

Tópicos Especiais de Matrizes: Isometrias no Espaço

Lívia Silva Morais

liviamorais3@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Gil Fidelix de Souza

gilsouza@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo das isometrias no espaço por meio de tópicos especiais de matrizes. Trazemos os conceitos de transformações lineares, matriz de uma transformação linear, bases, autovalores e autovetores que serão introduzidos com a finalidade de fornecer uma conexão entre os estudos teóricos da álgebra linear e o estudo das isometrias no espaço tridimensional. Faremos ainda uma breve introdução à teoria básica de grupos com exemplos aplicados às isometrias.

Palavras-chave

Isometrias, matrizes, transformações ortogonais, grupos.

1 Introdução

Uma isometria é uma aplicação no plano (ou espaço) que preserva a distância entre pontos, dito de outro modo, seja \mathbb{R}^n o conjunto das n -úplas ordenadas, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria se a distância entre $T(p)$ e $T(q)$ é igual à distância entre p e q .

As isometrias são objetos de estudo de diversos tópicos da matemática lecionados no ensino básico, por esse motivo, o tema foi bastante abordado em diversas dissertações do programa PROFMAT. As isometrias relacionadas às artes foram estudadas em diversos trabalhos, sendo os frisos ornamentais estudados em [5] onde foram identificados os grupos de frisos de acordo com os frisos ornamentais gerados. Para maiores informações sobre a pavimentações do plano com polígonos regulares e mosaicos utilizando as isometrias, consulte [1] e [3]. Neste último encontramos, também, propostas de atividades lúdicas para o ensino de isometrias, isto é, o autor propõe atividades abordando ângulos internos (recobrimento do plano), isometrias (técnica da dentada de Escher), simetrias (recortes em papel) e mediatrizes (Diagrama de Voronoi e

Triangulação de Delaunay), além de estabelecer relações matemáticas com obras de artes, em especial, as obras de Escher.

Em [4] é apresentado um estudo dos resultados básicos sobre as isometrias no plano. Em [10], o estudo das isometrias foi abordado com a utilização da estrutura do conjunto dos números complexos, mais particularmente, as Transformações de Möbius e a dissertação tem por finalidade motivar os alunos ao estudo dos números complexos e mostrar que *softwares* como *CorelDraw* e *AutoCad* utilizam da estrutura dos complexos para dar movimento a objetos em uma tela. Em [11], o autor evidenciou a importância das isometrias tanto na apresentação de superfícies isométricas ao plano quanto na caracterização do conjunto dos números reais como um espaço métrico completo.

Já em [9], o autor analisou como o ensino-aprendizagem de isometrias são abordados em alguns documentos oficiais de ensino no Brasil, como PCNs, Currículo do Estado de São Paulo e matrizes de referências do SARESP, além de propor desenvolvimento de atividades para o estudo de isometrias utilizando recortes. Em [2] são propostas diversas de aplicações do estudo das matrizes de ordem 2, sendo uma destas aplicações ao estudo das isometrias no plano.

A proposta deste estudo é apresentar um estudo das isometrias em \mathbb{R}^3 via matrizes. Veremos que o conjunto das isometrias de \mathbb{R}^3 , aqui denotado por $ISO(\mathbb{R}^3)$, é um grupo em relação à composição de funções e que o mesmo possui três tipos especiais de subgrupos (os das translações, rotações e movimentos helicoidais)

2 Fundamentos teóricos: Álgebra Linear, Grupos e Isometrias.

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, dizemos que um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$ é **invariante por T** se $T(V) = V$.

Exemplo 2.1. $T(x, y, z) = (3x + 2y, 2x + 3y, 2z)$ deixa invariante o espaço $V = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, pois $T(0, 0, z) = (0, 0, 2z) \in V$.

Um fato importante é que se V é invariante por T , então o **complemento ortogonal** de V , V^\perp , também é invariante por T ([6], Proposição 1.2).

Exemplo 2.2. Seja $T(x, y, z) = (3x + 2y, 2x + 3y, 2z)$, vimos no exemplo anterior que T deixa invariante o espaço $V = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$, e pela observação acima $V^\perp = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é invariante por T .

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **transformação ortogonal** se T preserva o produto interno usual de \mathbb{R}^n , ou seja $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$. Recordemos que a norma (ou comprimento) de $v \in \mathbb{R}^n$ é dada por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, o ângulo θ definido por dois vetores não-nulos é dado pela expressão $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$. Devemos ainda recordar que uma **base ortonormal** α em \mathbb{R}^n é uma base cujos elementos são vetores unitários 2 a 2 ortogonais.

Exemplo 2.3. Um exemplo de transformação ortogonal em \mathbb{R}^2 é dado por

$$T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right).$$

Proposição 2.1. Seja T uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^n . Então T preserva a norma, a distância e o ângulo entre vetores. Além disso, T transforma bases ortonormais em bases ortonormais.

