{J}$ pela equação:

$$I = \iint\limits_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS,$$

sendo $\vec{J}$ definido como a corrente vetorial que flui através de uma unidade de área da seção transversal perpendicular à direção da corrente elétrica.

Assim, aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS.$$

Como todas as integrais são em relação à superfície S, seus integrandos devem ser iguais. Portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Concluímos, assim, a dedução das equações de Maxwell na forma diferencial

3.2.1 Aplicação dos conceitos

Calculando o fluxo de um campo elétrico. A superfície quadrada da figura 8 tem $3,2$ milímetros de lado. Ela esta imersa num campo elétrico uniforme $\vec{E}$ com norma $\|\vec{E}\| = 1800\ N/C$. As linhas do campo formam um ângulo de 35 graus com a normal, apontando para fora, como é mostrado na figura 8. Vamos calcular o fluxo elétrico através da superfície.

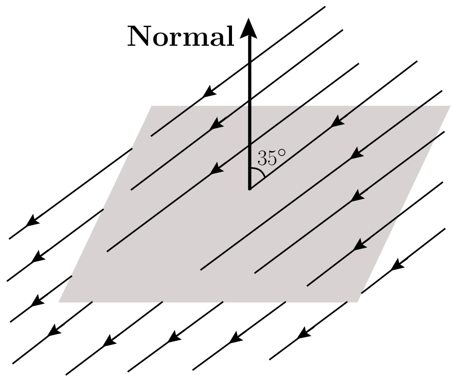

Figura 8: Figura ilustrativa da aplicação.

Em todos os pontos da superfície, o módulo do campo elétrico vale $1800\, N/C$ e o ângulo θ entre $\vec{E}$ e a normal é dado por $\theta = 180^\circ - 35^\circ = 135^\circ$.

O fluxo elétrico de um campo $\vec{E}$ é definido tanto para superficies abertas quanto fechadas como a integral de superfície $\Phi_E = \displaystyle\iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS$.

Neste caso,

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\, dS = \|\vec{E}\|\, A\, \cos(\theta),$$

onde A é a área da superfície S. Portanto,

$$\Phi_E = 1800\,(3,2.10^{-3})^2\, \cos(135^\circ) = -0,0151\, Nm^2/C.$$

Determinando a densidade de carga elétrica. Dado o campo elétrico

$$\vec{E}(x,y,z) = \begin{cases} a\,x^2\,\vec{i}, & 0 \le x \le 2 \\ b\,\vec{i}, & x > 2 \end{cases}$$

onde a e b são constantes.

Pela lei de Gauss na forma diferencial, na região em que $0 \le x \le 2$,

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial\vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{k}}{\partial z}\right)\cdot(ax^2\vec{i}) = \frac{\partial ax^2}{\partial x} = 2xa.$$

Assim, $\rho = 2xa\,\epsilon_0$. Por exemplo, na região do espaço em que $x = 1/2$ temos $\rho = a\epsilon_0$.

Já na região em que $x > 2$:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial\vec{i}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{j}}{\partial y} + \frac{\partial\vec{k}}{\partial z}\right)\cdot(b\vec{i}) = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Assim, na região do espaço para a qual $x > 2$, $\rho = 0$.

4 Conclusão

Nota-se, portanto, que uma vasta área da engenharia, em geral, depende diretamente da aplicação das integrais de linha. O trabalho realizado pelos pistões é um tema extremamente importante devido a aplicabilidade do sistema acima em todos os motores projetados por engenheiros. Por isso, com a realização dos estudos acima mostrados, foi possível visualizar aplicações de matérias do ciclo básico da engenharia em áreas extremamente importantes no mercado de trabalho e também ter um entendimento maior dos conceitos de integrais de linha. Ademais, com a transformação das Equações de Maxwell em diferenciais, extremamente utilizadas nos conceitos de Eletromagnetismo, os quais são de grande importância para a área de exatas, foi possível visualizar o uso das integrais de superfície, juntamente com os Teoremas de Stokes e Gauss.

Aplicações práticas auxiliam muito no aprendizado e fixação dos conceitos visualizados em sala de aula e, portanto, a pesquisa descrita acima pode demonstrar como conceitos básicos de algumas disciplinas podem ser extremamente úteis a longo prazo.

5 Agradecimentos

Agradeço a professora Taciana Oliveira Souza, pela orientação e apoio para o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço, também, ao programa de iniciação científica da Universidade Federal de Uberlândia, o qual incentiva a pesquisa nas mais diversas áreas, possibilitando um enorme ganho de conhecimento para os alunos.

Referências

[1] Olivier Darrigol. *Electrodynamics from Ampere to Einstein*. Oxford University Press Inc., 2000.

[2] Daniel Fleisch. *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. Cambridge University Press, 2008.

[3] David Halliday, Robert Resnick, and Jearl Walker. *Fundamentos de Física 3 -Eletromagnetismo*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1993.

[4] Roberto Vieira Pordeus. *Fenômenos de Transporte* (*Termodinâmica*). 2008. http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/111/CAP.

[5] James Stewart. *Cálculo, Volume 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[6] Gordon J. Van Wylen, Richard E. Sonntag, and Claus Borgnakke. *Fundamentos da Termodinâmica Clássica*. Edigar Blucher Ltda., 2009.