Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Aplicação do Método de Integração de Newmark na Análise de Flutter de uma Seção Típica no Domínio do Tempo

Cassiano Arruda cassianoarruda@hotmail.com
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil

André Garcia Cunha Filho andregc@gmail.com
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil

Antônio Marcos Gonçalves de Lima amglima@ufu.br
Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil

Resumo

O flutter é um fenômeno altamente destrutivo, passível de ocorrer em sistemas em que estruturas interagem com escoamentos, como por exemplo uma superfície de sustentação, ou a asa de uma avião. Desta interação, surgem a atuação simultânea de três forças na estrutura: elásticas, inerciais e aerodinâmicas, que podem causar o flutter. Neste trabalho, o flutter será estudado utilizando-se a clássica Teoria da Seção Típica, a partir de um modelo contendo dois graus de liberdade (gdl), sendo eles plunge e pitch. Do modelo é definida uma equação do movimento de característica linear, em que diferentes velocidades são analisadas afim de se encontrar a velocidade de flutter. Este processo é feito no domínio do tempo utilizando-se o método de integração numérica de Newmark. Além disso, os resultados obtidos são comparados com outras metodologias.

Palavras-chave

Aeroelasticidade, Método de Newmark, Wagner, flutter.

1 Introdução

Análises aeroelásticas são ferramentas essenciais no projeto de estruturas, pois através das mesmas é possível identificar a possibilidade da ocorrência de flutter e desenvolver soluções para evitá-lo, mitigando assim graves acidentes, como por exemplo o caso da ponte de Tacoma [4], caso em que o fenômeno de ressonância ocorre.

Segundo Wright e Cooper [6], flutter é caracterizado por um acoplamento instável entre a estrutura flexível e o escoamento. Este acoplamento ocorre quando as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas atuam simultaneamente sobre a estrutura. Esta interação é estudada pela aeroelasticidade, cuja ciência é bem representada pelo triângulo de Collar [1], Fig.1, que evidencia relações entre as forças citadas, e as áreas resultantes de estabilidade e controle, dinâmica estrutural e aeroelasticidade estática.

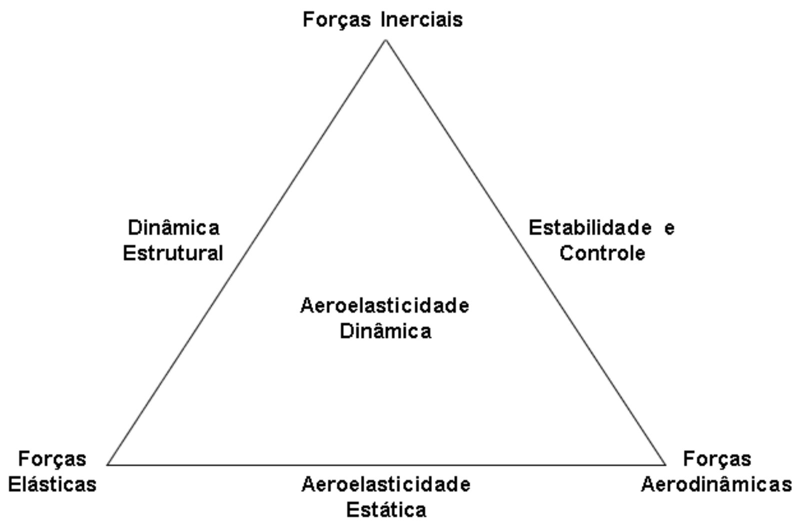

Figure 1: Triângulo de Collar

Para realizar as análises aeroelásticas, é necessário caracterizar o carregamento aerodinâmico presente na asa, revelando-se assim sua influência no comportamento dinâmico da estrutura.

Atualmente existem vários sistemas que representam com fidelidade o perfil sustentador para que esta análise aeroelástica seja feita. Entretanto, grande parte destes apresentam consigo soluções de alto custo computacional e desenvolvimento complexo, sendo então o método da Seção Típica a abordagem mais simples, a qual apresenta grande importância em aplicações de cunho acadêmico. Este sistema tem a capacidade de representar uma asa por meio de elementos discretos de rigidez e massa, quando avaliada a $3/4$ da distância entre a raiz e sua extremidade, de acordo com Theodorsen e Garrick [9], que idealizaram a mesma. Além disso, segundo Bisplinghoff [8], esta aproximação é aceitável para um grande alongamento, perfil fino e quando as seções transversais da asa não variam muito ao longo da corda.

Ademais, Theodorsen [10] propôs uma forma de analisar o carregamento aerodinâmico no aerofólio por meio de singularidades do tipo fonte-sumidouro. Além disso, ele fez uso da vorticidade do escoamento do ar ao redor do aerofólio, o qual gera uma esteira de vórtices a partir do bordo de fuga até o infinito. Este modelo respeita a condição de Kutta, que estabelece que o escoamento deixa o perfil suavemente no bordo de fuga. Com base nestes conceitos, ele representou o carregamento aerodinâmico por uma parcela estacionária e outra não estacionária, sendo esta última responsável por tornar o carregamento dependente do tempo.

Segundo Gefferson [4], a oscilação do perfil gera uma esteira de vórtices alternados que modifica o carregamento aerodinâmico, de tal maneira que as forças de sustentação e arrasto dependam não somente do movimento instantâneo do aerofólio, mas também da posição e intensidade da esteira de vórtices, ou seja, de todo o histórico do movimento. Este histórico é representado na equação da sustentação pela integral de Duhamel.

Wagner [5] estudou a variação da força de sustentação após uma mudança abrupta no ângulo de ataque, e concluiu que a variação abrupta não altera a sustentação do perfil imediatamente, pois existe um atraso para que a mesma atinja o valor máximo. Este efeito é representado pela função de Wagner, $\Phi(s)$.