Demonstração. A norma e distância são preservadas, pois

$$\| T(u) \| = \sqrt{\langle T(u), T(u) \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \| u \|,$$

e

$$\| T(u) - T(v) \| = \| T(u - v) \| = \| u - v \|.$$

Consequentemente,

$$\cos(\angle(T(v), T(u))) = \frac{\langle T(v), T(u) \rangle}{\| T(u) \| \| T(v) \|} = \frac{\langle v, u \rangle}{\| u \| \| v \|} = \cos(\angle(v, u)).$$

A parte relativa às bases ortonormais é uma consequência direta das observações acima, pois seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^n e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação ortogonal, então $\langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = 1$ se $i = j$ concluindo que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . \square

Exemplo 2.4. Observemos que a transformação T do Exemplo 2.3 transforma a base canônica $\{(1, 0); (0, 1)\}$ na base ortonormal $\left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Segue do Teorema 14.1 de [8] que se T é uma transformação ortogonal, então a matriz $[T]$ relativa a qualquer par de bases ortonormais é uma **matriz ortogonal**, ou seja $[T] \cdot [T]^t = I_n$, ou ainda $[T]^{-1} = [T]^t$. O que nos conduz ao seguinte resultado

Proposição 2.2. Se T é uma transformação ortogonal, então $\det T = \det [T] = \pm 1$.

Demonstração. De fato, seja $[T]$ a matriz de T em relação a um par de bases ortonormais, de $[T] \cdot [T]^t = I_n$, concluímos que

$$\det([T] \cdot [T]^t) = \det([T]) \cdot \det([T]^t) = \det([T])^2 = \det(I_n) = 1.$$

Para concluir o resultado, recordamos que o determinante de $[T]$ independe da escolha de bases, pois se S é a expressão de T em outro par de bases quaisquer, então existe uma matriz invertível M tal que $[T] = M^{-1}SM$, logo $\det[T] = \det(S)$. \square

Um **Grupo** é um conjunto G dotado de uma operação “.” que satisfaz às propriedades:

1. (Associativa) $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), \forall g_1, g_2, g_3 \in G$.
2. (Existência do elemento neutro) existe $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g, \forall g \in G$.
3. (Elemento inverso) Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e, \forall g \in G$.

Observe que o elemento neutro e de um conjunto G é único, pois se existissem elementos neutros e e e' em G , então $e = e \cdot e' = e'$ e portanto, $e = e'$. A utilização de um argumento similar nos leva a conclusão da unicidade do elemento inverso. No caso em que a operação definida em G é comutativa, dizemos que G é um **Grupo Abelian**.

Exemplo 2.5. $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ são exemplos de grupos abelianos. O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes $m \times n$ com entradas reais munido da operação de soma matrizes é um grupo abeliano, enquanto $GL(n) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$ munido da operação de multiplicação de matrizes nos fornece um exemplo de um grupo que não é abeliano, observado que a operação de multiplicação de matrizes não é comutativa.

Uma **isometria** é uma aplicação que preserva a distância entre os pontos do espaço, ou seja, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria se para quaisquer u e v em \mathbb{R}^n temos $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$. Até o presente momento, temos apresentado os resultados em \mathbb{R}^n , mas nosso objeto de estudo está em \mathbb{R}^3 , portanto os exemplos e resultados a seguir são enunciados em \mathbb{R}^3 , mas são válidos para qualquer n .

Exemplo 2.6. Em \mathbb{R}^3 , seja $T_a(u) = a + u$ a translação por a , então T_a é uma isometria de \mathbb{R}^3 , pois $\|T_a(u) - T_a(v)\| = \|(a + u) - (a + v)\| = \|u - v\|$.

Exemplo 2.7. Segue da Proposição 2.1 que toda transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 é uma isometria de \mathbb{R}^3 .

Observação 2.1. Sejam T e S isometrias de \mathbb{R}^3 , então $T \circ S$ também é uma isometria pois

$$\|T(S(u)) - T(S(v))\| = \|S(u) - S(v)\| = \|u - v\|$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^3$. A inversa T^{-1} de uma isometria, também é uma isometria, pois dados x e y em \mathbb{R}^3 existem u e v tais que $x = T(u)$ e $y = T(v)$ e portanto,

$$\|x - y\| = \|T(u) - T(v)\| = \|u - v\| = \|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)\|.$$

O resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], estabelece a que toda isometria é a composição de aplicações apropriadas.

Lema 2.1. Uma isometria de \mathbb{R}^3 é a composição de uma translação e uma transformação ortogonal.

