Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Sobre os Teoremas de Ponto Fixo de Boyd-Wong e Vittorino Pata

Deberton Moura de Oliveira deberton.mo@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Wenderson Marques Ferreira wmf@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Eder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

O principal objetivo desse trabalho foi o estudo de resultados de existência e unicidade de ponto fixo nos quais as funções envolvidas sejam contrações fracas, ao invés de contrações (hipótese exigida no clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach). Dessa forma, foram estudados o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, publicado em 1969, e o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata, obtido em 2011. Os Teoremas de Banach, Boyd-Wong e Vittorino Pata foram comparados entre si e foi apresentado um exemplo no qual se exibiu uma função que satisfaz as condições do Teorema de Boyd-Wong e não satisfaz as hipóteses do Teorema de Banach. Além disso, provou-se que, em Espaços Métricos limitados, os Teoremas de Boyd-Wong e Vittorino Pata são equivalentes, bem como apresentou-se um exemplo de uma função definida em um espaço ilimitado no qual são satisfeitas somente as condições do resultado de Vittorino Pata, mas os Teoremas do Ponto Fixo de Banach e Boyd-Wong não são aplicáveis.

Palavras-chave

Pontos Fixos, Contração, Contração Fraca, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata.

1 Introdução

A Teoria dos Pontos Fixos e suas aplicações é uma importante ferramenta matemática. Seus principais teoremas estabelecem condições que nos permitem garantir a existência de pontos fixos para funções e sua aplicação ocorre em diversas áreas como a biologia, física, química, engenharia, economia e, obviamente, matemática. Especificamente nessa última área, a teoria é particularmente de grande importância para se garantir a existência e, às vezes, a unicidade de solução de equações diferenciais ou no estudo de sistemas dinâmicos. Devido à importância dessa Teoria, existe uma revista especializada somente em publicações relacionadas à área, o *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, no qual foi publicado o artigo [7], uma das principais referências deste texto.

A próxima seção deste trabalho apresenta o Teorema do Ponto Fixo de Banach, obtido por Stefan Banach em 1922. Esse teorema é um resultado extremamente importante na Teoria de Pontos Fixos e apresenta como hipótese que a função considerada seja uma contração e, com isso, garante a existência e a unicidade de ponto fixo. A hipótese que a função seja uma contração pode restringir sua aplicação e, visando obter resultados que podem ser aplicados a contrações fracas, foram estudados os teoremas apresentados nas seções 3 e 4: O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong (ver [2]) e o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata (ver [7]). Ambos os teoremas ainda garantem a existência e unicidade do ponto fixo e foram comparados aos resultados previamente estudados: o teorema de Boyd-Wong foi comparado com o teorema de Banach e o teorema de Vittorino Pata foi comparado com os resultados de Boyd-Wong e Banach. Ao longo do texto, exemplos que ilustram as comparações citadas serão apresentados.

O conteúdo deste trabalho pode ser visto com mais detalhes em [6]. Também em [5, 6] podem ser vistos resultados sobre espaços métricos que serão importantes em nosso texto. Outros teoremas sobre ponto fixo podem ser vistos, por exemplo, em [8, 9].

2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Iniciemos por apresentar o clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 1. ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** *Se M for um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$, com $0 \leq c < 1$, possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, tomando um ponto qualquer $x_0 \in M$ e colocando $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, a sequência (x_n) converge em M e*

$x = \lim x_n$ *é o único ponto fixo de* f.

Demonstração: Primeiramente, será mostrado que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M e, como M é um espaço métrico completo, a sequência será convergente em M. Pela construção da sequência, pode-se obter que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1).$$

Da mesma forma,

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x_0, x_1).$$

Procedendo recursivamente, segue-se que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x_0, x_1), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer, a partir da desigualdade triangular, tem-se que

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Utilizando do argumento da recursividade anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq (c^n + c^{n+1} + ... + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n (1 + c + ... + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n \left(\frac{1 - c^p}{1 - c} \right) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 \leq c < 1$, tem-se que $\lim\limits_{n \to \infty} c^n = 0$. Com isso, segue-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Devido a M ser um espaço métrico completo, existe $a \in M$ tal que $\lim(x_n) = a$. Como a função f é contínua, tem-se que $f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$, e, com isso, a é ponto fixo de f.

Para finalizar, será demonstrado que f não possui dois pontos fixos distintos.

Com efeito, se $f(a) = a$, $f(b) = b$ e sendo f uma contração, então

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b),$$

com $0 \leq c < 1$. Por consequência, é obtido que $(1 - c)d(a, b) \leq 0$ e, como $1 - c$ é positivo, deve-se ter $d(a, b) = 0$, ou seja, $a = b$. Portanto, o ponto fixo de f é único. $\square$

Uma aplicação importante do Teorema 1 é o Teorema de Existência e Unicidade de Solução de Equações Diferenciais Ordinárias, apresentado e demonstrado em [6]. Exemplos simples como $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, ilustram que a contração não pode ser substituída por uma contração fraca no Teorema 1.

3 O Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong

Nesta seção será discutido o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, apresentado por David William Boyd e James S. W. Wong em 1969 no artigo *On Nonlinear Contractions*, [2]. O principal teorema desta seção, Teorema 4, tem como uma de suas hipóteses que a função envolvida seja uma contração fraca, não necessariamente uma contração, como necessário no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Será apresentado um exemplo em que o Teorema do Ponto Fixo de Banach não é aplicável, mas o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong é, mostrando a relevância do resultado.

Antes de apresentar o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, serão introduzidos alguns conceitos e lemas. Primeiramente será definida a semicontinuidade superior, obtida de [4] e também o que vem a ser um espaço metricamente convexo, ver [2].

Definição 1. *Seja X um espaço métrico. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita ser* ***semicontínua superiormente em*** *$x_0 \in X$ quando, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então $f(x) < f(x_0) + \epsilon$. Diz-se que f é semicontínua superiormente se for semicontínua superiormente para todos os pontos de X.*

Definição 2. *Um espaço métrico X é* ***metricamente convexo*** *quando, para cada $x, y \in X$, existe $z \in X$, distinto de x e y, tal que $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$.*

Observação 1. *A semicontinudade superiormente em $x_0 \in X$ é equivalente a*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Os resultados apresentados nesta seção utilizam a semicontinuidade superior à direita, o que é uma restrição imediata da definição de semicontinuidade e essa definição é apresentada em [6]. Para espaços metricamente convexos, tem-se o seguinte resultado.

Lema 2. ***(Menger)*** *Se X é um espaço métrico completo metricamente convexo, então, para todo $\alpha \in (0,1)$ e para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existe $z \in X$ tal que*

$$d(x,z) = \alpha d(x,y) \text{ e } d(z,y) = (1-\alpha)d(x,y). \tag{1}$$

A demonstração desse resultado é extensa e foge ao escopo deste texto. Caso o leitor possua interesse na mesma, pode verificá-la na página 41 de [1].

Durante esta seção, P denotará a imagem da função distância no espaço métrico X, isto é,

$$P = \{d(x,y)/x, y \in X\}, \tag{2}$$

e $\overline{P}$ será o fecho de P. Para um espaço metricamente convexo, P é um intervalo do tipo $[0,b]$ ou $[0,b)$, em que b é um real positivo ou infinito. De fato, dados dois pontos $x, y \in X$ tal que $d(x,y) = b$, o Lema 2 garante que, para todo $\alpha \in (0,1)$, existe $z \in X$ tal que $d(x,z) = \alpha d(x,y) = \alpha b$, o que implica que para todo $\beta \in (0,b)$ existe $z \in X$ tal que $d(x,z) = \beta$. Como os pontos considerados foram arbitrários em X, o conjunto P definido em (2) será um intervalo, como desejado.

Outro resultado necessário é o seguinte lema, no qual b representa o diâmetro do conjunto X, conforme discutido no parágrafo anterior.

Lema 3. *Seja X um espaço métrico completo metricamente convexo e $T : X \to X$ uma função lipschitziana com constante de Lipschitz γ. Defina a função $\phi : [0,b) \to [0,b]$ dada por*

$$\phi(t) = \sup \{d(T(x), T(y))/x, y \in X, d(x,y) = t\}. \tag{3}$$

Assim,

(a) *se $s, t > 0$ e $s + t < b$, então $\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t)$, isto é, ϕ é subaditiva;*

(b) *ϕ é semicontínua superiormente à direita em $[0, b)$.*

Observação 2. *Convém observar que a função ϕ está bem definida no Lema 3. Isso ocorre devido à função T ser lipschitziana, pois, dado $x, y \in X$ tal que $d(x, y) = t_0$, tem-se*

$$d(T(x), T(y)) \leq \gamma d(x, y) = \gamma t_0.$$

Devido à arbitrariedade de $x, y \in X$, essa relação pode ser levada ao supremo, obtendo-se que $\phi(t_0) \leq \gamma t_0$, mostrando a boa definição de ϕ.

Demonstração: ***(a)*** Considere $d(x, y) = s + t$, em que $x, y \in X$ e s, t positivos e $s + t < b$. A partir do Lema 2, tomando $\alpha = \dfrac{s}{s + t} < 1$, existe $z \in X$ tal que $d(x, z) = s$ e $d(z, y) = t$. Utilizando-se da desigualdade triangular, da definição de ϕ e da Observação 2, é obtido que

$$d(T(x), T(y)) \leq d(T(x), T(z)) + d(T(z), T(y)) \leq \phi(s) + \phi(t).$$

Como essa relação é válida para quaisquer $x, y \in X$ tais que $d(x, y) = s + t$, também será válida para o supremo e, tomando-o nos dois lados, é obtido que

$$\phi(s + t) \leq \phi(s) + \phi(t).$$

(b) Utilizando o resultado ***(a)*** e o fato de T ser lipschitziana, dados $t, t_0 < b$ e $t_0 < t$, tem-se

$$\phi(t) = \phi(t - t_0 + t_0) \leq \phi(t - t_0) + \phi(t_0) \leq \gamma(t - t_0) + \phi(t_0),$$

sendo a última desigualdade consequência de (3), já que

$$d(T(x), T(y)) \leq \gamma d(x, y) = \gamma(t - t_0).$$

A partir dessa relação, para dado $\epsilon > 0$ e $t_0 \in [0, b)$, basta tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{\gamma}$ e, assim, para $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, tem-se

$$\phi(t) \leq \gamma(t - t_0) + \phi(t_0) \leq \gamma\frac{\epsilon}{\gamma} + \phi(t_0) = \epsilon + \phi(t_0),$$

e ϕ é semicontínua superiormente à direita, como desejado. □

De posse desses resultados, é possível enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 4. ***(Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong)*** *Seja X um espaço métrico completo, P o espaço definido em (2) e $\rho : \overline{P} \to [0, \infty)$ uma função semicontínua superiormente à direita que satisfaz $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$. Se $T : X \to X$ for uma função que satisfaz*

$$d(T(x), T(y)) \leq \rho(d(x, y)), \tag{4}$$

para todo $x, y \in X$, então T possui um único ponto fixo x_* e a sequência $(T^n(x))$ converge para x_*, para cada $x \in X$.