Existem diversas metodologias para se analisar o carregamento aerodinâmico de uma seção típica, o método a ser utilizado neste trabalho segue a teoria proposta por Wagner e faz uso dos estados de atraso. Estes influenciam no valor da sustentação de maneira que a mesma não responda de instantaneamente a uma súbita mudança no ângulo de ataque. Além disso, os mesmos fazem com que o sistema aumente de dois graus de liberdade.

Nesta abordagem, a equação do movimento resultante da seção típica será resolvida através do método de integração de Newmark. O mesmo possibilita integrar diretamente uma equação diferencial de segunda ordem, que é o caso da equação do movimento considerando-se o carregamento aerodinâmico não-estacionário.

2 Metodologia

2.1 Seção Típica

Conforme o ar escoa pela asa do avião, um campo de pressão $(p(x, y, t))$ é criado sobre a superfície. Integrando-se este campo de pressão ao longo da corda do perfil, uma força resultante age sobre o eixo aerodinâmico (CP), a qual pode ser decomposta na força de sustentação, (L), e na força de arrasto, (D). A força de sustentação é o carregamento aerodinâmico, já que a força de arrasto não é considerada neste tipo de análise. Sendo assim, o eixo aerodinâmico pode não ser coincidente com o centro de gravidade e com o eixo elástico, e como resultado, um momento (M) é criado em torno do eixo elástico.

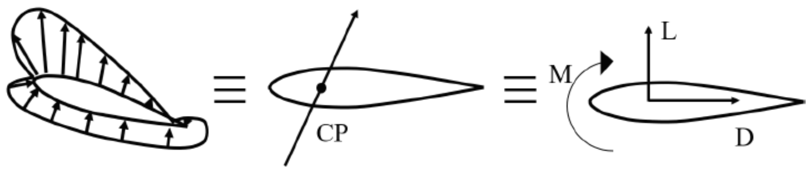

Figure 2: Carregamento Aerodinâmico

Existem diversos métodos de se estudar o carregamento aerodinâmico, talvez o mais simples seja o sistema da seção típica, a qual é uma representação bidimensional de uma asa, através de uma discretização por meio de elementos de massa e rigidez. Assim, toda a estrutura tridimensional é representada por um sistema com dois graus de liberdade, os quais são o *"Plunge"*, (h), que é uma translação na direção transversal, e o *"Pitch"*, (θ), que é a rotação ao redor do eixo elástico. A figura a seguir apresenta uma seção típica com 2 GDL, a qual foi retirada da tese de doutorado (Cunha Filho, 2019) [2].

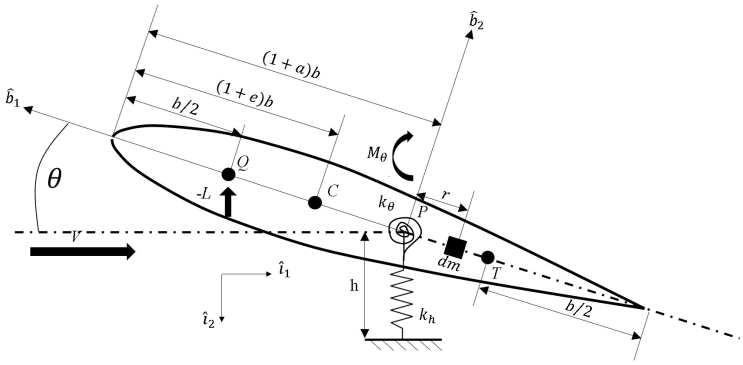

Figure 3: Seção Típica com 2 GDL

Onde o ponto, C, é o centro de massa, P, é o eixo elástico, T, é o ponto de referência distanciado de três quartos de corda do bordo de fuga e, Q, é o eixo aerodinâmico. Os eixos, $\hat{\imath}_{1,2}$, são os eixos inerciais, $\hat{b}_{1,2}$, são os não-inerciais e o momento é M_θ. Os parâmetros, k_h, e k_θ representam a rigidez de "*Plunge*" e a rigidez de "*Pitch*", respectivamente. Além disso, a e e são parâmetros para determinar a posição de C e P, enquanto que a distância, r, é a distância da massa infinitesimal, dm, do eixo elástico.

Para analisar a velocidade de flutter segundo a abordagem do domínio do tempo, neste trabalho é utilizada uma seção típica com propriedades obtidas através de um ajuste de curva, com base em um aparato do laboratório de estruturas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Este aparato representa a seção típica e consiste em uma seção de asa rígida retangular acoplada ao PAPA (*Pitch and Plunge Apparatus*), o qual proporciona dois graus de liberdade ao sistema. A asa possui um perfil NACA 0012 fabricado em fibra de carbono e preenchida com resina e, apesar de possuir uma superfície de controle, a mesma é travada na base da asa. Este aparato experimental está presente na Fig. 4, retirada da tese de doutorado (Cunha Filho, 2019) [2].