O resultado enunciado a seguir nos mostra que o conjunto das isometrias de \mathbb{R}^3 é um grupo em relação a operação de composição de funções, o Lema 2.1 acima desempenha um papel

importante em sua demonstração.

Proposição 2.3. $ISO(\mathbb{R}^3) = \left\{ \text{isometrias de } \mathbb{R}^3 \right\}$ é um grupo com a operação de composição de funções.

Demonstração. Sejam $g, h, k \in ISO(\mathbb{R}^3)$. De acordo com o Lema 2.1, existem $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ e $T, S, R \in O(3)$, tais que

$$g(u) = a + T(u), h(u) = b + S(u) \text{ e } k(u) = c + R(u),$$

provaremos para todo $u \in \mathbb{R}^3$ que $ISO(\mathbb{R}^3)$ satisfaz às condições de um grupo. De fato,

i) Associatividade

$$\begin{aligned} g(hk)(u) &= g(h(c + R(u))) &&= g((b + S(c)) + SR(u)) \\ &= (a + T(b + S(c))) + TSR(u) &&= a + T(b) + TS(c) + TSR(u) \end{aligned}$$

como $(gh)(u) = g(b + S(u)) = a + T(b) + TS(u)$, temos

$$\begin{aligned} (gh)k(u) &= (gh)(c + R(u)) \\ &= a + T(b) + TS(c + R(u)) \\ &= a + T(b) + TS(c) + TSR(u) \end{aligned}$$

Logo,

$$g(hk) = (gh)k.$$

ii) O elemento neutro de $ISO(\mathbb{R}^3)$ é $e(u) = u, \forall u \in \mathbb{R}^3$.

iii) O inverso de $g(u) = a + T(u)$ é $g^{-1}(u) = -T^{-1}(a) + T^{-1}(u)$, pois

$$\begin{aligned} gg^{-1}(u) &= a + T(-T^{-1}a + T^{-1}u) \\ &= a - T.T^{-1}(a) + T.T^{-1}(u) \\ &= u \end{aligned}$$

e

$$g^{-1}g(u) = -T^{-1}(a) + T^{-1}(a + Tu) = u$$

Logo $ISO(\mathbb{R}^3)$ é um grupo e assim concluímos a demonstração. □

Um subconjunto não vazio H de um grupo (G, \cdot) é um **subgrupo** de G (denotamos $H < G$) quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo. Um exemplo imediato de subgrupo é dado por $\mathbb{Q} \setminus \{0\} < \mathbb{R} \setminus \{0\}$ considerado o produto. Para mostrar que H é um subgrupo de G é

suficiente mostrar que para quaisquer $h_1, h_2 \in H$ teremos $h_1.h_2^{-1} \in H, \forall h_1, h_2$.

Exemplo 2.8. O Grupo ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n) : AA^t = I_n\}$ é um subgrupo de $GL(n)$, fato que segue diretamente das propriedades da transposta de uma matriz e da definição de grupo ortogonal, pois dados A e B em $O(n)$, o cálculo

$$\begin{aligned} (AB^{-1})(AB^{-1})^t &= AB^{-1}(B^{-1})^t A^t = AB^{-1}(B^t)^{-1} A^t \\ &= AB^{-1} B A^t = A I_n A^t = A A^t = I_n, \end{aligned}$$

conclui a afirmação.

3 Grupos a 1-parâmetro

Nesta seção apresentaremos o conceito de grupos a 1-parâmetro, entretanto teremos que introduzir o conceito de homomorfismo de grupos.

Definição 3.1. Sejam (G, \cdot) e (H, \times) dois grupos. Uma função $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos se esta função for compatível com a estrutura dos grupos, ou seja, $f(a.b) = f(a) \times f(b)$, para todo $a, b \in G$.

Exemplo 3.1. $Id : (G, \cdot) \rightarrow (G, \cdot), Id(g) = g$, é um homomorfismo denotado por homomorfismo identidade. $e : G \rightarrow H, e(g) = e_H$, para todo $g \in G$ é um homomorfismo denominado homomorfismo trivial.

Observação 3.1. Sejam $f : (G, \cdot) \rightarrow (H, \times)$ e $h : (H, \times) \rightarrow (K, \odot)$ dois homomorfismos de grupos um homomorfismo de grupos, então

1. $f(e_G) = e_H$, pois $f(e_G) = f(e_G.e_G) = f(e_G) \times f(e_G)$.
2. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, que é consequência de $e_H = f(e_G) = f(x.x^{-1}) = f(x) \times f(x^{-1})$.
3. A composição $h \circ f : (G, \cdot) \rightarrow (K, \odot)$ é um homomorfismo, este fato é consequência imediata da definição de homomorfismo em $h \circ f(x.y) = h(f(x).f(y)) = h(f(x)).h(f(y))$.