Demonstração: Dado $x \in X$, considere a sequência (c_n) em que $c_1 = x$ e os outros termos são definidos da forma

$$c_n = d(T^n(x), T^{n-1}(x)). \tag{5}$$

Será demonstrado que (c_n) tende a zero. De fato, a sequência é decrescente, pois

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= d(T^{n+1}(x), T^n(x)) = d(T\left(T^n(x)\right), T\left(T^{n-1}(x)\right)) \\ &\leq \rho(d(T^n(x), T^{n-1}(x)) = \rho(c_n) < c_n, \end{aligned}$$

em que a última desigualdade ocorre devido a hipótese de $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$. Como $c_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se uma sequência monótona e limitada, portanto convergente. Suponha, por contradição, que (c_n) convirja para $c > 0$. Pela última expressão, tem-se

$$c_{n+1} \leq \rho(c_n),$$

e, como (c_n) é limitada e $\rho(c_n) < c_n$, $(\rho(c_n))$ também é limitada. Aplicando o limite e usando a semicontinuidade superior de ρ, tem-se

$$c = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} \rho(c_n) \leq \limsup_{t\to c^+} \rho(t) \leq \rho(c),$$

o que é uma contradição, pois $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P}\backslash\{0\}$. Portanto, a sequência (c_n) tende a zero.

O próximo passo é demonstrar que a sequência $(T^n(x))$ é de Cauchy para cada $x \in X$. Suponha que a sequência não seja de Cauchy. Então, existe $\epsilon > 0$ e uma sequência de inteiros m_k, n_k com $m_k > n_k \geq k$ tal que

$$d_k = d\left(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x)\right) \geq \epsilon \text{ para } k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Considere que m_k é o menor inteiro maior que n_k tal que a condição (6) é satisfeita. Isso implica que

$$d(T^{m_k-1}(x), T^{n_k}(x)) < \epsilon.$$

Utilizando dessa condição, de (5) e da monotonicidade de (c_n), é obtido que

$$d_k \leq d(T^{m_k}(x), T^{m_k-1}(x)) + d(T^{m_k-1}(x), T^{n_k}(x)) \leq c_{m_k} + \epsilon \leq c_k + \epsilon.$$

Fazendo k tendendo a infinito, é obtido que

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \epsilon, \tag{7}$$

pois c_k tende a zero. Além disso, utilizando-se da desigualdade triangular, da monotonicidade de c_n e de (4), obtêm-se que

$$\begin{aligned} d_k = d\left(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x)\right) &\leq d\left(T^{m_k}(x), T^{m_k+1}(x)\right) \\ &+ d\left(T^{m_k+1}(x), T^{n_k+1}(x)\right) + d\left(T^{n_k+1}(x), T^{n_k}(x)\right) \\ &\leq c_{m_k} + \rho(d(T^{m_k}(x), T^{n_k}(x)) + c_{n_k} \\ &\leq 2c_k + \rho(d_k). \end{aligned}$$

A partir de (7) e tomando k tendendo a infinito novamente, é obtido que

$$\epsilon = \lim_{k\to\infty} d_k \leq \lim_{n\to\infty} 2c_k + \limsup_{k\to\infty} \rho(d_k) \leq 0 + \rho(\epsilon),$$

ou seja, $\epsilon \leq \rho(\epsilon)$, contradição com a condição $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P}\backslash\{0\}$. Portanto $(T^n(x))$ é uma sequência de Cauchy em X e, como X é um espaço completo, $(T^n(x))$ é convergente.

Note que, reescrevendo $T^n(x) = x_n$, tem-se que

$$T(x_n) = x_{n+1}, \tag{8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que T é uma função contínua, pois

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \rho(d(x,y)) < d(x,y),$$

ou seja, T é lipschitziana com constante de Lipzchitz igual a 1. A partir disso, tomando o limite em (8), tem-se

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T\left(x_n\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = T\left(x_*\right),$$

e um ponto fixo é obtido.

Para a unicidade, suponha que existam dois pontos fixos $x_*, y_* \in X$ distintos, isto é, $d(x_*, y_*) > 0$. A partir de (4) e da condição $\rho(t) < t$, tem-se

$$d(x_*, y_*) = d(T(x_*), T(y_*)) \leq \rho(d(x_*, y_*)),$$

o que é uma contradição com a condição $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P}\backslash\{0\}$. Portanto, o ponto fixo obtido é único. $\square$

O Teorema a seguir é uma consequência do Teorema 4 e estabelece que, para um espaço metricamente convexo, as condições impostas em ρ podem ser enfraquecidas e, ainda assim, é possível obter as mesmas conclusões do Teorema 4.

Teorema 5. *Suponha que X é um espaço métrico completo metricamente con-*

vexo, P o espaço definido em (2) e que $T : X \to X$ satisfaça (4), em que $\rho : \overline{P} \to [0, \infty)$ satisfaz a condição $\rho(t) < t$ para todo $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$. Então T possui um único ponto fixo x_0 e $T^n(x)$ tende a x_0 para todo $x \in X$.

Demonstração: Considerando $\phi(t)$ nas condições do Lema 3 para $t \in [0, b)$, defina

$$\phi(t) := \sup_{x,y \in X} \{d(T(x), T(y))/d(x, y) = t\}$$

e, por (4),

$$\phi(t) \leq \rho(d(x, y)) = \rho(t),$$

para todo $t \in [0, b)$. Caso $t = b$, não se pode utilizar diretamente o Lema 3. Sendo assim, se P for do tipo $[0, b]$, define-se $\phi(b) = \rho(b)$. Desta forma, tem-se uma função ϕ que satisfaz

$$d(T(x), T(y)) \leq \phi(d(x, y)),$$

para todo $x, y \in X$ e, além disso, $\phi(t) \leq \rho(t) < t$ para $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$. Além disso, convém observar que

$$d(T(x), T(y)) \leq \rho(d(x, y)) < d(x, y),$$

ou seja, T é lipschtziana com constante 1. Portanto, tem-se que ϕ e T satisfazem as condições do Lema 3, logo ϕ é semicontínua superiormente à direita em $[0, b)$. A partir disso, considerando as condições do Teorema 4 com ϕ no lugar de ρ, o mesmo Teorema pode ser aplicado a T, e, assim, T possui um único ponto fixo, como desejado. □

3.1 Comparação do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong com o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Como o Teorema 1 é uma grande referência na Teoria de Pontos Fixos, tal resultado será comparado com o Teorema 4, mostrando que, se uma função satisfizer as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach, ela também atenderá as condições do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong. Com efeito, considere

X um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração, ou seja,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \tag{9}$$

com $0 \leq k < 1$. Desta forma, pode-se definir a função $\rho : \overline{P} \to [0, \infty)$, em que P é o espaço definido em (2), por

$$\rho(t) = kt.$$

Devido à continuidade de ρ, para todo $t_0 \in \overline{P}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, então

$$\rho(t_0) - \epsilon < \rho(t) < \rho(t_0) + \epsilon.$$

A semicontinuidade à direita de ρ segue-se da segunda desigualdade e da restrição a valores do intervalo $(t_0, t_0 + \delta)$.

Além disso, como $k < 1$, para $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$, é obtido que $\rho(t) = kt < t$. Outro ponto importante é que, pela equação (9), f satisfaz a condição (4) e, portanto, o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong pode ser aplicado a f.

Na seção a seguir, será apresentado uma função que satisfaz o Teorema 4 e não satisfaz o Teorema 1, mostrando a relevância do Teorema do Ponto Fixo deBoyd-Wong.

3.2 Exemplos

Na sequência, serão apresentados dois exemplos que indicam que ao se enfraquecer uma das hipóteses do Teorema 4, não há garantia da existência ou da unicidade do ponto fixo.No primeiro são satisfeitas todas as condições do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, exceto a semicontinuidade superior de ρ e não há ponto fixo.

Exemplo 1. Considere o espaço métrico $X = \{x_n = n\sqrt{2} + 2^n / n \in \mathbb{Z}\}$, com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. Observe que X é um subespaço completo de $\mathbb{R}$. De fato, dados $x_n, x_m \in X$ distintos, suponha, sem perda de generalidade, que $n > m$.

Dessa forma,

$$d(x_n, x_m) = \left| n\sqrt{2} + 2^n - m\sqrt{2} - 2^m \right| = (n-m)\sqrt{2} + (2^n - 2^m) > \sqrt{2}, \tag{10}$$

mostrando que X possui todos os seus pontos com distância maior que $\sqrt{2}$, implicando que qualquer sequência convergente em X deve, a menos de finitos valores, ser constante. Portanto, X é um subespaço fechado de $\mathbb{R}$ e, por consequência, completo.

Considere P o conjunto definido em (2). Para cada $p \in P$, existe uma única dupla x_n e x_m tal que $p = d(x_n, x_m)$. Com efeito, suponha que existam $x_n, x_m, x_j, x_k \in X$, com $n > m$ e $j > k$, tal que $d(x_n, x_m) = d(x_j, x_k)$. Dessa forma,

$$(j-k)\sqrt{2} + \left(2^j - 2^k\right) = (n-m)\sqrt{2} + (2^n - 2^m),$$

o que pode ser reorganizado da forma

$$(m - n + j - k)\sqrt{2} = 2^n - 2^m - 2^j + 2^k.$$

Observe que há um número irracional multiplicado por inteiros de um lado e do outro somente racionais. A igualdade só é possível se ambos os lados se anularem, isto é, $n - m = j - k$ e $2^n - 2^m = 2^j - 2^k$. Considere $n - m = s = j - k$, com $s \neq 0$. Substituindo na igualdade anterior, tem-se

$$2^m(2^s - 1) = 2^{m+s} - 2^m = 2^{k+s} - 2^k = 2^k(2^s - 1).$$

Como $2^s - 1 \neq 0$, obtêm-se $m = k$ e, consequentemente, $n = j$, e, com essa contradição, conclui-se que a dupla de distância p é única.