$$\rho = 1.225 \quad kg/m^3 \tag{1a}$$

$$b = 0.127 \quad m \tag{1b}$$

$$a = -0.15 \quad m \tag{1c}$$

$$\omega_h = 55.9 \quad rad/s \tag{1d}$$

$$\omega_\theta = 64.1 \quad rad/s \tag{1e}$$

$$x_\theta = 0.25 \quad m \tag{1f}$$

$$r_\theta^2 = 0.623 \quad m \tag{1g}$$

$$\mu = 76 \tag{1h}$$

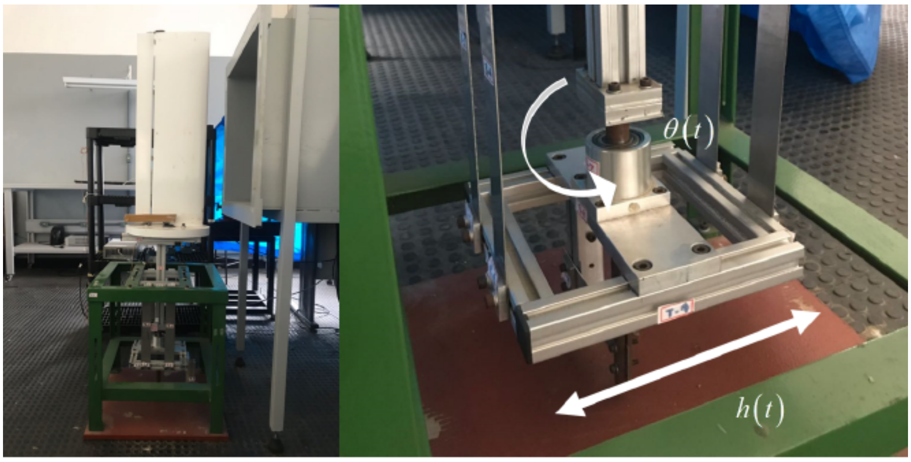

Figure 4: Fotos do PAPA

Sendo "ρ" a densidade do escoamento não perturbado, "b" a semicorda, "a" a distância de metade da corda até o centro elástico (P), "ω_θ" a frequência natural de torção, “x_θ” a distância de (P) a (C), “r_θ^2” o raio de giração e “μ” a razão de massa.

2.2 Equações do Movimento

Para caracterizarmos o movimento da seção típica, representada na Fig. 3, será utilizada a mecânica Lagrangiana, que é representada pela Eq. (2).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{q}\}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\{q\}} + \frac{\partial U}{\partial\{q\}} + \frac{\partial D}{\partial\{\dot{q}\}} = \frac{\partial \delta\left\{W\right\}}{\partial \delta\left\{q\right\}} = \{Q\} \tag{2}$$

Onde T é a energia cinética total do sistema, U é a energia potencial total, D é a energia dissipativa, $\{q\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas e $\delta\left\{W\right\}$ é o vetor que contém o trabalho virtual devido aos esforços externos.

A seguir o cálculo de todas energias e do trabalho virtual devido aos esforços externos.

2.2.1 Energia Cinética (T)

Para avaliar a energia cinética do sistema utilizando-se o elemento infinitesimal de massa, as parcelas relativas aos movimentos de plunge, h, e pitch, θ, são calculadas.

$$dT_h = \frac{1}{2}dm[\dot{h} + (x - ba)] \tag{3a}$$

$$dT_\theta = \frac{1}{2}dm[\ddot{h}^2 + (x - ba)^2\theta^2 + 2(x - ba)\dot{h}\dot{\theta}] \tag{3b}$$

Desta maneira, a energia cinética total da seção típica é obtida pela soma das integrais ao longo da corda das parcelas infinitesimais.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + \dot{h}\dot{\theta}S_\theta + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_\theta \tag{4}$$

Sendo,

$$S_\theta = \int_{-b}^{b} (x - ba) dm \tag{5a}$$

$$I_\theta = \int_{-b}^{b} (x - ba)^2 dm \tag{5b}$$

Onde S_θ e I_θ são respectivamente o produto de inércia e o momento de inércia em torno do centro elástico.

2.2.2 Energia Potencial U

A energia potencial é calculada a partir dos elementos de rigidez discretos, os quais são determinados com base no aparato experimental PAPA.

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \tag{6a}$$

$$U = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2 \tag{6b}$$

Onde k_h corresponde à constante elástica associada á rigidez na translação, enquanto k_θ corresponde à constante elástica associada á rigidez na rotação.

2.2.3 Energia Dissipativa D

A energia dissipativa associada a cada grau de liberdade é representada como:

$$D = \frac{1}{2} c_h \dot{h}^2 + \frac{1}{2} c_\theta \dot{\theta}^2 \tag{7}$$

Sendo c_h e c_θ os amortecimentos estruturais relacionados aos modos de translação e torção, respectivamente. Os mesmos podem ser escritos como:

$$c_h = 2m\zeta_h\omega_h \tag{8a}$$

$$c_\theta = 2I_\theta\zeta_\theta\omega_\theta \tag{8b}$$

Sendo ζ o coeficiente de amortecimento e ω as frequências de vibração associadas aos modos de translação e torção.

Desta maneira, realizando-se as derivadas em relação às coordenadas generalizadas h e θ, a Eq. (2) pode ser reescrita como em (9).

$$m\ddot{h} + S_\theta\ddot{\theta} + k_h h + c_h\dot{h} = Q_h \tag{9a}$$

$$S_\theta\ddot{h} + \ddot{\theta}I_\theta + k_\theta\theta + c_\theta\dot{\theta} = Q_\theta \tag{9b}$$

A qual pode ser reescrita na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_h \\ Q_\theta \end{Bmatrix} \tag{10}$$

Utilizando-se o princípio do trabalho virtual, é possível escrever a força generalizada como:

$$Q_i = \frac{\partial\delta W}{\partial\delta q_i} \tag{11}$$

Sendo δW o trabalho resultante de um deslocamento virtual para a coordenada generalizada δq_i, este trabalho é consequência da pressão $p(x, y, t)$, devido à uma massa de ar, sobre a superfície da asa.

$$\delta W = \int_0^b \int_{-c/2}^{-c/2} p(x, y, t)\delta z(x, y, t)dxdy \tag{12}$$

Onde c é a corda da seção, b é a semi-corda e $\delta z(x, y, t)$ é o deslocamento na direção normal à superfície da asa. Este deslocamento pode ser escrito como a soma dos deslocamentos lineares.

$$\delta z(x,y,t) = -\delta h(t) - (x - ba)\delta\theta(t) \tag{13}$$

Assim, as forças generalizadas podem ser reescritas como:

$$Q_h = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta h} = \frac{\partial}{\partial \delta h}\left[-\int_0^b \int_{-c/2}^{-c/2} p(x,y,t)(\delta h(t) + (x - ba)\delta\theta(t))dxdy\right] = -\int_0^b \int_{-c/2}^{-c/2} p(x,y,t)dxdy = -L \tag{14a}$$

$$Q_\theta = \frac{\partial \delta W}{\partial \delta \theta} = \frac{\partial}{\partial \delta \theta}\left[-\int_0^b \int_{-c/2}^{-c/2} p(x,y,t)(\delta h(t) + (x - ba)\delta\theta(t))dxdy\right] = -\int_0^b \int_{-c/2}^{-c/2} p(x,y,t)(x - ba)dxdy = M_{ea} \tag{14b}$$