Sejam (G, \cdot) e (H, \times) dois grupos. Se $f : G \rightarrow H$ é um homomorfismo bijetor dizemos que f é um **isomorfismo** e que os grupos G e H são **isomorfos**. Ilustramos estas definições no exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. Considere $G = (\mathbb{R}, +)$ e $H = (\mathbb{R}_+, \cdot)$, em que \mathbb{R}_+ é o conjunto dos números reais positivos. Vejamos que G e H são isomorfos. De fato seja $f : G \rightarrow H$ definido por $f(x) = e^x$, como $f(x + y) = e^{x+y} = e^x.e^y = f(x).f(y)$, concluímos que f é um homomorfismo bijetor cuja inversa $g : G \rightarrow H$ é dada por $g(x) = \ln(x)$ que também é um homomorfismo, fato que pode ser verificado pelo cálculo $g(x.y) = \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y) = g(x) + g(y)$. Logo, G e H são isomorfos.

Observação 3.2. Para evitar notação “carregada”, iremos usar a mesma notação para a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e sua matriz em qualquer base.

Definição 3.2. Definimos por $G(4)$ o subgrupo de matrizes 4×4 com a forma:

$$G(4) = \left\{ \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; T \in O(3), a \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}), 0 \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Proposição 3.1. $ISO(\mathbb{R}^3)$ é isomorfo a $G(4)$.

Demonstração. Vejamos que a aplicação definida por

$$\begin{aligned} \phi : ISO(\mathbb{R}^3) &\rightarrow G(4) \\ \phi : g(u) = a + T(u) &\mapsto \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

fornece um isomorfismo entre $G(4)$ e $ISO(\mathbb{R}^3)$. De fato, se $g = a + T(u)$ e $h = b + S(u)$, temos $g \circ h = a + T(b + S(u)) = (a + T(b)) + TS(u)$.

$$\text{Além disso, } \phi(g) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \phi(h) = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\phi(g) \cdot \phi(h) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TS & T(b) + a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(g \circ h)$$

mostrando que ϕ é um homomorfismo.

Para concluirmos a demonstração, falta mostrar que ϕ^{-1} é um homomorfismo. De fato, sejam

$$\phi^{-1} \left(\begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = g \text{ e } \phi^{-1} \left(\begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = h,$$

então

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \left(\begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \phi^{-1} \left(\begin{bmatrix} TS & T(b) + a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= (a + T(b)) + TS(u) \\ &= g \circ h. \end{aligned}$$

Logo ϕ é isomorfismo. □

Definição 3.3. Dizemos que um subgrupo H de G é subgrupo a 1-parâmetro se existe um

homomorfismo contínuo e sobrejetor $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$, tal que

$$\psi(r + s) = \psi(r) \cdot \psi(s)$$

para todo r e $s \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1. *Sejam $H \subset G(4)$ um subgrupo a 1-parâmetro e $h \in H$. Então $\det h = 1$.*

Demonstração. Considere $h = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(4)$.

$H \subset G(4)$ implica em $\det h = \det T = \pm 1$, sendo essa última fórmula consequência do desenvolvimento de Laplace para o determinante de h pela última linha e do fato que $\det T = \pm 1$ obtido na Proposição 2.2. Como H é subgrupo a 1-parâmetro, pela definição 3.3, existe um homomorfismo sobrejetivo e contínuo $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow H$, tal que $\psi(1) = h$, então

$$h = \psi(1) = \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \psi\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

Logo,

$$\det h = \det \psi(1) = \det \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\det \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Portanto, $\det h > 0$ se, e somente se $\det h = 1$. □

Definição 3.4. $g_1, g_2 \in G$ são conjugados se existe $g \in G$ tal que $g_2 = gg_1g^{-1}$. Analogamente, dois subgrupos H_1 e H_2 de G são conjugados se existe $g \in G$ tal que $H_2 = gH_1g^{-1} = \{h' : h' = ghg^{-1}, h \in H_1\}$.

Lema 3.2. *Seja $H \subset G(4)$ um subgrupo a 1-parâmetro, então todo*

$$h = \begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$$

é conjugado, por elemento de $G(4)$, a uma matriz da forma

$$\phi_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & C_\alpha & & 0 \\ & & & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Seja $h = \begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ e suponhamos que exista $g = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(4)$ tal

que $h = g\phi_{\alpha,\beta}g^{-1}$, i.e, $hg = g\phi_{\alpha,\beta}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} C & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

O que faremos é determinar S , b e β satisfazendo a equação (1). Por igualdade de matrizes em (1), obtemos

$$CS = SC_\alpha, \quad (2)$$

$$C(b) + a = S(0, 0, \beta) + b. \quad (3)$$

De (2) vemos que, S é a matriz de passagem da base canônica para a base formada por vetores ortonormais tal que a matriz de C tem a representação C_α . Portanto $S \in O(3)$. Consideremos $S = [v_1 \ v_2 \ v_3]$, sendo v_1, v_2 e v_3 vetores coluna de S . Além disto, de (2) temos que v_3 é base do subespaço de dimensão 1 invariante por C . Temos então que

$$(C - I)(b) = \beta v_3 - a,$$

Assim, perguntamos: Para qual β o vetor $\beta v_3 - a \in Im(C - I)$? Respondendo a esta pergunta encontraremos b e β e, finalmente, determinaremos g .