Defina $T : X \to X$ por

$$T(x_n) = x_{n-1}, n \in \mathbb{Z} \tag{11}$$

e $\rho : \overline{P} \to [0,\infty)$ por

$$\rho(t) = \begin{cases} |x_{n-1} - x_{m-1}|, & \text{se } t = |x_n - x_m|, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{12}$$

Nessas condições, tem-se que $\rho(t) < t$, para todo $t \in \overline{P} \backslash \{0\}$. De fato, se $t \in P$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$, com $n > m$, tal que $d(x_n, x_m) = t$ e, dessa forma,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \left|(n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1} - \left[(m-1)\sqrt{2} + 2^{m-1}\right]\right| \\ &= (n-m)\sqrt{2} + 2^{m-1}\left(2^{n-m} - 1\right) \\ &< (n-m)\sqrt{2} + 2^{m}\left(2^{n-m} - 1\right) \\ &= n\sqrt{2} + 2^n - m\sqrt{2} - 2^m = t. \end{aligned}$$

Caso $t \in \overline{P} \backslash P$, então $\rho(t) = 0 < t$, e tem-se o resultado desejado. Além disso, por construção, tem-se

$$d\left(T(x_n), T(x_m)\right) = |x_{n-1} - x_{m-1}| = \rho\left(|x_n - x_m|\right),$$

ou seja, a aplicação T, dada por (11), satisfaz (4).

No entanto, ρ não é semicontínua superiormente. Primeiramente, observe que $\sqrt{2} \in \overline{P} \backslash P$. A partir de (10), conclui-se que $\sqrt{2}$ não pertence a P. Porém, pode-se ver que $\sqrt{2}$ pertence à $\overline{P}$ pois, dados $x_n, x_{n-1} \in X$, tem-se

$$d(x_n, x_{n-1}) = \left|n\sqrt{2} + 2^n - \left[(n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1}\right]\right| = \sqrt{2}+2^n-2^{n-1} = \sqrt{2}+2^{n-1},$$

e tomando n tendendo a menos infinito, a distância entre os pontos tende a $\sqrt{2}$. Logo, $\rho(\sqrt{2}) = 0$. Além disso, para $\epsilon = 1$ e dado $p \in P$, tem-se que

$$\rho(p) = d(x_n, x_m) \geq \sqrt{2} > 0 + 1 = \rho(\sqrt{2}) + 1.$$

Portanto, ρ não é semicontínua superiormente à direita em $\sqrt{2}$.

Convém observar que, mesmo que se definam outros valores para $\rho(t)$, definida em (12), $t \in \overline{P} \backslash P$, se ρ satisfaz a condição $\rho(t) < t$, deve-se ter que

$\rho(\sqrt{2}) < \sqrt{2}$, e basta tomar $\epsilon = \dfrac{\sqrt{2} - \rho(\sqrt{2})}{2}$ para a semicontinuidade falhar em $\sqrt{2}$. Portanto, para obter-se a semicontinuidade superiormente à direita em $\sqrt{2}$, dever-se-ia ter $\rho(\sqrt{2}) \geq \sqrt{2}$, o que contradiz a hipótese $\rho(t) < t$. Logo, não é possível satisfazer ao mesmo tempo todas as condições do Teorema 4.

Para finalizar o exemplo, observe que T não possui ponto fixo, pois

$$T\left(x_n\right) = T\left(n\sqrt{2} + 2^n\right) = (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1},$$

e $n\sqrt{2} + 2^n \neq (n-1)\sqrt{2} + 2^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

O próximo exemplo mostra que, se a condição $\rho(t) < t$ for enfraquecida, mesmo que somente para um único t_0 tal que $\rho(t_0) = t_0$, a existência e a unicidade do ponto fixo para uma aplicação T satisfazendo as outras condições do Teorema 4 pode não ocorrer. Nesse exemplo, tem-se uma função que não apresenta nenhum ponto fixo e uma outra com dois pontos fixos.

Exemplo 2. Considere o espaço métrico $X = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. Como X é um subespaço fechado de $\mathbb{R}$, X é completo. Considere as funções $T_1, T_2 : X \to X$ definidas por

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & \text{se } x \geq 1, \\ \frac{1}{2}(x-1), & \text{se } x \leq -1, \end{cases} \tag{13}$$

e $T_2(x) = -T_1(x)$. Além disso, defina $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & \text{se } 0 \leq t < 2, \\ \frac{1}{2}t + 1, & \text{se } t \geq 2. \end{cases} \tag{14}$$

Será demonstrado que ρ é uma função semicontínua superiormente à direita. Com efeito, será apresentado o caso em que $t_0 \in [0, 2)$ e para $t_0 \geq 2$ é análogo. Dito isso, dado $t_0 \in [0, 2)$ e $\epsilon > 0$, tome $\delta \leq 2\epsilon$, de forma que δ seja tomado suficientemente pequeno para satisfazer $(t_0, t_0 + \delta) \subseteq [0, 2)$, e então, para todo

$t \in (t_0, t_0 + \delta)$, tem-se

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t \leq \frac{1}{2}(t_0 + \delta) = \frac{1}{2}t_0 + \frac{\delta}{2} \leq \rho(t_0) + \epsilon,$$

como desejado.

A próxima condição a se verificar é $\rho(t) < t$ para todo $t \in (0, \infty)$, exceto $t = 2$, em que $\rho(2) = 2$. Para $t \in (0, 2)$, tem-se que

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t < t,$$

e, se $t > 2$, também é sempre válido que

$$\rho(t) = \frac{1}{2}t + 1 < t.$$

Além disso, T_1 e T_2 satisfazem (4). De fato, será demonstrado apenas para T_1, visto que para T_2 é equivalente, devido as duas funções diferirem por um sinal de menos, que não afetará os valores absolutos das distâncias. A demonstração será dividida em casos de acordo com a localização dos pontos em X e de suas respectivas distâncias.

Primeiramente, dados $x, y \in X$, considere o caso em que $d(x, y) < 2$, o que é possível somente se $x, y \geq 1$ ou $x, y \leq -1$. Para a primeira situação, tem-se

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left|\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+1)\right| = \frac{1}{2}\left|x - y\right| = \rho\left(\left|x - y\right|\right),$$

como desejado. A situação $x, y \leq -1$ com $d(x, y) < 2$ é análoga.

O segundo caso ocorre quando, dados $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 2$, e pode acontecer se $x, y \geq 1$; $x, y \leq -1$; $x \geq 1$ e $y \leq -1$ ou $x \leq -1$ e $y \geq 1$. Considerando $x, y \geq 1$ (análogo para $x, y \leq -1$), é obtido que

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left|\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y+1)\right| = \frac{1}{2}\left|x - y\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - y\right| + 1 = \rho\left(\left|x - y\right|\right).$$

Na sequência, suponha que $x \geq 1$ e $y \leq -1$, e, com isso,

$$d(T_1(x), T_1(y)) = \left|\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y| + 1 = \rho(|x-y|).$$

A situação $x \leq -1$ e $y \geq 1$ é análoga e, assim, tem-se que T_1 e T_2 satisfazem (4), como desejado.

No entanto, T_1 apresenta dois pontos fixos, dados por -1 e 1, e T_2 não possui pontos fixos, pois se $x \geq 1$, tem-se $T_2(x) \leq -1$ e se $x \leq -1$, $T_2(x) \geq 1$. Os gráficos de T_1 e T_2 são apresentados na Figura 1 e 2, respectivamente. $\square$

O exemplo a seguir satisfaz as condições do Teorema 4, porém não satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Neste exemplo serão utilizados alguns resultados clássicos da Análise Funcional, que serão citados a seguir e podem ser vistos em [3]. Considere os espaços $\ell^p,\ 1 \leq p < \infty$, das sequências de números $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)$ tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty,$$

e, dados $x = (\xi_i)$ e $y = (\eta_j)$, elementos de ℓ^p, a métrica desse espaço é

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Na página 35 de [3] é provado que ℓ^p é um espaço completo e, na página 30 do mesmo, o Teorema $1.4-7$ mostra que um subespaço fechado de um espaço completo é completo.

Exemplo 3. Considere o espaço $X = [0,1] \cup \mathbb{N}$ com a seguinte métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{se } x, y \in [0,1], \\ x+y, & \text{se } x \text{ ou } y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Nessas condições, (X, d) é um espaço métrico completo. Primeiramente, será demonstrado que X é isométrico ao subconjunto Y de ℓ^1, em que Y consiste das

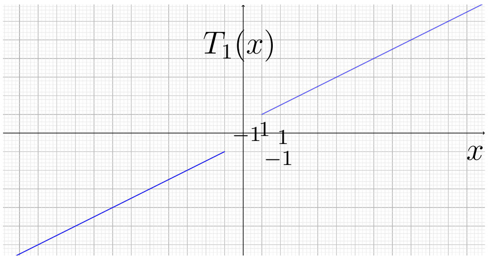

Figura 1: Gráfico da função T_1.

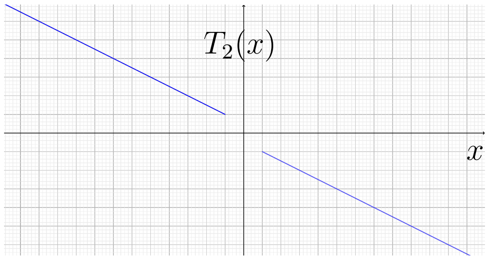

Figura 2: Gráfico da função T_2.

sequências $(x, 0, 0, 0, 0.....)$, se $x \in [0, 1]$ e das sequências com n na $n-$ésima coordenada e zero nas outras coordenadas caso $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Para tal, considere a função $w : X \to Y \subset \ell^1$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} (x, 0, 0, ...), & \text{se } x \in [0, 1], \\ (0, 0, ..., 0, n, 0, ...), & \text{se } x \in X\backslash[0, 1]. \end{cases}$$

Tem-se que, se $x, y \in [0, 1]$, então $d(x, y) = |x - y|$. Além disso, denotando-se a i-ésima coordenada de $w(x)$ por $w_i(x)$, segue-se que os respectivos elementos em Y são $w(x) = (x, 0, 0, ...)$ e $w(y) = (y, 0, 0, ...)$ e

$$||w(x) - w(y)||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(x) - w_i(y)| = |x - y| \, .$$

Caso x não pertença a $[0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, então $d(x, n) = x+n$, e os respectivos elementos em Y são $w(x) = (x, 0, 0, ...)$ e $w(n) = (0, 0, 0, ..., n, 0...)$ e

$$||w(x) - w(n)||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(x) - w_i(n)| = x + n.$$

Para finalizar, caso ambos os elementos m, n não pertençam a $[0, 1]$, então $d(m, n) = m + n$, os respectivos elementos em Y são $w(m) = (0, 0, 0, ..., 0, m, 0, ...)$ e $w(n) = (0, 0, 0, ..., 0, n, 0...)$ e

$$||w(m) - w(n)||_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |w_i(m) - w_i(n)| = m + n.$$

Na sequência, será demonstrado que Y é um subconjunto fechado de ℓ^1, portanto completo. Seja (x_n) uma sequência convergente de Y e seja x o seu limite. Será demonstrado que $x \in Y$, implicando que Y é fechado. Note que, todo ponto da forma $y_n = (0, 0, ..., 0, n, 0, ...)$ é isolado, pois a distância desse ponto a outro ponto de Y é maior ou igual a n. Portanto, uma sequência convergente formada por esses pontos será, a menos de uma quantidade finita de termos, constante e convergirá para o próprio y_n, como desejado.

