Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Os números duais de Padovan

Renata Passos Machado Vieira re.passosm@gmail.com
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brazil

Francisco Regis Vieira Alves fregis@gmx.fr
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brazil

Resumo

No presente trabalho introduzimos uma nova noção nominada por número dual de Padovan. A partir da sequência de Padovan, cujo estudo preserva o interesse de vários especialistas, trazemos um conjunto de seis matrizes definidas a partir dessa nova classe de números duais. Assim, são verificadas propriedades que correspondem ao comportamento de suas potências, suas matrizes inversas dos números duais de Padovan.

Palavras-chave

Números duais, Propriedades matriciais, Sequência de Padovan.

1 Introdução

A sequência de Padovan é uma sequência de números inteiros, de terceira ordem, representada por P_n com $\forall\ n \in \mathbb{N}$, e apresentando os valores iniciais como $P_0 = P_1 = 0, P_2 = 1$ ou ainda $P_0 = P_1 = P_2 = 1$. A sua fórmula de recorrência é dada por: $P_{(n)} = P_{(n-2)} + P_{(n-3)}, \forall\ n$. Para o primeiro conjunto de valores iniciais, determinaremos o seguinte conjunto de valores inteiros positivos: 0,0,1,0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,12,16,21,28,37,49,65,86,...

Observe, no entanto, que ainda podemos determinar os elementos do conjunto P_{-n}, com $n \in \mathbb{N}$ que representa uma extensão para o respectivo conjunto dos números inteiros. Nesse caso, é suficiente considerar a seguinte relação de recorrência $P_{(-n)} = P_{(-n+3)} - P_{(-n+1)}, \forall\ n \geqslant 1$. Para exemplificar, escrevemos alguns dos elementos com índices negativos, determinados pela recorrência: $P_{-1} = 1, P_{-2} = -1, P_{-3} = 1, P_{-4} = 0, P_{-5} = -1, P_{-6} = 2, P_{-7} = -2, P_{-8} = 1, P_{-9} = 1, P_{-10} = -3$.

Essa sequência foi criada pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935 -), nascido na cidade de Pádua [12], sendo esta sequência um tipo de parente de uma sequência mais conhecida, sequência de Fibonacci. Os números de Padovan tem grandes aplicações e propriedades na área da arquitetura [9] [7]. Observa-se a existência de um processo matemático de extensão no plano complexo desses números de Padovan, assim como acontece para a Sequência de Fibonacci, em que é estudada a relação da sequência polinomial de k-Pell-Lucas, possuindo contribuição para este artigo [10] [2] [1].

Mais adiante, empregaremos a definição de um número dual de Padovan, com base no trabalho de Clifford [2].

Definição 1. *Um número dual é definido como:*

$$d = a + \varepsilon a,$$

em que ε representa a unidade dual e $a \in \mathbb{N}$.

Com isso, essa unidade dual está sujeita a um conjunto de regras, estudadas por Shoham [10], sendo portanto: $\varepsilon^2 = 0, 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$. Depreende-se facilmente que $\varepsilon^n = 0, n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$

A seguir, será definido o número dual de Padovan, bem como algumas propriedades matriciais inerentes à esse modelo.

2 Algumas propriedades matriciais

Com base no trabalho de Clifford [2], um número dual de Padovan é definido como:

Definição 2. *Um número dual de Padovan é descrito pela recorrência:*

$$DP_n = P_n + \varepsilon P_{n+1},$$

onde P_n representa um número de Padovan e ε designa a unidade dual.

Observando a propriedade fundamental da recorrência $DP_n = DP_{n-2} + DP_{n-3}$, verificada a partir da Definição 2, percebe-se que: $DP_{n-2} + DP_{n-3} = P_{n-2} + \varepsilon P_{n-1} + P_{n-3} + \varepsilon P_{n-2} = P_{n-2} + P_{n-3} + \varepsilon P_{n-1} + \varepsilon P_{n-2} = P_n + \varepsilon P_{n+1} = DP_n$

Dos trabalhos de Seenukul *et al* [5] e Sokhuma [11], considera-se o conjunto de cinco matrizes de terceira ordem:

$$Q_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{P_5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo em seguida, acrescenta-se uma sexta matriz, definida por:

$$Q_{P_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = Q_{P_2}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T .$$

Onde $Q_{P_2}^T$ representa a transposta da matriz Q_{P_2}. Assim, considera-se, tendo em vista as seções subsequentes, o conjunto com seis matrizes $Q_{P_i}, 1 \leq i \leq 6$.