Pelo Lema 3.1, $\det h = 1$, pois h é um elemento de um subgrupo a 1-parâmetro. Logo o número de subespaços de dimensão 1 da forma $\{v : C(v) = v\}$ deixados invariantes por C é 1 ou 3. Além disso, o número de subespaços de dimensão 1 da forma $\{v : C(v) = -v\}$ é 0 ou 2, pois senão teríamos $\det C = -1$. Assim dividimos a pergunta acima em dois casos:

1º Caso) $\dim Im(C - I) = 2$: Nesse caso $\dim Nuc(C - I) = 1$ e v_3 é base de $Nuc(C - I)$, pois v_3 é base de $\{v : C(v) = v\} = Nuc(C - I)$. Como v_1, v_2 e v_3 formam uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 temos que

$$C(v_1) = (\cos \alpha)v_1 + (\sen \alpha)v_2$$

e

$$C(v_2) = -(\sen \alpha)v_1 + (\cos \alpha)v_2,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Temos então que

$$(C - I)(v_1) = (\cos \alpha - 1)v_1 + (\sen \alpha)v_2$$

e

$$(C - I)(v_2) = -(\sen \alpha)v_1 + (\cos \alpha - 1)v_2.$$

Logo

$$\langle (C - I)(v_1), (C - I)(v_2) \rangle = (\cos \alpha - 1) \sen \alpha - \sen \alpha (\cos \alpha - 1) = 0$$

e

$$\{(C - I)(v_1), (C - I)(v_2)\}$$

é um conjunto linearmente independente que gera $Im(C - I)$, ou seja, é base para $Im(C - I)$. Desde que $(C - I)v_1$ e $(C - I)v_2$ são escritos como combinação linear de v_1 e v_2 , então podemos tomar $\{v_1, v_2\}$ base para $Im(C - I)$. Além disso

$$\mathbb{R}^3 = Im(C - I) \oplus Nuc(C - I).$$

Então todo vetor de $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito na forma

$$v = \tilde{v} + \tilde{\beta}v_3, \text{ com } \tilde{v} \in Im(C - I), v_3 \in Nuc(C - I) \text{ e } \tilde{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Assim, escrevemos

$$a = \underbrace{\langle a, v_1 \rangle v_1 + \langle a, v_2 \rangle v_2}_{\in Im(C - I)} + \underbrace{\langle a, v_3 \rangle v_3}_{\in Nuc(C - I)}.$$

Tomamos $\beta = \langle a, v_3 \rangle$ e escolhemos b na imagem inversa do vetor $\langle a, v_1 \rangle v_1 + \langle a, v_2 \rangle v_2$ por $(C - I)$. O que conclui a primeira parte.

2º Caso) $\dim Im(C - I) = 0$: Escolhemos uma nova base ortonormal de \mathbb{R}^3 tal que a matriz de passagem para esta base seja dada por $S = [v_1 \ v_2 \ v_3]$, com o vetor v_3 que forma a terceira coluna de S sendo $v_3 = \frac{a}{\|a\|}$ ($a \neq 0$), $\beta = \|a\|$ e $b = 0$, o que conclui o Lema. \square

Observe que as matrizes do subgrupo a 1-parâmetro de $G(4)$ são conjugados a um elemento da forma $\phi_{\alpha, \beta}$, em que α, β números reais. Este último resultado nos conduz a teorema abaixo.

Teorema 3.1. *Com a notação do Lema 3.2, todo subgrupo a 1-parâmetro de $G(4)$ é conjugado (por elemento de $G(4)$) a um subgrupo da forma*

$$G_{\alpha, \beta} = \{\phi_{\alpha t, \beta t}; t \in \mathbb{R}\}, \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \text{ fixos.}$$

Demonstração. Sejam e H grupo a 1-parâmetro de $G(4)$ e $h \in H$. Suponhamos que h tenha a representação abaixo,

$$h = \phi_{\alpha, \beta}, \tag{4}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, sem perda de generalidade, existe um homomorfismo contínuo e sobrejetor $\psi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow H$ tal que $\psi(1) = h$. Temos

$$\psi(n) = \psi^n(1) = h^n = \phi_{n\alpha, n\beta}, \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, $\psi(1) = \psi^m(1/m)$ sendo $\psi(1/m) = \phi_{1/m \cdot \alpha, 1/m \cdot \beta}$ com $m \neq 0 \in \mathbb{Z}$. Com base nos dois últimos resultados teremos

$$\psi(n/m) = \phi_{n/m \cdot \alpha, n/m \cdot \beta}.$$

Como ψ é contínua, para $t \in \mathbb{R}$ resulta $\psi(t) = \phi_{\alpha t, \beta t}$, e esta é a expressão do homomorfismo ψ .