Sendo L a força de sustentação e M_{ea} o momento de arfagem em torno do eixo elástico. Finalmente, a Eq. do movimento pode ser descrita em sua forma matricial compacta.

$$M\begin{Bmatrix}\ddot{h}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + C\begin{Bmatrix}\dot{h}\\ \dot{\theta}\end{Bmatrix} + K\begin{Bmatrix}h\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-L\\ M_{ea}\end{Bmatrix} \tag{15}$$

Onde, M a matriz de massa, C a matriz de amortecimento e K a matriz de rigidez.

$$M = \begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \tag{16a}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \tag{16b}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \tag{16c}$$

Além disso, juntamente das equações do movimento obtidas são necessários os carregamentos aerodinâmicos para caracterizarem por completo o modelo dinâmico da seção típica.

2.3 Carregamento Aerodinâmico

De acordo com Silva [4], para descrever a força devido à distribuição de potencial do tipo fonte-sumidouro, Bisplinghoff [8] utiliza o modelo de Thodorsen [10] já citado, onde o deslocamento do perfil é utilizado como condição de contorno na equação de Laplace para um escoamento incompressível. Utilizando a equação de Bernoulli e integrando a distribuição de pressão $(p(x, y, t))$ sobre o aerofólio, a força de sustentação (L) e o momento de arfagem (M_{ea}) são determinados como a seguir.

$$L = L^{(nc)} + 2\pi\rho V b Q \frac{\int_b^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \gamma_w(x,t)dx}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} \gamma_w(x,t)dx} \tag{17a}$$

$$M_{ea} = M_{ea}^{(nc)} - 2\pi\rho V b^2 Q \left(\frac{1}{2} - \left(a + \frac{1}{2}\right) \frac{\int_b^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \gamma_w(x,t)dx}{\int_b^\infty \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} \gamma_w(x,t)dx} \right) \tag{17b}$$

Onde $\gamma_w(x, t)$ é a circulação da esteira de vórtices, V é a velocidade do escoamento, $L^{(nc)}$ e $M_{ea}^{(nc)}$ são a força de sustentação e o momento de arfagem devido à parcela não-circulatória do escoamento.

$$L^{(nc)} = \pi b^2 \rho \left(\ddot{h} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta} \right) \tag{18a}$$

$$M_{ea}^{(nc)} = \pi b^2 \rho \left(V\dot{h} + ba\ddot{h} + V^2\theta - b^2 \left(\frac{1}{8} - a^2 \right) \ddot{\theta} \right) \tag{18b}$$

Sendo Q o *Downwash* definido por Theodorsen [10] a partir do bordo de ataque, e é positivo se o perfil se move para baixo.

$$Q = \frac{1}{2\pi b} \int_b^\infty \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} \gamma_w(x,t) dx = V\theta + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \tag{19}$$

Para abordar o problema no domínio do tempo, Wagner [5] interpretou a formulação proposta por Theodorsen e estabeleceu expressões que representam o padrão de vórtice do escoamento da esteira e determinam a distribuição de pressão no perfil, possibilitando evidenciar-se a força de sustentação e o momento de arfagem. Esta função que caracteriza o carregamento aerodinâmico é denominada função de Wagner $\Phi(s)$ e é função do tempo admissional s que representa a medida de semi cordas viajada pela esteira após deixar o bordo de fuga.

$$s = \frac{Vt}{b} \tag{20}$$

Considerando uma mudança repentina no *Downwash*(Q) na posição da seção típica ($3/4$ da corda) os carregamentos são:

$$L^{(c)} = 2\pi\rho V b Q \Phi(s) \tag{21a}$$

$$M_{ea}^{(c)} = -2\pi\rho V b^2 Q \frac{1}{2} + 2\pi\rho V b^2 Q \left(- \left[a + \frac{1}{2} \right] \right) \Phi(s) \tag{21b}$$

Uma aproximação para a função de Wagner foi sugerida por Jones [4].

$$\Phi(s) = 1 - 0.165e^{-0.041s} - 0.335e^{-0.32s} \tag{22}$$

Esta formulação apresentada refere-se à uma mudança abrupta no perfil sustentador, para generalizar a equação de modo a representar o carregamento aerodinâmico devido a um movimento arbitrário da asa, é assumida a superposição de infinitesimais degraus no *Downwash*. Segundo Bisplinghoff [8], a sustentação referente à parcela circulatória é obtida a partir da soma, em função do tempo, de todas as contribuições do carregamento, resultando finalmente na integral de Duhamel.

$$L^{(c)}(t) = 2\pi\rho V b\left[Q(t_0)\Phi(s) + \int_{\tau=t_0}^{t}\frac{dQ(\tau)}{d\tau}\Phi(t-\tau)d\tau\right] \tag{23a}$$

$$M_{ea}^{(c)} = -2\pi\rho V b^2 Q\frac{1}{2} + \left[a + \frac{1}{2}\right]L^{(c)}(t) \tag{23b}$$

Onde a integral de convolução corresponde a soma das contribuições na sustentação do instante $\tau = t_0$ até $\tau = t$, e τ representa o tempo em que são somados os degraus infinitesimais no *Downwash*.