Para o caso em que o limite da sequência seja do tipo $x = (x_1, 0, 0, 0....)$, a menos de subsequência, a sequência será formada por pontos da forma $x_n = (x_{1_n}, 0, 0, ...)$. Como x_{1_n} são valores reais contidos no intervalo $[0, 1]$, tem-se que x_n converge para x se, e somente se, x_{1_n} converge para x_1. Com isso, como $[0, 1]$ é um intervalo fechado de $\mathbb{R}$, tem-se que x_{1_n} converge em $[0, 1]$, o que implica que $x \in Y$ e Y é fechado em ℓ^1.

Considere a função $T : X \to X$, definida por

$$T(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}x^2 & , \text{ se } x \in [0,1], \\ x - 1 & , \text{ se } x \notin [0,1]. \end{cases} \tag{15}$$

Observe que T apresenta $x = 0$ como ponto fixo, e, além disso, $T(x) < x$, se x é diferente de zero, visto que se subtrai algo positivo de x para todo $x \in X$ não nulo. Por consequência, o ponto fixo $x = 0$ é único.

Na sequência, defina a função $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$, dada por

$$\rho(t) = \begin{cases} t - \dfrac{1}{2}t^2 & , \text{ se } t \in [0,1], \\ t - 1 & , \text{ se } t > 1. \end{cases} \tag{16}$$

A função ρ é uma função semicontínua superiormente à direita. De fato, para $t_0 \in [0, \infty)\backslash\{1\}$, ρ é contínua à direita em t_0, logo é semicontínua superiormente à direita. Para o caso de $t_0 = 1$, para dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta = \epsilon$, logo, para todo $t \in (1, 1 + \delta)$, tem-se

$$\rho(t) = t - 1 \le 1 + \delta - 1 = \epsilon < \frac{1}{2} + \epsilon = \rho(1) + \epsilon,$$

e ρ é semicontínua superiormente à direita em 1. Além disso, tem-se que $\rho(t) < t$ para todo $t \in (0, \infty)$, o que pode ser visto através da lei de formação da função ρ, pois, para $t \in (0, 1]$, tem-se

$$\rho(t) = t - \frac{1}{2}t^2 < t,$$

e, para $t \in (1, \infty)$, obtem-se

$$\rho(t) = t - 1 < t,$$

como desejado. Para finalizar, basta mostrar que T satisfaz (4). De fato, se $x, y \in [0, 1]$ e, sem perda de generalidade, $x > y$, tem-se que $t = d(x, y) \leq 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \left| x - \frac{1}{2}x^2 - y + \frac{1}{2}y^2 \right| \\ &= (x - y)\left(1 - \frac{1}{2}(x + y)\right) \\ &\leq t\left(1 - \frac{1}{2}t\right) = \rho(t). \end{aligned}$$

Caso x(ou ambos) não pertença(m) ao intervalo $[0, 1]$, tem-se $d(x, y) > 1$ e, lembrando que $T(y) \leq y, \forall y \in X$, tem-se

$$d(T(x), T(y)) \leq T(x) + T(y) \leq x - 1 + y = d(x, y) - 1 = \rho(d(x, y)).$$

Portanto, o Teorema 4 é aplicável a T, que, como dito anteriormente, apresenta $x = 0$ como único ponto fixo.

Para finalizar, será demonstrado que T não é uma contração, não sendo possível aplicar o Teorema 1 a essa função. De fato, suponha que T seja uma contração, com constante $k \in [0, 1)$. Dado $n > 1$, tem-se

$$d\left(T(n), T(n + 1)\right) = 2n - 1 \leq k(2n + 1) = kd(n, n + 1).$$

Reorganizando,

$$\frac{2n-1}{2n+1} \leq k.$$

Tomando o limite de n tendendo a infinito, obtêm-se que $1 \leq k$, o que contradiz a hipótese $k < 1$. Portanto, T não é uma contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach não é aplicável a T. □

4 O Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata

Nesta seção será discutido o Teorema do Ponto Fixo obtido por Vittorino Pata, apresentado em [7]. Convém observar que esse teorema se aplica a contrações fracas, uma hipótese mais fraca que aquela apresentada pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Porém, como é de se esperar, mais condições devem ser impostas sobre a função f, como será visto a seguir.

Algumas definições devem ser realizadas antes de enunciar o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata. Seja X um espaço métrico completo com métrica d. Durante essa seção, sempre que se referir a X, será considerado que é um espaço métrico completo com métrica d. Fixe $x_0 \in X$ arbitrário e defina a função

$$||x|| = d(x, x_0), \ \forall x \in X. \tag{17}$$

Convém observar que a função definida em (17) não representa, em geral, uma norma, pois o espaço métrico X pode não ser normado. Somente o caso em que X seja um espaço de Banach e $x_0 = 0$ que a função $||.||$ coincide com a norma. Além disso, considere uma função não decrescente $\psi : [0, \alpha] \to [0, \infty)$ que satisfaça $\psi(0) = 0$ e seja contínua no ponto 0 e crescente em uma vizinhança de zero. A partir disso, para todo $\alpha \geq 1$, pode-se definir a sequência de funções

$$\omega_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{\alpha}{k}\right). \tag{18}$$

Antes de enunciar o teorema principal deste trabalho, será demonstrado que essa sequência de funções é convergente.

Lema 6. *A sequência de funções $(\omega_n(\alpha))$ tende a zero para todo $\alpha \geq 1$.*

Demonstração: A demonstração será dividida em dois casos: para $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$. Primeiramente, considere $\alpha > 1$. Analisando o n-ésimo termo da sequência, tem-se que

$$\omega_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}\left[\psi(\alpha) + \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right].$$

Como ψ é uma função não decrescente, tem-se que $\psi(\alpha) \geq \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq ... \geq \psi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Com isso, podemos limitar o n-ésimo termo de $(\omega_n(\alpha))$ da forma

$$\omega_n(\alpha) \leq \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha} n\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\right)\psi(\alpha).$$

Observe que, como $\alpha - 1 > 0$, segue-se que $n^{\alpha-1}$ tende a infinito quando n tende a infinito e, por consequência, $(\omega_n(\alpha))$ tende a zero, como desejado.

Considere agora o caso em que $\alpha = 1$. O n-ésimo termo da sequência é

$$\omega_n(1) = \frac{1}{n}\left[\psi(1) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Como ψ se anula continuamente no ponto zero, tem-se que, dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $\psi\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{\epsilon}{2}$. Desta maneira, tomando $n > n_0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\omega_n(1) &= \frac{1}{n}\left[\psi\,(1) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) + ... + \psi\left(\frac{1}{n_0}\right) + \psi\left(\frac{1}{n_0+1}\right) + ... + \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{n}\left[n_0\psi(1) + (n - n_0)\frac{\epsilon}{2}\right] \\
&= \frac{n_0}{n}\psi(1) + \frac{n - n_0}{n}\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Tomando n tendendo a infinito, tem-se, pela expressão anterior, que o primeiro termo tende a zero e o segundo a $\frac{\epsilon}{2}$, e, desta forma,

$$\omega_n(1) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Portanto, para todo $\alpha \geq 1$, a sequência de funções $(\omega_n(\alpha))$ tende a zero para n suficientemente grande, como desejado. $\square$

A partir disso, pode-se enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 7. ***(Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata)*** *Considere $\Lambda \geq 0,\ \alpha \geq 1$ e $0 \leq \beta \leq \alpha$ constantes. Seja $f : X \to X$ uma função que satisfaça a desigualdade*

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\epsilon)d(x,y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon)[1 + ||x|| + ||y||]^{\beta}, \tag{19}$$

para todo $\epsilon \in [0,1]$ e para todo $x, y \in X$. Então f possui somente um único ponto fixo $x_* = f(x_*)$. Além disso, considerando a n-ésima composta $f \circ f \ldots f \circ f = f^n$, tem-se que

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha), \tag{20}$$

para uma constante positiva $C \leq \Lambda(1 + 4||x_*||)^{\beta}$.

Observação 3. Fixar x_0 não é uma restrição nas condições do Teorema, pois basta adaptar Λ de acordo com o x_0 definido.

Observação 4. Note que f é uma contração fraca. De fato, a equação (19) é válida para todo $\epsilon \in [0,1]$ e, em particular, para $\epsilon = 0$, quando tem-se $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$.

Como a demonstração do teorema é extensa, a mesma será dividida em diversos resultados. Inicialmente será demonstrada a existência de um ponto fixo e, posteriormente, sua unicidade.

4.0.1 Existência de Ponto Fixo x_*

Considere as seguintes sequências (x_n) e (c_n) dadas por

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) \ \text{ e } \ c_n = ||x_n||,$$

com $||.||$ definida em x_0 conforme (17).

Primeiramente, serão demonstrados alguns lemas para depois se provar a existência de um ponto fixo.