Agora seja $\tilde{H} \subset G(4)$ um subgrupo a 1-parâmetro qualquer. Então existe um homomorfismo contínuo $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}, +) \rightarrow \tilde{H}$ tal que

$$\tilde{\psi}(1) = \begin{bmatrix} T & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = g\phi_{\alpha, \beta}g^{-1},$$

com g dado pelo *Lema 3.2*. Repetindo o raciocínio anterior

$$\tilde{\psi}(t) = g\phi_{\alpha t, \beta t}g^{-1},$$

portanto, um subgrupo H a 1-parâmetro de $G(4)$ é conjugado a um $G_{\alpha, \beta}$. □

O Teorema 3.1 afirma que podemos considerar apenas os grupos $G_{\alpha, \beta}$ como subgrupos a 1-parâmetro de $G(4)$ (ou $ISO(\mathbb{R}^3)$) pois se H é subgrupo a 1-parâmetro, podemos por mudança de coordenadas tomá-lo como um $G_{\alpha, \beta}$.

A seguir, apresentaremos o estudo das órbitas dos subgrupos $G_{\alpha, \beta}$ e os identificaremos com trajetórias (ou curvas) em \mathbb{R}^3 .

Aplicando ao grupo $G_{\alpha, \beta}$ ao ponto (x_0, y_0, z_0) , obtemos:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\alpha t) - y_0 \sin(\alpha t) \\ x_0 \sin(\alpha t) + y_0 \cos(\alpha t) \\ z_0 + \beta t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $t \in \mathbb{R}$, a ação do grupo $G_{\alpha, \beta}$ no ponto (x_0, y_0, z_0) assume três formas distintas ou trajetórias.

1. Para $\alpha = 0$ a ação de $G_{0, \beta}$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) é

$$\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0 + \beta t),$$

ou seja, translações na direção do eixo z , em que a aplicação de $G_{0, \beta}$ sobre (x_0, y_0, z_0) é uma reta na direção do eixo Oz .

Exemplo 3.3. Para $x_0 = 1, y_0 = 0 = z_0, \alpha = 0$ e $\beta = 1$, temos

$$\gamma(t) = (1, 0, t).$$

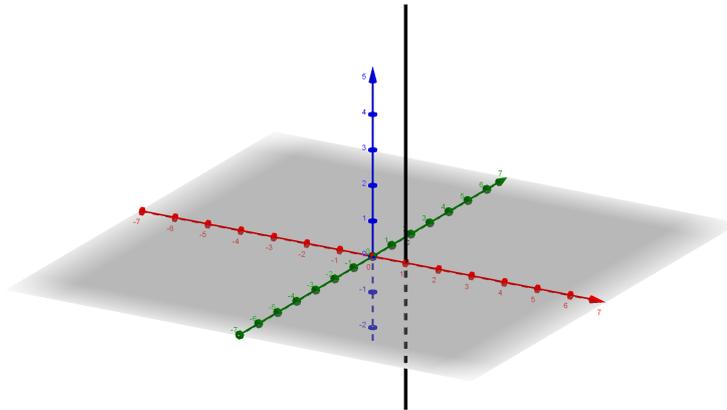


Figura 1: Reta paralela ao eixo Oz.

2. Para $\beta = 0$ a ação de $G_{\alpha,0} = G_{1,0}$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) é a curva

$$\gamma(t) = (x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t), x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t), z_0),$$

ou seja, rotações em torno do eixo z , em que a aplicação de $G_{\alpha,0}$ sobre (x_0, y_0, z_0) é um círculo de raio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e centro $(0, 0, z_0)$.

Exemplo 3.4. Para $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ e $\beta = 0$, obtemos

$$\gamma(t) = (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1),$$

que corresponde ao círculo de centro $(0, 0, 1)$ e raio $\sqrt{2}$.

3. Para $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, seja $\delta = \alpha/\beta$, a ação de $G_{\alpha,\beta} = G_{1,\delta}$ em um ponto (x_0, y_0, z_0) é a curva

$$\gamma(t) = (x_0 \cos(t) - y_0 \sin(t), x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t), z_0 + \delta t),$$

ou seja, trata-se de uma hélice circular em torno do eixo z .