Ademais, facilmente verifica-se que para $1 \leq i \leq 6$, tem-se que $detQ_{P_i} = 1$, e o determinante das matrizes inversas e transpostas de Padovan, sendo respectivamente $detQ_{P_i}^{-1} = 1$ e $detQ_{P_i}^T = 1$.

Ainda dos trabalhos de [5, 11], será utilizado:

$$Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}, Q_{P_2}^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}, Q_{P_3}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_n \\ P_n & P_{n+1} & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$Q_{P_4}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}, Q_{P_5}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n-1} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n & P_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, recordando a relação $Q_{P_6} = Q_{P_2}^T$, pode-se verificar que é válido:

$$\begin{aligned} Q_{P_6}^n = (Q_{P_2}^n)^T &= \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & P_{n+3} \\ P_n & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, sabe-se o comportamento das potências das seis matrizes anteriores, com expoentes positivos, cujas entradas são precisamente os números de Padovan.

2.1 As matrizes dos números duais de Padovan

Com origem nas relações indicadas acima, será definido um novo conjunto de matrizes a partir da Definição 2.

$$D_1Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}, D_2Q_{P_2}^n = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+2} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix},$$

$$D_3Q_{P_3}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+3} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+2} & DP_n \\ DP_n & DP_{n+1} & DP_{n-1} \end{bmatrix}, D_4Q_{P_4}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+3} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$D_5Q_{P_5}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_{n+1} & DP_{n+3} \\ DP_n & DP_{n-1} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_n & DP_{n+2} \end{bmatrix}, D_6Q_{P_6}^n = \begin{bmatrix} DP_{n-1} & DP_{n+1} & DP_n \\ DP_n & DP_{n+2} & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n+3} & DP_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Observa-se, acima, que as entradas são precisamente os números duais de Padovan definido por $DP_n = P_n + \varepsilon P_n + 1$.

Teorema 1. *Considerando as matrizes duais $D_iQ_{P_i}^n$ com $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $n, p \in \mathbb{N}$, então tem-se que:*

(a) $D_iQ_{P_i}^n = Q_{Pi}^n(I + \varepsilon Q_{P_i}) = (I + \varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^n$ e $det(D_iQ_{P_i}^n) = 1$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$,

(b) $(D_iQ_{P_i}^n)^p = Q_{P_i}^{pn}(I + p\varepsilon Q_{P_i}) = (I + p\varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^{pn}$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $p \geqslant 1$.

Demonstração. (a) Realizando a prova para $i = 1$, podemos chegar facilmente à conclusão, visto que os demais casos são análogos. Assim, temos que:

$$D_1Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}.$$

De imediato, pode-se tomar a decomposição:

$$D_1Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+2} + \varepsilon P_{n+3} & P_n + \varepsilon P_{n+1} & P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} \\ P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} & P_{n-1} + \varepsilon P_n & P_n + \varepsilon P_{n+1} \\ P_{n+3} + \varepsilon P_{n+4} & P_{n+1} + \varepsilon P_{n+2} & P_{n+2} + \varepsilon P_{n+3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+4} & P_{n+2} & P_{n+3} \end{bmatrix}.$$

Recordando que: $Q_{P_1}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_n & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n-1} & P_n \\ P_{n+3} & P_{n+1} & P_{n+2} \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} D_1 Q_{P_1}^n &= Q_{P_1}^n + \varepsilon Q_{P_1}^{n+1} \\ &= Q_{P_1}^n (I + \varepsilon Q_{P_1}) \\ &= Q_{P_1}^n + \varepsilon Q_{P_1}^{1+n} \\ &= (I + \varepsilon Q_{P_1}) Q_{P_1}^n. \end{aligned}$$

Por outro lado, verifica-se que:

$$(I + \varepsilon Q_{P_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, determina-se que:

$$det(I + \varepsilon Q_{P_1}) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = 1 + 0 + \varepsilon^3 - \varepsilon^2 - 0 - 0 = 1.$$

Verificando a propriedade (a) $det D_i Q_{P_i}^n = 1$, realizaremos para o caso $i = 1$.