Lema 8. *A sequência* (c_n) *é limitada.*

Demonstração: Como f é uma contração fraca, segue-se que

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq d(x_1, x_0),$$

e, procedendo recursivamente,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_1, x_0) = c_1.$$

Utilizando-se da desigualdade anterior, da desigualdade triangular e lembrando que, por definição, $d(x_{n+1}, x_1) = d(f(x_n), f(x_0))$, tem-se

$$\begin{aligned} c_n = d(x_n, x_0) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_0) \\ &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, x_1) + d(x_1, x_0) \\ &\leq c_1 + d(f(x_n), f(x_0)) + c_1 = d(f(x_n), f(x_0)) + 2c_1. \end{aligned}$$

Juntando esse resultado com a equação (19), obtem-se

$$\begin{aligned} c_n = d(x_n, x_0) &\leq d(f(x_n), f(x_0)) + 2c_1 \\ &\leq (1-\epsilon)d(x_n, x_0) + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + ||x_n|| + ||x_0||]^\beta + 2c_1 \\ &= (1-\epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + c_n]^\beta + 2c_1 \\ &\leq (1-\epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)[1 + c_n + c_1]^\beta + 2c_1. \end{aligned}$$

Considere a desigualdade

$$(x+y)^p \leq 2^p(|x|^p + |y|^p), \tag{21}$$

que é válida para todo $x, y, p \geq 0$. Utilizando-a com $x = 1 + c_1$, $y = c_n$ e $p = \beta$, é obtido que

$$\begin{aligned} c_n &\leq (1-\epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(|1 + c_1|^\beta + |c_n|^\beta) + 2c_1 \\ &\leq (1-\epsilon)c_n + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta c_n^\beta + \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(1 + c_1)^\beta + 2c_1. \end{aligned}$$

Para simplificação de notação, tome $a = \dfrac{\Lambda 2^\beta}{c_n^{\alpha-\beta}}$ e $b = \Lambda\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)2^\beta(1+c_1)^\beta + 2c_1$. Note que tanto a quanto b são não negativos, pois são produtos e somas de termos não negativos. Reescrevendo a equação anterior, tem-se

$$c_n \leq (1-\epsilon)c_n + a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)c_n^\alpha + b,$$

que também pode ser reescrita da forma

$$\epsilon c_n \leq a\epsilon^\alpha\psi(\epsilon)c_n^\alpha + b.$$

Suponha agora, por contradição, que (c_n) não seja limitada e, por isso, que exista uma subsequência (c_{n_i}) que tenda a infinito, com $c_{n_i} > 1+b, \forall n_i \in \mathbb{N}$. Tomando $\epsilon_i = \dfrac{1+b}{c_{n_i}}$ para cada n_i, de forma que $\epsilon_i \leq 1$, tem-se que

$$\frac{(1+b)}{c_{n_i}}c_{n_i} \leq a\left(\frac{1+b}{c_{n_i}}\right)^\alpha \psi(\epsilon_i)c_{n_i}^\alpha + b,$$

o que é equivalente a

$$1 \leq a(1+b)^\alpha\psi(\epsilon_i).$$

Como (c_{n_i}) tende a infinito, obtêm-se que (ϵ_i) tende a zero e, por consequência, $(\psi(\epsilon_i))$ tende a zero. Tomando o limite, chega-se à desigualdade $1 \leq 0$, contradição. Portanto, a sequência (c_n) é limitada. $\square$

Para demonstrar o Lema 10, precisa-se antes do seguinte resultado.

Lema 9. *Seja* $\alpha \geq 1$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então vale a desigualdade* $1 - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \leq \dfrac{\alpha}{n+1}$

Demonstração: Para começar, considere $\alpha = 1$. Nesse caso, tem-se a igualdade, pois

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^1 = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{\alpha}{n+1}.$$

Suponha agora $\alpha > 1$. Para esse caso, considere a função auxiliar

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}.$$

Primeiramente, será mostrado que a derivada de f é sempre positiva para $x \geq 0$, *i.e.*, f é crescente nesse intervalo. De fato, derivando f, obtem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\alpha\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{\alpha}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{\alpha}{(1+x)^2}\left[\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1} - 1\right]. \end{aligned}$$

Como o termo $-\dfrac{\alpha}{(1+x)^2}$ é sempre negativo, tem-se que $f'(x)$ é positivo se

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Como a relação anterior é válida para todo $x \geq 0$, conclui-se que f é uma função crescente em $[0, \infty)$. Calculando $f(0)$ e o limite de f quando $x \to \infty$, tem-se

$$f(0) = 1 - \alpha \leq 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dessa forma, f é uma função crescente variando de $1 - \alpha$ a 0 quando $x \in [0, \infty)$. Com isso, $f(x) \leq 0$ e

$$1 - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha}{x+1} \leq 0.$$

Reorganizando os termos, tirando o mínimo dentro do parênteses e restringindo a equação aos naturais, obtêm-se

$$1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1},$$

como desejado. $\square$

Lema 10. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade*

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha),$$

em que

$$C = \Lambda \sup_{n\in\mathbb{N}} [1 + 2c_n]^\beta. \tag{22}$$

Demonstração: Fixado m, defina a sequência

$$p_n = n^\alpha d(x_{n+m}, x_n).$$

A partir da Equação (19), segue-se que

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} & = & (n+1)^\alpha d(f(x_{n+m}), f(x_n)) \\ & \leq & (n+1)^\alpha (1-\epsilon) d(x_{n+m}, x_n) + \\ & + & (n+1)^\alpha \Lambda \epsilon^\alpha \psi(\epsilon)[1 + ||x_{n+m}|| + ||x_n||]^\beta. \end{array} \tag{23}$$

O Lema 8 estabelece que (c_n) é limitada superiormente e, portanto, tal sequência possui supremo. Desta forma, como $c_n = ||x_n||$ e $\beta \geq 0$, tem-se

$$[1 + ||x_{m+n}|| + ||x_n||]^\beta \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} [1 + c_n + c_n]^\beta = \sup_{n\in\mathbb{N}} [1 + 2c_n]^\beta.$$

Aplicando essa desigualdade na equação (23), obtém-se

$$p_{n+1} \leq (n+1)^\alpha (1-\epsilon) d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^\alpha C \epsilon^\alpha \psi(\epsilon).$$

Tome, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$. Substituindo ϵ na relação anterior, tem-se

$$\begin{array}{rcl} p_{n+1} & \leq & (n+1)^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha d(x_{n+m}, x_n) + \\ & + & (n+1)^\alpha C \left[1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right]^\alpha \psi\left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\right). \end{array}$$

Pelo Lema 9, sabe-se que a seguinte relação é válida:

$$\epsilon = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n+1}.$$

Utilizando-se dessa desigualdade, simplificando alguns termos da expressão e notando que $\alpha \geq 1$ e ψ não decrescente, tem-se

$$p_{n+1} \leq (n+1)^{\alpha}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + (n+1)^{\alpha} C \left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{\alpha} \psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Simplificando os termos $(n+1)^{\alpha}$ presentes no numerador e denominador

$$p_{n+1} \leq n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) + C\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Note que $p_n = n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n)$ e, desta forma,

$$p_{n+1} \leq p_n + C\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{n+1}\right).$$

Como $p_0 = 0$, segue-se que

$$p_1 \leq C\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e, em sequência,

$$p_2 \leq p_1 + C\alpha^{\alpha}\psi\left(\frac{\alpha}{3}\right) \leq C\alpha^{\alpha}\left[\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \psi\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right].$$

Procedendo recursivamente, tem-se que

$$p_n = n^{\alpha} d(x_{n+m}, x_n) \leq C\alpha^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k+1}\right).$$

Para finalizar, dividindo ambos os lados por n^{α}, obtém-se

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq C\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k+1}\right) \leq C\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(\frac{\alpha}{k}\right) = C\omega_n(\alpha),$$

como desejado. $\square$

A partir desses resultados, será demonstrada a existência de um ponto fixo x_* desde que f satisfaça as condições do Teorema 7. Além disso, será demonstrada a condição $d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\alpha)$, com $C \leq \Lambda(1 + 4||x_*||)^{\beta}$.

O Lema 10 mostra que (x_n) é, em particular, uma sequência de Cauchy, pois, como demonstrado no Lema 6, $(\omega_n(\alpha))$ tende a zero quando n tende a infinito. Como o espaço X é completo, existe $x_* \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. Utilizando-se da desigualdade do Lema 10, segue-se que

$$d(x_*, f(x_{n-1})) = d(x_*, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_{m+n}, x_n) \leq C\omega_n(\alpha).$$

Devido a f ser uma contração fraca, logo contínua, pode-se fazer n tender a infinito, obtendo-se

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d\left(x_*, f(x_{n-1})\right) &= d\left(x_*, f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)\right) = d\left(x_*, f(x_*)\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} C\omega_n(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, obtém-se um ponto fixo $x_* = f(x_*)$. Além disso, convém observar que

$$d\left(x_*, f\left(x_{n-1}\right)\right) = d\left(x_*, f^n\left(x_0\right)\right) \leq C\omega_n(\alpha),$$

o que satisfaz a equação (20) do Teorema, restando apenas mostrar que

$$C \leq \Lambda(1 + 4||x_*||)^{\beta}.$$

Para isso, visto que x_* é um ponto fixo de f, é obtido que

$$d(x_*, x_n) = d(f(x_*), f(x_{n-1})) \leq d(x_*, x_{n-1}) \leq ... \leq d(x_*, x_0) = ||x_*||,$$

e, por consequência,

$$c_n = d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_*) + d(x_*, x_0) \leq 2||x_*||.$$

Substituindo essa relação em C, que foi definido em (22), segue-se que

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varLambda(1 + 2c_n)^\beta \leq \varLambda(1 + 4||x_*||),$$

como desejado. $\square$

4.0.2 Unicidade do Ponto Fixo x_*

Para demonstrar a unicidade, supõe-se que existam dois pontos fixos $x, y \in X$. A equação (19) pode ser reescrita da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + K\epsilon\psi(\epsilon), \tag{24}$$

com $K = \varLambda\epsilon^{\alpha-1}[1 + ||x|| + ||y||]^\beta \geq 0$. Como x e y são pontos fixos, tem-se que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ e substituindo na relação (24), é obtido que

$$\epsilon d(x, y) \leq \epsilon K\psi(\epsilon),$$

com $\epsilon \in [0, 1]$. Para valores de ϵ diferentes de zero, tem-se

$$d(x, y) \leq K\psi(\epsilon),$$

e pode-se tomar ϵ tendendo a zero à direita nessa expressão. Pela continuidade de ψ em zero com $\psi(0) = 0$, conclui-se que $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$. Portanto, o ponto fixo é único e o Teorema 7 está demonstrado. $\square$

Corolário 11. *Se $\psi(\epsilon) = \epsilon^\gamma$ para algum $\gamma > 0$, tomando $\vartheta = \alpha + \gamma$, a taxa de convergência de (20) torna-se*

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{C\vartheta^\vartheta}{n^{\vartheta-1}}. \tag{25}$$

Demonstração: Considere $\vartheta = \alpha + \gamma$, $\alpha \geq 1$ e $\psi(\epsilon) = \epsilon^\gamma$. Claramente, a relação (19) é válida com $\alpha = \vartheta - \gamma$. Trocando γ por ν arbitrariamente pequeno, tem-se $\vartheta - \nu > \vartheta - \gamma$ e a desigualdade (19) também é válida com $\alpha = \vartheta - \nu$. Substituindo essas condições em (18), segue-se que

$$\begin{aligned}\omega_n(\vartheta-\nu) &= \left(\frac{\vartheta-\nu}{n}\right)^{\vartheta-\nu}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\vartheta-\nu}{k}\right)^{\nu} = \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{n^{\vartheta-\nu}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\nu}}\\ &= \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{n^{\vartheta-\nu}}\left[\frac{1}{1^{\nu}}+\frac{1}{2^{\nu}}+...+\frac{1}{n^{\nu}}\right].\end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{1^{\nu}} = 1 \geq \dfrac{1}{n^{\nu}}$ para todo $n > 1$, pode-se majorar o termo em colchetes por n. Além disso, observando que $1 \leq \dfrac{1}{1-\nu}$, se $0 < \nu < 1$, tem-se

$$\omega_n(\vartheta-\nu) \leq \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta} n}{n^{\vartheta-\nu}} = \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{n^{\vartheta-\nu-1}} \leq \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{(1-\nu)n^{\vartheta-\nu-1}} = \frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{(1-\nu)n^{\vartheta-1}}n^{\nu}.$$

Substituindo essa informação em (20), obtem-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq C\omega_n(\vartheta-\nu) \leq C\frac{(\vartheta-\nu)^{\vartheta}}{(1-\nu)n^{\vartheta-1}}n^{\nu},$$

e, tomando ν tendendo a zero, segue-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{C\vartheta^{\vartheta}}{n^{\vartheta-1}},$$

como desejado. □

4.1 Comparação do Teorema com Outros Resultados Conhecidos

Nesta seção, o Teorema de Vittorino Pata será comparado a outros resultados da Teoria de Pontos Fixos.