Exemplo 3.5. Para $x_0 = \delta = 1, y_0 = z_0 = 0$, obtemos

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

Os exemplos acima ilustram as órbitas da ação dos subgrupos a 1-parâmetro de isometrias em \mathbb{R}^3 .

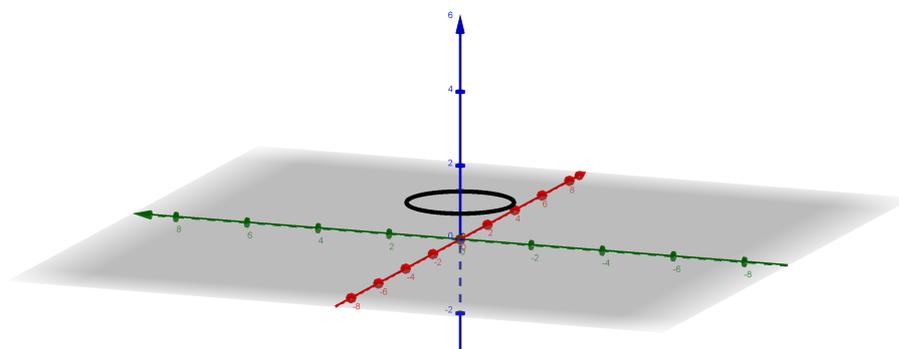


Figura 2: Círculo em torno de z .

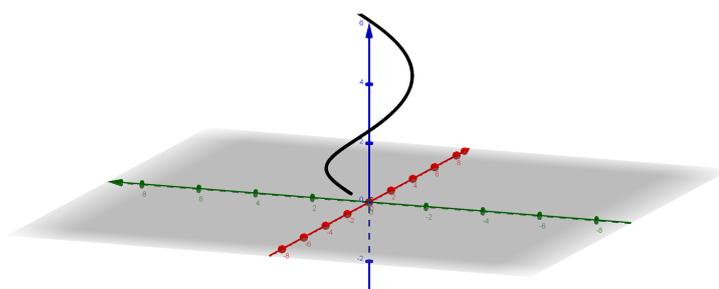


Figura 3: Hélice em torno de z .

Uma aplicação interessante dos subgrupos a 1-parâmetro de $ISO(\mathbb{R}^3)$ é a sua utilização na obtenção de superfícies de curvatura média constante em \mathbb{R}^3 que sejam $G_{\alpha,\beta}$ -invariantes. Dizemos que uma superfície S em \mathbb{R}^3 é invariante por $G_{\alpha,\beta}$ se sua ação em S satisfaz $G_{\alpha,\beta}(S) = S$. De modo que é possível “enxergar” S como a órbita de uma curva (geratriz) γ , assim como ocorre com as superfícies de revolução. Tal abordagem é bem útil, pois o estudo de tais superfícies fica restrito à sua curva geratriz γ . Nos três exemplos a seguir, comentaremos tal estudo, com maior detalhe ao primeiro exemplo, por ser o que possui menos detalhes.

Exemplo 3.6 (Superfícies de Curvatura Média Constante Invariantes por Translações). *A menos de conjugação, uma superfície invariante por translações é do tipo*

$$S = G_{0,\beta}(\gamma) = G_{0,1}(\gamma).$$

Supondo que $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, é uma curva no plano xOy parametrizada pelo comprimento de arco s (i.e, $\gamma'(s)$ é um vetor unitário), então S é uma superfície com parametrização dada por

$$X(s, t) = G_{0,1}(x(s), y(s), 0) = (x(s), y(s), t),$$

o que nos permite deduzir via a expressão da curvatura média que S é uma superfície $G_{0,1}$ -invariante com curvatura média constante H se, e somente se, a curva plana γ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$x'y'' - x''y' = 2H.$$

o primeiro membro da última equação é a curvatura de γ , e é bem conhecido que uma curva plana de curvatura constante é uma reta ou um círculo, portanto uma superfície $G_{0,1}$ -invariante é um plano ou um cilindro circular.

Exemplo 3.7 (Superfícies de Curvatura Média Constante Invariantes por Rotações). *A menos de conjugação, uma superfície invariante por rotações é do tipo*

$$S = G_{\alpha,0}(\gamma) = G_{1,0}(\gamma).$$

Supondo que $\gamma(s) = (x(s), 0, z(s))$, $x(s) > 0$, é uma curva no plano xOz parametrizada pelo comprimento de arco s , então S é uma superfície com parametrização dada por

$$X(s, t) = G_{1,\delta}(x(s), y(s), 0) = (x(s) \cos t, x(s) \sin t, z(s)),$$

logo S é uma superfície $G_{1,0}$ -invariante com curvatura média constante H se, e somente se, a curva geratriz γ satisfaz a seguinte equação diferencial

$$x'z'' - x''z' + \frac{z'}{x} = 2H.$$

A equação acima pode ser remanejada levando a conclusão de que a curva geratriz é a roulette do foco de uma cônica (curvas de Delaunay), para maiores detalhes veja [6] e [7].