Logo: $det D_1 Q_{P_1}^n = det(Q_{P_1}^n (I + \varepsilon Q_{P_1})) = det(Q_{P_1}^n) det(I + \varepsilon Q_{P_1}) = det(Q_{P_1}^n) 1 = 1.$

Para a propriedade (b), procedendo por indução matemática sobre p, observa-se, todavia, que pode-se realizar a comutatividade:

$$\begin{aligned} D_i Q_{P_i}^{2n} &= Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^n (I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^n (Q_{P_i}^n + \varepsilon Q_{P_i}^{n+1})(I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{2n} (I + \varepsilon Q_{P_i})(I + \varepsilon Q_{P_i}) \\ &= Q_{P_i}^{2n} (I^2 + 2\varepsilon Q_{P_i} + \varepsilon^2 Q_{P_i}). \end{aligned}$$

Por fim, recorda-se a regra da unidade dual $\varepsilon^n = 0, n \geqslant 2$. Assim, determina-se:

$$D_i Q_{P_i}^{2n} = Q_{P_i}^{2n} . (I^2 + 2\varepsilon Q_{P_i}).$$

Supondo que seja válido para $p \in \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned}
D_iQ_{P_i}^{n(p+1)} &= D_iQ_{P_i}^{pn}D_iQ_{P_i}^{n} = Q_{P_i}^{pn}(I + p\varepsilon Q_{Pi})Q_{Pi}^{n}(I + \varepsilon Q_{Pi}) \\
&= Q_{P_i}^{n(p+1)}(I + \varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon^2 Q_{P_i}) \\
&= Q_{P_i}^{n(p+1)}(I + (p+1)\varepsilon Q_{P_i}) \\
&= (I + (p+1)\varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^{n(p+1)}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 1. *Considerando as matrizes duais $D_iQ_{P_i}^n$ para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $i, p \in \mathbb{N}$, tem-se que:*
(a) $det(D_iQ_{P_i}^{pn}) = 1$, para todo $p \geqslant 1$ e $1 \leqslant i \leqslant 6$,
(b) $DP_{n+2}^2 DP_{n-1} + DP_n^2 DP_{n+3} + DP_{n+1}^3 - (DP_{n+3}DP_{n-1}DP_{n+1} + 2DP_nDP_{n+1}DP_{n+2}) = 1.$

Demonstração. (a) A partir do Teorema 1, pode-se escrever a potência de uma matriz dual na forma indicada. Demonstrando para $i = 1$, pode-se facilmente verificar que os outros casos são análogos.

$$\begin{aligned}
D_1Q_{P_1}^{pn} &= Q_1^{pn}(I + p\varepsilon Q_{P_1}) \\
&= \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 0 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 1 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
detD_1Q_{P_1}^{pn} &= det \begin{bmatrix} P_{pn+2} & P_{pn} & P_{pn+1} \\ P_{pn+1} & P_{pn-1} & P_{pn} \\ P_{pn+3} & P_{pn+1} & P_{pn+2} \end{bmatrix} det \begin{bmatrix} 1 & 0 & p\varepsilon \\ p\varepsilon & 1 & 0 \\ p\varepsilon & p\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \\
&= det(Q_{P_1}^{pn})(1 + 0 + p^3\varepsilon^3 - p^2\varepsilon^2 - 0 - 0) \\
&= det(Q_{P_1}^{pn})1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

E a mesma propriedade inesperada pode ser constatada para todas as matrizes duais.

Para (b) e de acordo com $D_1Q_{P_1}^n$, observa-se que $detD_iQ_{P_i}^n = 1$, assim $detD_1Q_{P_1}^n = 1$.

Com isso:

$$\begin{aligned} detD_1Q_{P_1}^n &= det\begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= DP_{n+2}^2DP_{n-1} + DP_n^2DP_{n+3} + DP_{n+1}^3 \\ &- (DP_{n+3}DP_{n-1}DP_{n+1} + 2DP_nDP_{n+1}DP_{n+2}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

3 As inversas das matrizes dos números duais de Padovan

Considera-se o conjunto das matrizes duais $D_iQ_{P_i}^n$ para $1 \leqslant i \leqslant 6$, e em seguida, as suas respectivas matrizes inversas, cujos determinantes são todos diferentes de zero. Assim, com base nas matrizes duais de Padovan, temos:

$$(D_1Q_{P_1}^n) = \begin{bmatrix} DP_{n+2} & DP_n & DP_{n+1} \\ DP_{n+1} & DP_{n-1} & DP_n \\ DP_{n+3} & DP_{n+1} & DP_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Segue o primeiro teorema relacionado às matrizes inversas dos números duais de Padovan.