Considerando uma condição inicial estacionária para os carregamentos, ou seja, assumindo $Q(t_0) = 0$, a Eq. (23a) é simplificada.

$$L^{(c)}(t) = 2\pi\rho V b\int_{\tau=t_0}^{t}\frac{dQ(\tau)}{d\tau}\Phi(t-\tau)d\tau \tag{24}$$

2.4 Análise de *Flutter* - Domínio do Tempo

Uma forma de simplificar a integral de Duhamel é considerar os estados de atraso, como mostrado a seguir.

$$\int_{\tau=t_0}^{t}\frac{dQ(\tau)}{d\tau}\Phi(t-\tau)d\tau = Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t) \tag{25}$$

Sendo que "$\lambda_1(t)$" e "$\lambda_2(t)$" representam os atrasos devido a variação no *downwash* em $3/4$ da corda e a variação na sustentação do perfil. Estes termos representam dois graus de liberdade adicionais para o sistema, e podem ser determinados utilizando-se as seguintes equações, sendo "$\dot{Q}$" a taxa de variação do *downwash*.

$$\dot{\lambda}_1(t) = -0.041\left(\frac{V}{b}\right)\lambda_1(t) - 0.165\dot{Q}(t) \tag{26a}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -0.032\left(\frac{V}{b}\right)\lambda_2(t) - 0.335\dot{Q}(t) \tag{26b}$$

Incorporando-se os termos referentes aos estados de atraso para simplificar a integral de Duhamel, a sustentação e o momento de arfagem da seção típica são representados pela soma das parcelas circulatórias (Eqs.(23a) e (23b)) e não circulatórias (Eqs.(18a) e (18b)).

$$L(t) = \pi b^2\rho\left(\ddot{h} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}\right) + 2\pi\rho V b\left[Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t)\right] \tag{27}$$

$$\begin{aligned} M_{ea}(t) = \pi b^2\rho\left(V\dot{h} + ba\ddot{h} + V^2\theta - b^2\left(\frac{1}{8} - a^2\right)\ddot{\theta}\right) - \pi\rho V b^2 Q \\ + \left[a + \frac{1}{2}\right]2\pi\rho V b\left[Q(t) + \lambda_1(t) + \lambda_2(t)\right] \end{aligned} \tag{28}$$

As mesmas são escritas na forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} -L \\ M_{ea} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \tag{29}$$

Os estados de atraso aerodinâmicos podem ser escritos na forma matricial utilizando-se as Eqs. (26a) e (26b), de modo que as matrizes aerodinâmicas,

"$\Big[b_n\Big]$", são apresentadas no Apêndice A.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} = \Big[b_1\Big] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \Big[b_2\Big] \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \Big[b_3\Big] \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} + \Big[b_4\Big] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

Substituindo-se a equação do movimento, Eq. (15), na Eq. (29), obtêm-se o movimento da seção típica acrescido do carregamento aerodinâmico não-estacionário.

$$([M] - [a_1]) \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + ([C] - [a_2]) \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + ([K] - [a_3]) \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = [a_4] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \tag{31}$$

A qual pode ser rearranjada com a Eq. (30).

$$\begin{bmatrix} [\bar{M}] & [0] \\ -[b_1] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\lambda}_1 \\ \ddot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{C}] & [0] \\ -[b_2] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\bar{K}] & -[a_4] \\ -[b_3] & -[b_4] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{32}$$

Esta equação pode ser resolvida através do método de integração de Newmark, obtendo-se os deslocamentos, velocidades e acelerações dos quatro graus de liberdade $(h,\, \theta,\, \lambda_1 \; e \; \lambda_2)$. O sistema é submetido à uma configuração inicial não inercial, o qual é amortecido em velocidades subcríticas, mas na velocidade crítica de flutter não há amortecimento. Sendo assim, o movimento de *plunge*, "$h(t)$", é analisado com o intuito de se encontrar a velocidade que torna o sistema conservativo.

2.5 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Com o intuito de compreender o método de integração de Newmark, o qual é uma boa alternativa para analisar o *flutter* no domínio do tempo, primeiramente aplicou-se este método em um sistema simples Massa-Mola-Amortecedor.

2.5.1 1 Grau de Liberdade

Assumindo-se um sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade, como mostrado na Fig. 5, o sistema de massa, rigidez e amortecimento promove um movimento oscilatório.

O comportemanto do sistema é descrito por uma equação diferencial ordinária, apresentada na Eq. (33), que será resolvida utilizando-se o método de integração de Newmark e também a função *ode45* do software Matlab.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{33a}$$

$$F(t) = sin\,(\omega t) \tag{33b}$$

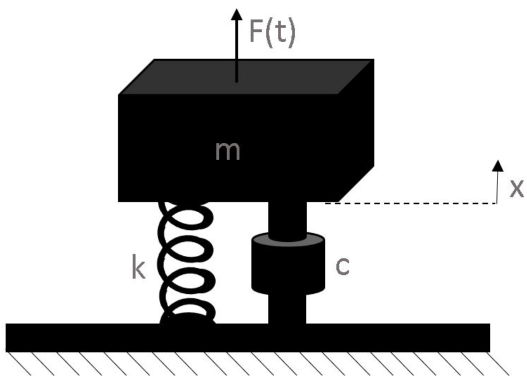

Figure 5: Sistema Massa-Mola-Amortecedor - 1 GDL

Onde "m" é a massa, "c" é o amortecimento, "k" é a constante elástica da mola, "x" é a posição do corpo, "F" é uma força externa, "t" é o tempo, e sendo $m = 3\ kg$, $k = 1000\ N/m$, $c = 6\ Ns/m$, $x = 0.2\ m$, $\dot{x} = 0\ m/s$, $\ddot{x} = 0\ m/s^2$ e $\omega = 20\pi$.