4.1.1 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Banach

O Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 1) tem por hipótese que $f : X \to X$ é definida no espaço métrico completo e que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

para $0 \leq \lambda < 1$. Desta forma, considerando $\lambda = 1 - \epsilon$ em (19), obtém-se que se as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach forem válidas, as condições do Teorema 7 também serão satisfeitas, fazendo com que o Teorema 7 seja mais geral que o Teorema do Ponto Fixo de Banach. No final desta seção será apresentado um exemplo que satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Vittorino Pata e não satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

4.1.2 Comparação com o Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong

Nessa seção, será apresentada uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong (Teorema 4), na qual ρ é contínua e define-se em $(0, \infty)$, que será utilizada na comparação com o Teorema 7.

Teorema 12. ***(Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong)*** *Considere X um espaço métrico completo e $f : X \to X$. Seja $\rho : (0, \infty) \to [0, \infty]$ uma função contínua satisfazendo a desigualdade $\rho(r) < r$ para todo $r > 0$. Se*

$$d(f(x), f(y)) \leq \rho(d(x, y)) \tag{26}$$

para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, então f possui um único ponto fixo x_* e $d(x_*, f^n(x)) \to 0$ para todo $x \in X$.

Observação 5. Pode-se redefinir $\rho(r)$ como $\sup\limits_{s \leq r} \rho(s)$ e, desta forma, assumir ρ uma função não decrescente.

Antes de relacionar os Teoremas de Vittorino Pata e Boyd-Wong, será demonstrado o seguinte lema.

Lema 13. *A função $\mu : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\mu(r) = \begin{cases} 0, & se\ r = 0, \\ r \ \underset{x \in [r,1]}{min} f(x), & se\ r \neq 0, \end{cases} \tag{27}$$

em que $f(x) = 1 - \dfrac{\rho(x)}{x}$ com $\rho : (0, \infty) \to [0, \infty)$ atendendo as condições do Teorema 12, é crescente, positiva, contínua e satisfaz

$$\mu(r) \leq 1 - \frac{\rho(r)}{r}, \forall r \in (0, 1].$$

Demonstração: Para simplificar a notação, serão definidas as funções $\xi, \zeta : (0,1] \to \mathbb{R}$, com as seguintes leis de formação: $\xi(r) = r$ e $\zeta(r) = \min_{x\in[r,1]} f(x)$. Sabe-se que ξ é uma função contínua e crescente e, na sequência, será demonstrado que ζ também é contínua.

Pode-se estabelecer algumas afirmações que, uma vez provadas, garantem o resultado do lema.

Afirmação 1. *A função ζ é contínua.*

Pelas hipóteses do Teorema 12, $f(x)$ é contínua no intervalo $(0,1]$, pois é constituída por uma soma e um quociente, com denominador estritamente positivo, de funções contínuas nesse domínio. A partir disso, fixado $x_0 \in (0,1]$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in (0,1], |y - x_0| < \delta \implies |f(y) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Com isso, dado $z \in (0,1]$, suponha, sem perda de generalidade, que $z > x_0$ (o outro caso é análogo), e tem-se que

$$|\zeta(x_0) - \zeta(z)| = \left|\min_{x\in[x_0,1]} f(x) - \min_{x\in[z,1]} f(x)\right|.$$

Além disso, considere z de forma que $|z - x_0| < \delta$, o que implica que $|f(z) - f(x_0)| < \epsilon$. Existem duas possibilidades para $\min_{x\in[x_0,1]} f(x)$: ou tal valor se encontra no intervalo $[z,1]$ ou em $[x_0,z]$. Para o primeiro caso, tem-se que

$$|\zeta(x_0) - \zeta(z)| = \left|\min_{x\in[z,1]} f(x) - \min_{x\in[z,1]} f(x)\right| = 0 < \epsilon,$$

e ζ é contínua em x_0. Para o segundo caso, observe primeiramente que ζ não é decrescente. De fato, dados $x_1, x_2 \in (0,1]$ tal que $x_1 < x_2$, então $[x_2,1] \subset [x_1,1]$ e, por consequência, $\min_{x\in[x_1,1]} f(x) \le \min_{x\in[x_2,1]} f(x)$, isto é, $\zeta(x_1) \le \zeta(x_2)$. Dessa forma, pode-se obter que

$$\forall x_1 \in [z,1] \implies f(x_1) \ge \zeta(x_0) = \min_{x\in[x_0,1]} f(x),$$

e concluir

$$\begin{aligned}\left|\min_{x\in[x_0,1]} f(x) - \min_{x\in[z,1]} f(x)\right| &= \min_{x\in[z,1]} f(x) - \min_{x\in[x_0,z]} f(x)\\ &\leq f(z) - \min_{x\in[x_0,z]} f(x) < \epsilon.\end{aligned}$$

A última passagem é válida, pois $\forall y \in [x_0, z]$, incluindo o valor em que f atinge o mínimo nesse intervalo, tem-se que $|y - z| < \delta$, o que implica $|f(y) - f(z)| < \epsilon$ pela continuidade de f. Logo, ζ é contínua.

Afirmação 2. *A função μ é crescente e positiva.*

Como dito anteriormente, ζ é uma função não decrescente e ξ é crescente em $(0, 1]$. Dessa forma, dados $r_1, r_2 \in (0, 1]$, com $r_1 < r_2$, tem-se $\zeta(r_1) \leq \zeta(r_2)$ e $\xi(r_1) < \xi(r_2)$, o que implica $\mu(r_1) = \xi(r_1).\zeta(r_1) < \xi(r_2).\zeta(r_2) = \mu(r_2)$. Na sequência, basta mostrar que μ é positiva para $r \neq 0$, obtendo-se a monotonicidade da mesma em $[0, 1]$. Com efeito, observe que, uma consequência imediata de $0 < \rho(x) < x$, para todo $x \in (0, 1]$, é que $f(x)$ é positiva nesse intervalo, o que implica na positividade de ζ no mesmo. Como ξ é positiva para $r \neq 0$, conclui-se que μ é o produto de termos positivos para todo $r \in (0, 1]$, sendo, portanto, positiva nesse intervalo.

Afirmação 3. *A função μ é contínua.*

Como visto anteriormente, ζ e ξ são contínuas em $(0, 1]$ e, por consequência, μ também é contínua em $(0, 1]$, por ser o produto destas duas funções. Logo, basta verificar a continuidade no ponto $r = 0$.

Como as funções positivas ρ e $id(x)$ são tais que $\rho(x) < x$ no intervalo $(0, 1]$, obtém-se que o quociente entre elas é limitado

$$0 < \frac{\rho(x)}{x} < 1.$$

Multiplicando-se a última expressão por -1 e somando 1 em ambas as desigualdades é obtido

$$0 < f(x) = 1 - \frac{\rho(r)}{r} < 1.$$

Como esse resultado foi obtido para todo ponto do intervalo $(0, 1]$, o mesmo é válido para ζ, pois cada valor obtido para ζ é o mínimo de f em um subintervalo de $(0, 1]$. Logo, ζ é limitada em $(0, 1]$. Além disso, sabendo que $\xi(r)$ tende a zero se r tende a zero, pode-se tomar o limite de μ com r tendendo a zero

$$\lim_{r\to 0} \mu(r) = \lim_{r\to 0} \xi(r)\zeta(r) = 0 = \mu(0),$$

obtendo-se o resultado desejado.

Afirmação 4. $\mu(r) \leq f(r)$ *para todo* $r \in (0, 1]$.

Para mostrar a desigualdade, basta observar que o mínimo de uma função contínua em um intervalo compacto é o menor valor atingido por essa função nesse intervalo. Dessa forma, para $0 < r \leq 1$, é obtido que

$$\mu(r) = r\zeta(r) \leq \zeta(r) = \min_{x\in[r,1]} f(x) \leq f(r) = 1 - \frac{\rho(r)}{r},$$

como desejado. $\square$

Observa-se que, mesmo fazendo uma extensão (contínua ou não) de f para o intervalo fechado [0,1], o resultado anterior permanece válido.

Teorema 14. *Se X for um espaço limitado, os Teoremas 7 e 12 são equivalentes.*

Demonstração: Para simplificar, suponha que $diam(X) \leq 1$. Convém notar que não há perda de generalidade nesta consideração, o que é explicado na Observação 7, página 46 de [6].

Primeiramente, será demonstrado que o Teorema 7 implica no Teorema 12. De fato, utilizando-se do diâmetro de X, e redefinindo Λ como $\Lambda := \Lambda 3^{\beta} \geq \Lambda[1 + ||x|| + ||y||]^{\beta}$, da relação (19), segue-se que

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \epsilon)d(x, y) + \Lambda\epsilon^{\alpha}\psi(\epsilon). \tag{28}$$

Seja também $\phi(r) = \psi^{-1}(\nu r)$, com $\nu > 0$ suficientemente pequeno, em que ψ é definida na página 101. Note que ϕ é crescente, pois é a inversa de ψ, que é crescente na vizinhança do zero. Além disso, tomando $\epsilon = \phi(d(x, y))$ na última desigualdade, obtêm-se

$$d(f(x), f(y)) \leq [1 - \phi(d(x, y))]d(x, y) + \mathit{\Lambda}[\phi(d(x, y))]^{\alpha}\psi(\phi(d(x, y))).$$

Considerando-se $d(x, y) = r$ e substituindo $\phi(r) = \psi^{-1}(\nu r)$ na composição $\psi \circ \phi$, a desigualdade é reescrita da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1 - \phi(r))r + \mathit{\Lambda}[\phi(r)]^{\alpha}\nu r.$$

A partir do termo à direita da última desigualdade, define-se a função ρ para $r \in (0, 1]$ (para tais valores pode-se definir tal ρ devido ao diâmetro de X). Com isso, define-se

$$\rho(r) = r - r\phi(r)[1 - \nu\mathit{\Lambda}[\phi(r)]^{\alpha-1}]. \tag{29}$$

Porém, por hipótese, sabe-se que ψ é contínua somente em uma vizinhança de 0 e, desta forma, algumas observações devem ser feitas para que ρ satisfaça as condições do Teorema 12. São elas:

- Qual escolha de ν garante a continuidade de ρ?
- Qual escolha de ν garante que $\rho(r)$ é positiva?
- Qual escolha de ν garante a condição $\rho(r) < r$?