Teorema 2. *Considerando as matrizes duais inversas $(D_iQ_{P_i}^n)^{-1}$ para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $n, p \in \mathbb{N}$, tem-se que:*
(a) $(D_iQ_{P_i}^n)^{-1} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i})$ para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $det(D_iQ_{Pi}^n)^{-1} = 1$,
(b) $(D_iQ_{P_i}^{pn})^{-1} = Q_{P_i}^{-pn}(I - \varepsilon pQ_{P_i})$ para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $p \geqslant 1$, (c) $det(D_iQ_{P_i}^{pn})^{-1} = 1$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$ e $p \geqslant 1$.

Demonstração. Com origem no Teorema 1, sabe-se que $(D_iQ_{P_i}^n) = (I + \varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^n = Q_{P_i}^n(I + \varepsilon Q_{P_i})$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$. De imediato, tem-se que para $1 \leqslant i \leqslant 6$:

$$(D_iQ_{P_i}^n)^{-1} = (Q_{P_i}^n)^{-1}(I + \varepsilon Q_{P_i})^{-1}.$$

Entretanto, observa-se que: $(I + \varepsilon Q_{P_i})(I - \varepsilon Q_{P_i}) = (I - \varepsilon Q_{P_i})(I + \varepsilon Q_{P_i}) = I$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$.

Isto é, encontra-se que $(I + \varepsilon Q_{P_i})^{-1} = (I - \varepsilon Q_{P_i})$.

Ademais, sabe-se que de acordo com o teorema discutido em [3, p. 46], temos que

$(Q_{P_i}^{n})^{-1} = (Q_{P_i}^{-n})$, e de modo particular, pode-se verificar que:

$$(D_i Q_{P_i}^{n})^{-1} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i}).$$

Isto é, escreve-se a seguinte matriz inversa dual de $D_1 Q_{P_1}^{n}$:

$$\begin{aligned}
(D_1 Q_{P_1}^{n})^{-1} &= \begin{bmatrix} DP_{-n+2} & DP_{-n} & DP_{-n+1} \\ DP_{-n+1} & DP_{-n-1} & DP_{-n} \\ DP_{-n+3} & DP_{-n+1} & DP_{-n+2} \end{bmatrix} \\
&= (Q_{P_1}^{-n})(I - \varepsilon Q_{P_1}) \\
&= \begin{bmatrix} P_{-n+2} & P_{-n} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n-1} & P_{-n} \\ P_{-n+3} & P_{-n+1} & P_{-n+2} \end{bmatrix} (I - \varepsilon Q_{P_1}) \\
&= \begin{bmatrix} P_{-n+2} & P_{-n} & P_{-n+1} \\ P_{-n+1} & P_{-n-1} & P_{-n} \\ P_{-n+3} & P_{-n+1} & P_{-n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Analogamente, para os demais casos, pode-se obter a decomposição matricial acima. E, facilmente, com origem nas propriedades que foram indicadas anteriormente, temos que $det(D_i Q_{P_i}^{n})^{-1} = 1$, para $1 \leqslant i \leqslant 6$.

Para o segundo item (b), percebe-se que:

$$\begin{aligned}
(D_i Q_{P_i}^{2n})^{-1} &= D_i Q_{P_i}^{-n} D_i Q_{P_i}^{-n} = Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i}) \\
&= Q_{P_i}^{-n}(Q_{P_i}^{-n} - \varepsilon Q_{P_i}^{1-n})(I - \varepsilon Q_{P_i}) \\
&= Q_{P_i}^{-2n}(I - \varepsilon Q_{P_i})^2 \\
&= Q_{P_i}^{-2n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i} + p^2 \varepsilon^2 Q_{P_i}^2) \\
&= Q_{P_i}^{-2n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i}).
\end{aligned}$$