De acordo com Bathe [7], o método de Newmark é uma extensão do método da aceleração linear e utiliza parâmetros, (α) e (δ), que são determinados para obter precisão e estabilidade de integração, sendo que Newmark propôs utilizar

$\alpha = 1/4$ e $\delta = 1/2$. A lógica deste método é utilizar condições iniciais para calcular os valores no instante seguinte, cujo passo de tempo é sempre Δt. A equação diferencial ordinária é reescrita na Eq. (34).

$$M\ddot{x}\left(t+\Delta t\right)+C\dot{x}\left(t+\Delta t\right)+Kx\left(t+\Delta t\right)=F((t+\Delta t)) \tag{34}$$

Para resolver esta equação, os seguintes coeficientes do método de Newmark são necessários.

$$\delta \geqslant 0.5 \tag{35a}$$

$$\alpha \geqslant 0.25\left(0.5+\delta^{2}\right) \tag{35b}$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \tag{35c}$$

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \tag{35d}$$

$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t} \tag{35e}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1 \tag{35f}$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1 \tag{35g}$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right) \tag{35h}$$

$$a_6 = \Delta t\left(1-\delta\right) \tag{35i}$$

$$a_7 = \delta \Delta t \tag{35j}$$

E as seguintes equações são utilizadas, em que “$_e$” significa efetivo.

$$K_e = k + a_0 M + a_1 C \tag{36a}$$

$$F_e(t+\Delta t) = F(t+\Delta t) + M\left(a_0 x(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_3 \ddot{x}(t)\right) + \\ C\left(a_1 x(t) + a_4 \dot{x}(t) + a_5 \ddot{x}(t)\right) \tag{36b}$$

$$K_e x(t+\Delta t) = F_e(t+\Delta t) \tag{36c}$$

$$\ddot{x}(t) = a_0\left(x(t+\Delta t) - x(t)\right) a_2 \dot{x}(t) - a_3 \ddot{x}(t) \tag{36d}$$

$$\dot{x}(t+\Delta t) = \dot{x}(t) + a_6 \ddot{x}(t) + a_7 \ddot{x}(t+\Delta t) \tag{36e}$$

O diagrama de blocos apresenta a lógica do método de integração de Newmark, apresentado na Fig. 6.

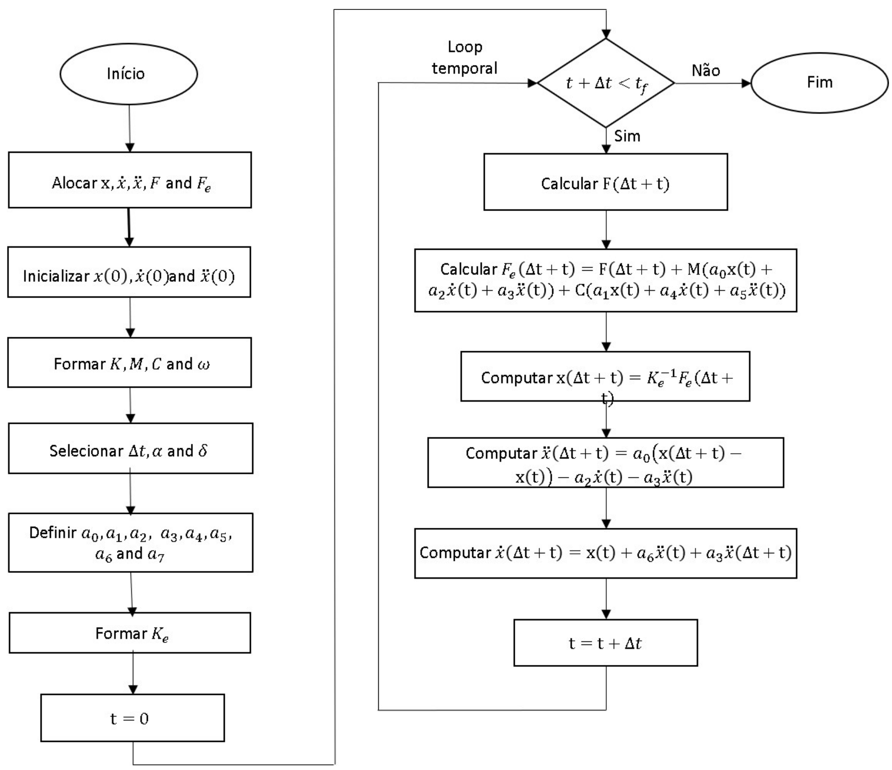

Figure 6: Diagrama de Blocos do método de Newmark

Além disso, a função do Matlab *ode45* é capaz de resolver este problema, então a mesma será utilizada para validar o modelo feito através do método de Newmark. Para tanto, é necessário reduzir a ordem da equação, então a Eq. (33) é reescrita como a seguir.

$$x_1 = x \tag{37a}$$

$$x_2 = \dot{x} \tag{37b}$$

$$\dot{x_1} = x_2 = \dot{x} \tag{37c}$$

$$\dot{x_2} = \frac{F(t) - cx_2 - kx_1}{m} \tag{37d}$$

2.5.2 3 Graus de Liberadade

O método de Newmark foi utilizado também para resolver a equação do sistema Massa-Mola-Amortecedor com 3 graus de liberdade, como mostrado na Fig. 7.

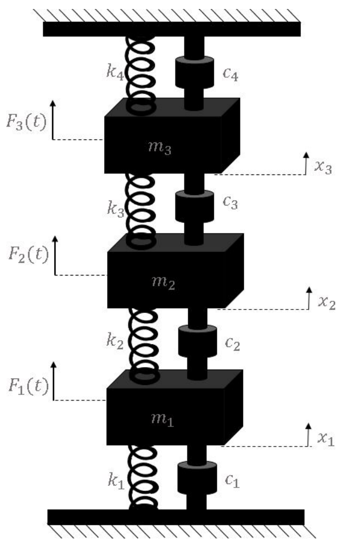

Figure 7: Sistema Massa-Mola-Amortecedor - 3 GDL

A equação diferencial é a mesma que a do caso passado, as diferenças estão nas matrizes de massa, amortecimento e rigidez.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \tag{38}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x_1}(t) \\ \ddot{x_2}(t) \\ \ddot{x_3}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \\ \dot{x_3}(t) \end{Bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

3 Resultados

3.1 Sistema Massa-Mola-Amortecedor

3.1.1 1 Grau de Liberdade

A Figura 8 mostra a posição do bloco pelo tempo, comparando os resultados obtidos pelo método de Newmark e também pela função *ode45*. É possível notar que ambos os métodos convergem, validando a formulação do método de integração de Newmark utilizada.