Exemplo 3.8 (Superfícies de Curvatura Média Constante Invariantes por Movimentos Helicoidais). *Para o caso das superfícies invariantes por movimentos helicoidais, há a necessidade de garantir que S admite uma parametrização em parâmetros (s, t) tais que as s -curvas são parametrizadas pelo comprimento de arco, e as t -curvas são hélices ortogonais às s -curvas. Tal resultado é garantido pelo Lema 5.0.6 de [6]. De modo que, a menos de conjugação, uma superfície invariante por movimentos helicoidais é dada por*

$$S = G_{\alpha,\beta}(\gamma) = G_{1,\delta}(\gamma), \quad \delta = \beta/\alpha \neq 0.$$

Supondo que $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$, é uma curva no plano xOy parametrizada pelo comprimento

mento de arco s , então S é uma superfície com parametrização dada por

$$X(s, t) = G_{1,\delta}(x(s), y(s), 0) = (x(s) \cos t, x(s) \sin t, y(s) + \delta t).$$

Para $H = H_0 \neq 0$ dada, a expressão da curvatura média de S pode ser trabalhada levando à obtenção de uma aplicação sobrejetiva $\varphi(\theta, B_0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $B_0 \in [0, +\infty)$, no conjunto das superfícies invariantes por movimentos helicoidais com curvatura média constante H_0 . Para maiores detalhes veja [6] e suas referências internas.

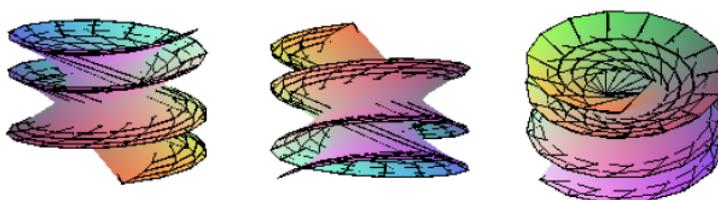


Figura 4: A figura representa uma superfície invariante por movimentos helicoidais e curvatura média $H = cte$.

4 Conclusão

O estudo das matrizes não figuram mais em currículos do Ensino Médio e, quando abordadas, são vistas como uma ferramenta para a resolução de sistemas lineares. Com este trabalho, trazemos mais uma aplicação das matrizes ao estudo de isometrias em \mathbb{R}^3 , bem como introduzimos o conceito de subgrupos a 1-parâmetro às isometrias, sendo este último conceito utilizado no campo da Geometria Diferencial para o estudo de superfícies de curvatura média constante que sejam invariantes por tais subgrupos. Compreendemos que a obtenção de exemplos de aplicações do estudo de matrizes possa fornecer tanto a professores quanto a alunos do Ensino Médio/OBMEP o aprofundamento e a melhoria de seus conhecimentos básicos e introdutórios sobre o assunto. Além disso, ao definir e trabalhar com conceitos básicos de teoria de grupos, possibilitamos aos professores do Ensino Médio, após a leitura desse trabalho, apresentarem aos seus alunos exemplos e uma aplicação a um caso particular envolvendo grupos a 1-parâmetro de isometrias.

Referências

- [1] Ronaldo Freitas Carneiro. Aplicações das Isometrias na Pavimentação do Plano com Polígonos Regulares. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2014.
- [2] Adilson Francisco da Silva. Recorrências lineares, isometria, criptografia e outras aplicações envolvendo matrizes 2 por 2. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2017.
- [3] Felipe de Carvalho Barros. Pavimentações do Plano: Propostas lúdicas de aula. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2016.

- [4] Ivanilton Sales de Jesus. Isometrias no Plano: Uma Abordagem Aplicável ao Ensino Básico. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2017.
- [5] Gabriela Cotrim de Moraes. Isometrias e grupo de friso. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2013.
- [6] Gil Fidelix de Souza. Superfícies em \mathbb{R}^3 de Curvatura Média Constante Invariantes por Subgrupos a 1-Parâmetro de Isometrias. *Dissertação em Matemática, UFMG*, 2005.
- [7] Charles Delaunay. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série*, 1841.
- [8] Elon Lages Lima. *Álgebra linear*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 1995.
- [9] Michel Mir. Uma Abordagem de Isometria em Sala de Aula. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2014.
- [10] Leandro Barbosa Paz. Caracterização das Isometrias no plano através do estudo das Transformações de Möbius. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2013.
- [11] Renato Oliveira Silva. Recorrências lineares, isometria, criptografia e outras aplicações envolvendo matrizes 2 por 2. *Banco de Dissertações do PROFMAT*, 2016.