Pode-se, ainda, verificar que:

$$(D_i Q_{P_i}^{2n})^{-1}(D_i Q_{P_i}^{n})^{-1} = Q_{P_i}^{-2n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i}) Q_{P_i}^{-n}(I - 2\varepsilon Q_{P_i}).$$

E, repetindo o argumento anterior, percebe-se que:

$$(D_i Q_{P_i}^{3n})^{-1} = Q_{P_i}^{-3n}(I - 3\varepsilon Q_{P_i}).$$

Prosseguindo por indução sobre p e supondo $(D_i Q_{P_i}^{pn})^{-1} = Q_{P_i}^{-pn}(I - p\varepsilon Q_{P_i})$, com $p > 1$.

Em seguida, tem-se que:

$$\begin{aligned}(D_iQ_{P_i}^{n(p+1)})^{-1} &= Q_{P_i}^{-pn}(I - p\varepsilon Q_{P_i})Q_{P_i}^{-n}(I - \varepsilon Q_{P_i})\\ &= Q_{P_i}^{-pn}Q_{P_i}^{-n}(I - p\varepsilon Q_{P_i})(I - \varepsilon Q_{P_i})\\ &= Q_{P_i}^{-n(p+1)}(I - \varepsilon Q_{P_i} - p\varepsilon Q_{P_i} + p\varepsilon Q_{P_i}\varepsilon Q_{P_i})\\ &= Q_{P_i}^{-n(p+1)}(I - \varepsilon(p+1)Q_{P_i}).\end{aligned}$$

Para o item (c), podemos validar de acordo com as propriedades indicadas anteriormente e com base no item (a), onde: $det(D_iQ_{P_i}^{n})^{-1} = 1$, temos que: $det(D_iQ_{P_i}^{pn})^{-1} = 1$. □

4 Conclusão

No presente trabalho introduzimos uma nova noção chamada de número dual de Padovan. A partir desta definição, seguimos com uma tendência de trabalhos sobre a pesquisa em torno do processo de generalização dos números de Padovan, definimos um conjunto de seis matrizes, chamadas de matrizes duais de Padovan. Com origem nas mesmas, alguns teoremas e propriedades correlacionadas com as respectivas potências de matrizes e inversas duais de Padovan foram demonstradas.

No entanto, fornecemos ao leitor um cenário para melhor compreensão de algumas das propriedades e definições discutidas nas seções anteriores, com o objetivo principal transmitir a percepção matemática e evolutiva desses números e, em particular, a sequência aqui apresentada com base no caso de Fibonacci [8, 4, 6].

Referências

[1] P.M.M.C. Catarino. Diagonal functions of the k-pell and k-pell-lucas polynomials and some identities. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, LXXXVII:147–159, 2018.

[2] M. A. Clifford. Preliminary sketch of bi-quaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 4:381–395, 1873.

[3] H. Anton e C. Rorres. *Álgebra Linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2012.

[4] J. H. Conway e D. Ao. Smith. *On quaternions and Octonions: their geometry,arithmetic and symmetry*. London: A. K. Peters, 2003.

[5] P. Seenukul; S. Netmanee; T. Panyakhun; R. Auiseekaen e S. Muangchan. Matrices which have similar properties to padovan q-matrix and its generalized relations. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*, 7(2):90–94, 2015.

[6] C. Flaut e V. Shpakivskyi. Real matrix representations for the complex quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23:657–671, 2013.

[7] C. Voet e Y. Schoonjans. Benidictine thought as a catalist for 20tm century liturgical space: the motivation behind dom hans van der laan s aesthetic church arquitectury. *Proceeding of the 2nd international conference of the Europa Architetural History of Network*, pages 255–261, 2012.

[8] S. Halici. On dual fibonacci octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4):905–914, 2015.

[9] R. Padovan. Dom hans van der laan and the plastic number. *Nexus Network Journal*, 4:181–193, 2002.

[10] M. Shoham. On grassmann's products and clifford's dual unit. pages 173–180. International Symposium on History of Machines and Mechanisms Proceedings HMM 2000, 2000.

[11] K. Sokhuma. Padovan q-matrix and the generalized relations. *Applied Mathematical Sciences*, 7:2777–2780, 1 2013.

[12] I. Stewart. Tales of a neglected number. mathematical recreations. *Scientific American*, 1996.