Para satisfazer essas condições, serão definidos valores de ν_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, de modo que o mínimo entre eles faça com que as três questões sejam respondidas de modo satisfatório. Primeiramente, considere $\nu_1 > 0$ suficientemente pequeno de forma que a função crescente ψ^{-1} seja contínua em $[0, \nu_1]$. Tal escolha de ν_1 garante a continuidade de ρ para todo $r \in (0, 1]$.

Para a terceira situação, observe que, como r e $\phi(r)$ são positivos, é suficiente que o termo $1 - \nu\mathit{\Lambda}[\phi(r)]^{\alpha-1}$ seja positivo para obter $\rho(r) < r$. A partir dessa informação, precisa-se obter ν_2 tal que

$$1 - \nu_2\mathit{\Lambda}[\phi(r)]^{\alpha-1} > 0,$$

e isolando ν_2, segue-se que

$$\nu_2 < \frac{1}{\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}}.$$

Como se deseja que ν satisfaça a condição para todo $r \in (0,1]$, pode-se considerar o maior valor de $\phi(r)$ na expressão anterior. Devido a ϕ ser crescente, esse valor é obtido em $r = 1$. Com isso, pode-se definir $\nu_2 > 0$ por

$$\nu_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}.$$

Além disso, como será visto a seguir, para haver a positividade de ρ, respondendo à segunda pergunta, deve-se tomar ν suficientemente pequeno de forma que $\phi(1) < 1$, isto é,

$$\psi^{-1}(1\nu) = \psi^{-1}(\nu) = \phi(1) < 1.$$

Seja $\nu_3 > 0$ um valor que satisfaça essa condição. Tal valor sempre existirá, pois $\psi(0) = 0$ e ψ é contínua ao menos em uma vizinhança da origem. Desta forma, tome $\nu = \min\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$. Com isso, será demonstrado que este ν é suficiente para que ρ atenda as condições necessárias.

Para garantir a continuidade de ρ, basta notar que $0 < \nu \leq \nu_1$. Logo ψ^{-1} é contínua em $[0, \nu]$, o que faz com que ρ seja contínua em $(0, 1]$. Para a condição de ρ ser positiva, note que, por ϕ ser crescente, tem-se, $\phi(r) \leq \phi(1)$ para todo $r \in (0, 1]$. Multiplicando essa desigualdade por $-r$, segue-se que $-r\phi(r) \geq -r\phi(1)$. Substituindo tal desigualdade em (29), tem-se que

$$\rho(r) = r - r\phi(r) + r\phi(r)\nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1} > r - r\phi(r) \geq r\,[1 - \phi(1)]\,.$$

Como $\nu < \nu_3$, tem-se que $\phi(1) < 1$ e, portanto, $1 - \phi(1) > 0$. Como r também é positivo, obtém-se $\rho(r) > 0$ para todo $r \in (0, 1]$.

Afirmação 5. *Com a escolha de ν, a condição $\rho(r) < r$, $r \in (0,1]$, também é satisfeita.*

De fato, tem-se

$$\rho(r) = r - r\phi(r) + \nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha} r \leq r - r\phi(r) + \nu_2\Lambda[\phi(r)]^{\alpha} r.$$

Além disso, por ϕ ser crescente, tem-se que $\phi(r) \leq \phi(1)$ e, por $\alpha - 1 \geq 0$, segue-se que $[\phi(r)]^{\alpha-1} \leq [\phi(1)]^{\alpha-1}$, ou seja, $\left[\dfrac{\phi(r)}{\phi(1)}\right]^{\alpha-1} \leq 1$. A partir disso, substituindo o valor de ν_2

$$\begin{aligned}
\rho(r) &\leq r - r\phi(r) + \frac{1}{2\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}\Lambda[\phi(r)]^{\alpha} r \\
&\leq r - r\phi(r) + r\frac{\phi(r)}{2}\left[\frac{[\phi(r)]}{\phi(1)}\right]^{\alpha-1} \\
&\leq r - r\frac{\phi(r)}{2} \\
&= r\left[1 - \frac{\phi(r)}{2}\right].
\end{aligned}$$

Para finalizar, note que o termo $\left[1 - \dfrac{\phi(r)}{2}\right]$ é menor que 1, pois $0 < \phi(r) \leq \phi(1) < 1$, sendo a última desigualdade válida, visto que $\nu < \nu_3$ e ν_3 foi tomado de modo a garantir $\phi(1) < 1$. Utilizando tal fato e a última relação, é obtido que

$$\rho(r) \leq r\left[1 - \frac{\phi(r)}{2}\right] < r \cdot 1 = r.$$

Logo, a função ρ obtida satisfaz as condições do Teorema 12 para $r \in (0, 1]$. Porém, no Teorema, a função ρ é definida para $(0, \infty)$. Desta forma, a função pode ser estendida, com a mesma notação de ρ, da seguinte forma para $r > 1$

$$\rho(r) = \begin{cases} r - r\phi(r)[1 - \nu\Lambda[\phi(r)]^{\alpha-1}], & \text{se } 0 < r \leq 1, \\ 1 - \phi(1)[1 - \nu\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}], & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

o que define uma função contínua para todo $r \in (0, \infty)$ e constante para $r \geq 1$. Além disso, $\rho(r) > 0$ para $r > 1$, pois

$$\rho(r) = 1 - \phi(1) + \nu\Lambda[\phi(1)]^{\alpha} > 1 - \phi(1) > 0.$$

Para finalizar, basta mostrar que $\rho(r) < r$ para $r > 1$, o que acontece pois

$$\begin{aligned}\rho(r) &= 1-\phi(1)[1-\nu\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}] \leq 1-\phi(1)\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}}\Lambda[\phi(1)]^{\alpha-1}\right] \\ &\leq 1-\frac{\phi(1)}{2} < 1 < r.\end{aligned}$$

Portanto, o Teorema 7 implica no Teorema 12.

Para a recíproca, considere que a relação (26) seja válida nas condições do Teorema 12. Como demonstrado no Lema 13 é possível obter a função μ, definida em (27), contínua, positiva e crescente tal que

$$\mu(r) \leq 1-\frac{\rho(r)}{r}, r \in (0,1].$$

A partir disso, considere $x, y \in X$ com $d(x,y) = r \in (0,1]$, o que abrange todos os pontos de X devido a $diam(X) \leq 1$. A partir de (26) e da função μ, tem-se

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \rho(r) \leq r - r\mu(r) < r.$$

Dado $\epsilon \in [0,1]$, existem duas opções possíveis: $\mu(r) \geq \epsilon$ ou $\mu(r) < \epsilon$. Para o primeiro caso, tem-se que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq r - r\mu(r) \leq (1-\epsilon)r,$$

o que satisfaz a equação (28). Para o segundo caso, como μ é crescente, é possível obter sua inversa μ^{-1}. Aplicando-a à desigualdade $\mu(r) < \epsilon$, é obtido que $r < \mu^{-1}(\epsilon)$ e, com isso,

$$d(f(x), f(y)) \leq r \pm \epsilon r < (1-\epsilon)r + \epsilon\mu^{-1}(r).$$

Por consequência, define-se $\psi : [0,\alpha] \to [0,\infty)$ da forma

$$\psi(\epsilon) = \begin{cases} \mu^{-1}(\epsilon), & \text{se } \epsilon \leq \mu(1) \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

obtendo-se uma função não decrescente, que se anula com continuidade no zero. Como $\mu : [0,1] \to [0,1]$ é crescente, o seu valor máximo é $\mu(1)$. Como é necessário definir ψ em $[0,\alpha]$, é realizada a extensão constante, visto que $\psi(\mu(1)) = \mu^{-1}(\mu(1)) = 1$. Além disso, tomando $\Lambda = 1$, é possível obter a equação (28) da forma

$$d(f(x), f(y)) \leq (1-\epsilon)r + 1\epsilon\psi(\epsilon).$$

Portanto, o Teorema 12 também implica no Teorema 7, como desejado. □

Observação 6. Os resultados obtidos abordam a equivalência em relação à existência e à unicidade do ponto fixo em cada teorema e não em relação à taxa de convergência de cada um deles.

Outro fato importante é que não há perda de generalidade em se tomar X limitado na demonstração de que o Teorema 7 implica no Teorema 12, ou seja, essa implicação é válida para todo espaço métrico completo, limitado ou não, o que será apresentado no resultado a seguir.

Corolário 15. *Se X não for um espaço limitado, o Teorema 7 implica no Teorema 12.*

Demonstração: De fato, tome $z \in X$ arbitrário tal que $f(z) \neq z$. Com isso, defina $r = d(f(z), z)$ e considere a seguinte bola $B(x,r) = \{\xi \in X / d(x,\xi) \leq r\}$. Pela equação (26), segue que

$$\begin{aligned} d(f^n(z), f^{n-1}(z)) &= d(f(f^{n-1}(z)), f(f^{n-2}(z))) \\ &\leq \rho(d(f^{n-1}(z), f^{n-2}(z))) \leq \rho^2(d(f^{n-2}(z), f^{n-3}(z))), \end{aligned}$$

e procedendo recursivamente

$$d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \leq \rho^n(d(f(z), z)) = \rho^n(r).$$

Pode-se obter uma sequência decrescente e limitada, isto é, convergente, a partir de sucessivas composições de ρ, pois

$$0 \leq \rho^n(r) = \rho(\rho^{n-1}(r)) \leq \rho^{n-1}(r) \leq \rho^{n-2}(r) \leq ... \leq \rho(r) \leq r.$$

Desta forma, pela convergência da sequência e pela continuidade de ρ, pode-se obter

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \rho^{n+1}(r) = \lim_{n\to\infty} \rho(\rho^n(r)) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} \rho^n(r)\right) = \rho(\sigma),$$

ou seja, σ é ponto fixo de ρ. Porém, como $0 < \rho(r) < r$ para todo r, tem-se pelo Teorema do Confronto que o único ponto fixo de ρ ocorre em $r = 0$. Desta forma, $\sigma = 0$ e tem-se que

$$d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \leq \rho^n(d(f(z), z)) = \rho^n(r) \to 0.$$

Visto que a função ρ é não decrescente, como apresentado na Observação 5, defina $x_0 = f^n(z)$ e, como $d(f^n(z), f^{n-1}(z)) \to 0$ e $1 - \rho(1) > 0$, pode-se tomar n suficientemente grande tal que

$$d(f(x_0), x_0) = d(f(f^n(z)), f^n(z)) = d(f^{n+1}(z), f^n(z)) \leq 1 - \rho(1). \tag{30}$$

Afirmação 6. *A desigualdade (30) implica que* $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$.