3.1.2 3 Graus de Liberadade

Para o caso de 3 graus de liberdade, as posições dos blocos foram analisadas em função do tempo, como representado na Fig. 9.

3.2 Análise de *Flutter* - Domínio do Tempo

Através da integração de Newmark, foram obtidos os deslocamentos, velocidades e acelerações correspondentes aos dois graus de liberdade da seção típica em questão. Variando-se a velocidade, foi possível obter os gráficos presentes nas figuras a seguir, as quais apresentam o deslocamento, "h", pelo tempo. No

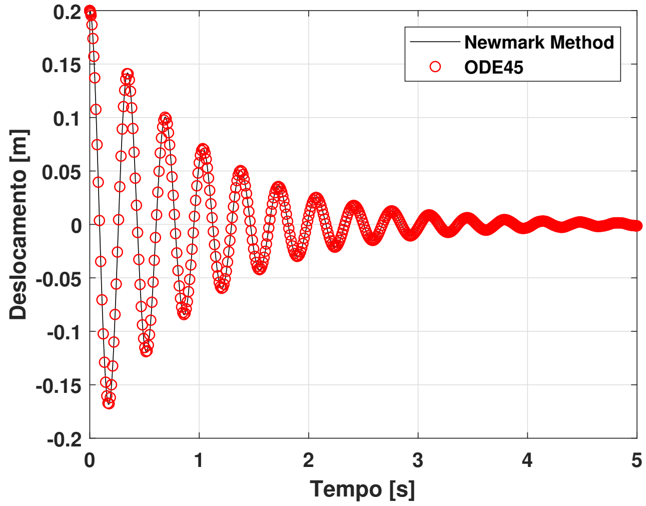

Figure 8: Posição do Bloco - 1 GDL

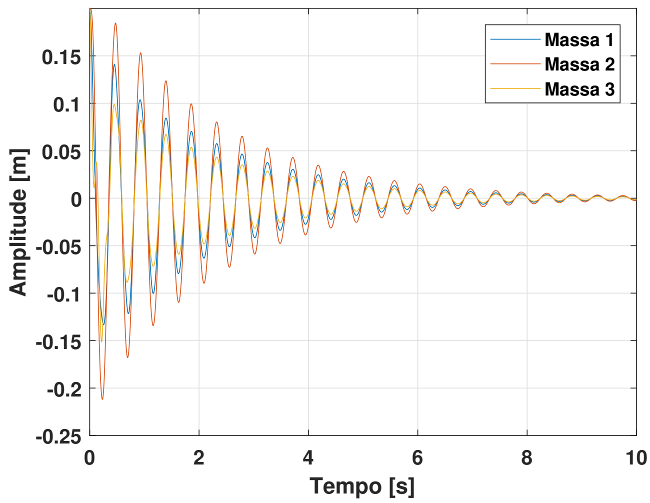

Figure 9: Posições dos Blocos - 3 GDL

primeiro gráfico, Fig. 10, a velocidade é subcrítica e corresponde à $27.37\ m/s$, é possível notar que a amplitude é reduzida com o amortecimento fornecido pelo fluido. Em seguida, na Fig. 11, a velocidade é crítica e corresponde à $27.38\ m/s$, onde o sistema é conservativo, caracterizando o *flutter* já que não há amortecimento. Finalmente, na Fig. 12 a velocidade é supercrítica e corresponde à $27.39\ m/s$, onde nota-se a inserção de energia no sistema.

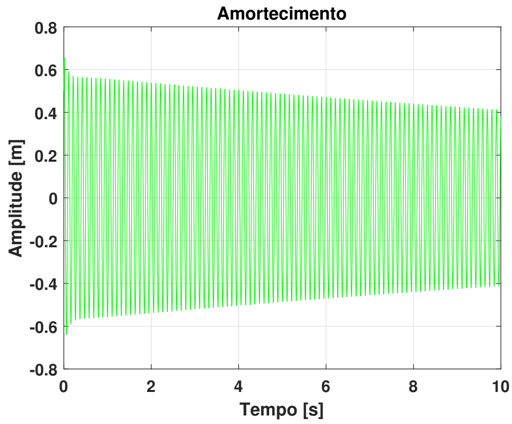

Figure 10: Velocidade = $27.37\ m/s$

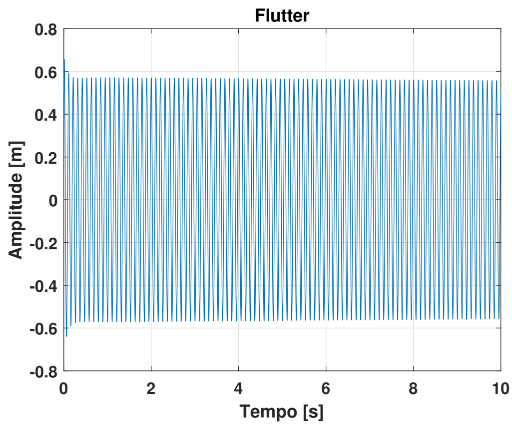

Figure 11: Velocidade = $27.38\ m/s$

Sendo assim, a velocidade de flutter encontrada para esta abordagem considerando-se os estados de atraso foi de $27.38\ m/s$. As curvas a seguir, contidas na Figs. (13) e (14), foram retiradas de (Arruda, 2019) [3], e representam os resultados obtidos para a mesma seção típica, através do método k, cuja velocidade de flutter encontrada foi de $27.558\ m/s$, e pelo método p-k, em que foi de $27.838\ m/s$.

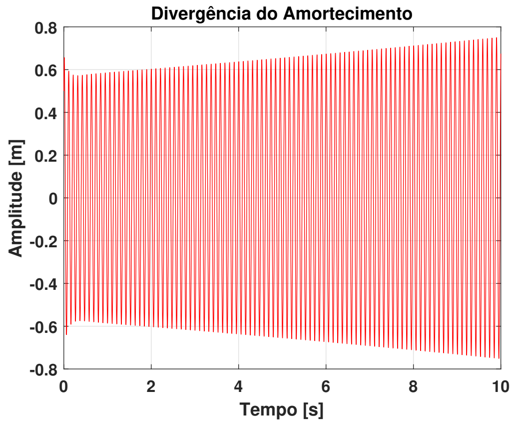

Figure 12: Velocidade = $27.39\ m/s$

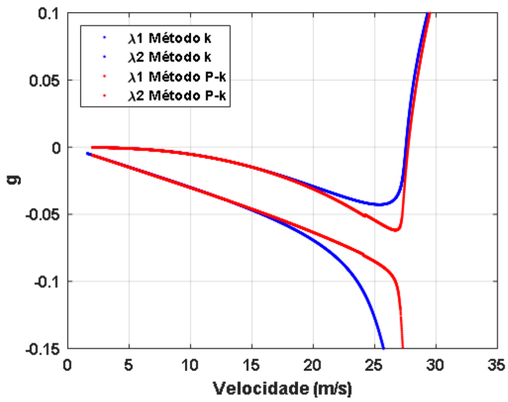

Figure 13: Amortecimento

4 Conclusão

O método de integração de Newmark é uma ferramenta bem adaptada para resolução de equações diferenciais de segunda ordem, o qual apresentou aplicabilidade na formulação de Wagner considerando-se os estados de atraso. Além disso, o método convergiu para resultados muito próximos aos obtidos pelos métodos mais tradicionais no domínio da frequência.

Futuramente, espera-se desenvolver a formulação de uma seção típica amortecida viscoelasticamente, com o objetivo de analisar os efeitos do material viscoelástico no sistema.

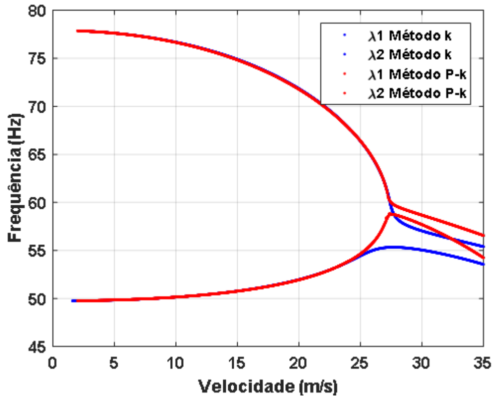

Figure 14: Frequência

5 Agradecimentos

Agradeço aos orientadores André Garcia Cunha Filho e Antônio Marcos Gonçalves de Lima, ao Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis, à Universidade Federal de Uberlândia e à FAPEMIG, pelo suporte ao longo desta pesquisa.

References

[1] Collar A. **The first fifty years of aeroelasticity**. 1978.

[2] Cunha-Filho A. G. **Abordagem Transiente sobre os Efeitos do Amortecimento Viscoelástico na Estabilidade Aeroelástica de Estruturas Aeronáuticas**. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia. 2019. [recurso eletrônico] Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2019.2208.

[3] Arruda C., Cunha-Filho A. G., and Lima A. M. G. **Aplicação dos Métodos k e p-k em uma Seção Típica com 2 GDL**. 2019.

[4] Silva G. C. **Sistemas de Controle Ativo e Passivo para Supressão de Flutter de uma Seção Típica**. mathesis, 2016.

[5] Wagner H. **Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln**. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechan-*

ics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 5(1):17–35, 1925.

[6] Wright J. R. and Cooper J. E. ***Introduction to aircraft aeroelasticity and loads***, volume 20. John Wiley & Sons, 2015.

[7] Bathe K. ***Finite element procedures***. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

[8] Bisplinghoff R. L. and Ashley H. ***Principles of aeroelasticity***. Courier Corporation, 2013.

[9] Theodorsen T. and Garrick I. E. **NACA Report 685. Mechanism of flutter, a theoretical and experimental investigation of the flutter problem**. 1940.

[10] Theodorsen T. and Mutchler W. H. **General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter**, 1935.

A Matrizes Aerodinâmicas - Domínio do Tempo

As matrizes aerodinâmicas utilizadas na formulação do carregamento aerodinâmico não-estacionário no domínio do tempo, para a seção típica de 2 GDL são apresentadas a seguir. As matrizes a_i correspondem à soma de suas parcelas não circulatórias com suas parcelas circulatórias.

$$a_1^{(nc)} = \begin{bmatrix} -\pi b^2 \rho & \pi b^3 \rho a \\ \pi b^3 \rho a & -\pi b^4 \rho \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \end{bmatrix} \tag{40a}$$

$$a_2^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi b^2 \rho V \\ \pi b^2 \rho V & 0 \end{bmatrix} \tag{40b}$$

$$a_3^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi b^2 \rho V^2 \end{bmatrix} \tag{40c}$$

$$a_4^{(nc)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{40d}$$

$$a_1^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$a_2^{(c)} = \begin{bmatrix} -2\pi \rho V b & -2\pi \rho V b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \\ -\pi \rho V b^2 + 2b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho V & \left[-\pi \rho b^3 + 2b^3 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho \right] V \left(\frac{1}{2} - a \right) \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$a_3^{(c)} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi b \rho V^2 \\ 0 & -\pi b^2 \rho V^2 + 2b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho V \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$a_4^{(c)} = \begin{bmatrix} -2\pi b \rho V & -2\pi b \rho V \\ 2b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho V & 2b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \pi \rho V \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} -0.165 & -0.165b\left(\dfrac{1}{2} - a\right) \\ -0.335 & -0.335b\left(\dfrac{1}{2} - a\right) \end{bmatrix} \tag{45a}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.165V \\ 0 & -0.335V \end{bmatrix} \tag{45b}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{45c}$$

$$b_4 = \begin{bmatrix} -0.041\dfrac{V}{b} & 0 \\ 0 & -0.320\dfrac{V}{b} \end{bmatrix} \tag{45d}$$