De fato, primeiramente será demonstrado que $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1))$. Dado $y \in f(B(x_0, 1))$, existe $x \in B(x_0, 1)$ tal que $y = f(x)$. Para tal x, vale $d(x, x_0) < 1$. Juntando essa informação à hipótese (26) do Teorema do Ponto Fixo de Boyd-Wong, tem-se

$$d(y, f(x_0)) = d(f(x), f(x_0)) \leq \rho(d(x, x_0)) \leq \rho(1) \implies y \in B(f(x_0), \rho(1)),$$

em que utilizou-se o fato de ρ ser não decrescente. Portanto, $f(B(x_0, 1)) \subset B(f(x_0), \rho(1))$.

Resta ver que $B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$. Dado $x \in B(f(x_0), \rho(1))$, tem-se que $d(x, f(x_0)) < \rho(1)$. Utilizando a desigualdade triangular e o fato de $d(f(x_0), x_0) \leq 1 - \rho(1)$, segue-se que

$$d(x, x_0) \leq d(x, f(x_0)) + d(x_0, f(x_0)) < \rho(1) + 1 - \rho(1) = 1 \implies x \in B(x_0, 1).$$

Logo, $B(f(x_0), \rho(1)) \subset B(x_0, 1)$.

A partir destes resultados, pode-se concluir que, tomando $z \in X$ arbitrário, pode-se montar a sequência convergente $(f^n(z))$. Desta forma, para n suficientemente grande, pode-se obter um ponto x_0 tal que $f(B(x_0, 1)) \subset B(x_0, 1)$, ou seja, é possível tratar X como um espaço limitado, como foi feito no Teorema 14. Resumidamente, pode-se substituir todo o espaço X pela bola unitária $B(x_0, 1)$.
□

Observação 7. Na próxima seção, será apresentado um espaço ilimitado no qual se define uma função para a qual a existência de ponto fixo pode ser garantida pelo Teorema 7 mas não pelo Teorema 12. Isso ocorre pois o Teorema 12, em certas situações, pode não conseguir lidar com a ocorrência simultânea de $d(x, y) \ll 1$ e $||x|| + ||y|| \gg 1$ para dois pontos x, y do espaço métrico.

4.2 Exemplo

Para finalizar esta seção, será exibida uma função que não satisfaz as condições suficientes dos Teoremas do Ponto Fixo de Banach e de Boyd-Wong, mas satisfaz as condições suficientes do Teorema 7. Primeiramente, serão apresentados alguns lemas, quase todos envolvendo apenas conceitos de cálculo. De posse de tais lemas, será possível estabelecer o exemplo pretendido.

Lema 16. *A função $F : [1, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por*

$$F(x, r) = 2\left[\sqrt{x + r} - \sqrt{x}\right] - 4\left[\sqrt[4]{x + r} - \sqrt[4]{x}\right], \tag{31}$$

é positiva para todo $x \geq 1$ e $r > 0$.

Demonstração: De fato, rearranjando $F(x,r)$ é obtido que

$$\begin{aligned}
F(x,r) &= 2\left[\sqrt{x+r}-\sqrt{x}\right]-4\left[\sqrt[4]{x+r}-\sqrt[4]{x}\right]\\
&= 2\left[\sqrt{x+r}-2\sqrt[4]{x+r}\right]-2\left[\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}\right]\\
&= 2\left[\sqrt[4]{x+r}-1\right]^2-2-2\left[\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}\right]\\
&= 2\left[\sqrt[4]{x+r}-1\right]^2-2\left[\sqrt[4]{x}-1\right]^2\\
&= 2\left\{\left[\sqrt[4]{x+r}-1\right]^2-\left[\sqrt[4]{x}-1\right]^2\right\}\\
&= 2\left(\sqrt[4]{x+r}-1+\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x+r}-1-\sqrt[4]{x}+1\right)\\
&= 2\left(\sqrt[4]{x+r}-1+\sqrt[4]{x}-1\right)\left(\sqrt[4]{x+r}-\sqrt[4]{x}\right).
\end{aligned}$$

Note que, como $x \geq 1$ e $r > 0$, tem-se um valor positivo no primeiro parênteses, pois é a soma de um termo positivo $(\sqrt[4]{x+r}-1)$ com um termo não negativo $(\sqrt[4]{x}-1)$. No segundo parênteses também há um valor positivo, pois, devido a $x \geq 1$ e $r > 0$, tem-se

$$\sqrt[4]{x+r} > \sqrt[4]{x}.$$

Portanto, $F(x,r)$ é o produto de três fatores positivos, ou seja, é positiva. □

Lema 17. *A desigualdade*

$$4\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right) \leq 2\left(\sqrt{1+y}-1\right)-\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}} \tag{32}$$

é válida para todo $y > 0$.

Demonstração: Para começar, defina a função $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$h(y) = \sqrt[4]{1+y}-1-\frac{y}{\sqrt{8}\,(2+y)^{\frac{3}{4}}}.$$

A partir da função “Nminimize" do software “Wolfram Mathematica," foi obtido que o ponto de mínimo global de h é o ponto $y = 0$, no qual $h(y) = 0$. Portanto, $h(y) \geq 0$. Restringindo a função para o domínio $(0,\infty)$, h continua não negativa, e pode-se obter a expressão

$$\sqrt[4]{1+y}-1-\frac{y}{\sqrt{8}\,(2+y)^{\frac{3}{4}}} \geq 0.$$

Reorganizando os termos, é obtido que

$$\sqrt[4]{1+y}-1 \geq \frac{y}{\sqrt{8}\,(2+y)^{\frac{3}{4}}}.$$

Note que os dois lados da expressão são não negativos. Assim, é possível elevar os dois lados ao quadrado, obtendo

$$\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right)^2 \geq \frac{y^2}{8(2+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Além disso, multiplicando-se ambos os lados por -2 e reescrevendo um dos termos $\sqrt[4]{1+y}-1$ de forma conveniente, tem-se

$$2\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right)\left(-\sqrt[4]{1+y}+2-1\right) \leq -\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}}.$$

Na sequência, reorganizando o lado direito, é obtido que

$$4\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right)-2\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right)\left(\sqrt[4]{1+y}+1\right) \leq -\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}},$$

e realizando o produto da soma pela diferença, tem-se

$$4\left(\sqrt[4]{1+y}-1\right) \leq 2\left(\sqrt{1+y}-1\right)-\frac{y^2}{4(2+y)^{\frac{3}{2}}},$$

como desejado. □

Lema 18. *Para todo $\epsilon \in [0,1], r>0$ e $x \geq 1$, a seguinte desigualdade é válida*

$$-\epsilon r+\epsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}}+F(x,r) \geq F(x,r)-\frac{r^2}{4(r+2x)^{\frac{3}{2}}} \geq 0, \tag{33}$$

em que $F(x,r)$ é definida em (31).

Demonstração: Para a primeira desigualdade, será utilizado o quadrado da diferença considerando $a = 2\epsilon(2x+r)^{\frac{3}{2}}$ e $b = r$. A partir disso, é obtido que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 4\epsilon^2(2x+r)^3 - 4\epsilon r(2x+r)^{\frac{3}{2}} + r^2.$$

Subtraindo ambos os lados por r^2 e os dividindo por $4\left(2x+r\right)^{\frac{3}{2}}$, obtêm-se

$$-\epsilon r + \epsilon^2\left(2x+r\right)^{\frac{3}{2}} \geq -\frac{r^2}{4\left(2x+r\right)^{\frac{3}{2}}},$$

e basta somar $F(x,r)$ em ambos os lados para obter a desigualdade desejada.

Para a segunda desigualdade de (33), será utilizada a desigualdade (32), que foi demonstrada no Lema 17. Como essa relação está definida para todo $y > 0$, será realizada a mudança de variável $y = \dfrac{r}{x}$ em (33). Isso é possível pois $r > 0$ e $x \geq 1$. Dessa forma, é obtido que

$$4\left(\sqrt[4]{1+\frac{r}{x}}-1\right) \leq 2\left(\sqrt{1+\frac{r}{x}}-1\right) - \frac{r^2}{4x^2(2+\frac{r}{x})^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $x \geq 1$, por consequência, $\sqrt[4]{x} \geq 1$. Consequentemente, pode-se multiplicar somente o termo da direita por $\sqrt[4]{x}$ sem afetar a desigualdade, obtendo

$$4\left[\sqrt[4]{1+\frac{r}{x}}-1\right] \leq \sqrt[4]{x}\left[2\left(\sqrt{1+\frac{r}{x}}-1\right) - \frac{r^2}{4x^2(2+\frac{r}{x})^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt[4]{x}$, tem-se

$$4\sqrt[4]{x}\left[\sqrt[4]{1+\frac{r}{x}}-1\right] \leq \sqrt{x}\left[2\left(\sqrt{1+\frac{r}{x}}-1\right) - \frac{r^2}{4x^2(2+\frac{r}{x})^{\frac{3}{2}}}\right],$$

e reorganizando os termos e as raízes, é obtido que

$$2\left(\sqrt{x+r}-\sqrt{x}\right) - 4\left(\sqrt[4]{x+r}-\sqrt[4]{x}\right) - \frac{r^2}{4\left(2x+r\right)^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

ou seja,

$$F(x,r) - \frac{r^2}{4\,(2x+r)^{\frac{3}{2}}} \geq 0,$$

como desejado. □

Após esses resultados, pode-se trabalhar com o exemplo propriamente dito.

Exemplo 4. Considere a função $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ dada por

$$f(x) = -2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}.$$

Essa função possui um único ponto fixo, dado por $f(1) = 1$. O gráfico dessa função é apresentado, em verde e linha contínua, na Figura 3, em que o gráfico (a) apresenta a função f em seu domínio e o gráfico (b) apresenta f em valores próximos de seu ponto fixo. Para comparação, foi adicionada a reta $g(x) = x$, em vermelho e linha tracejada, nos dois gráficos.

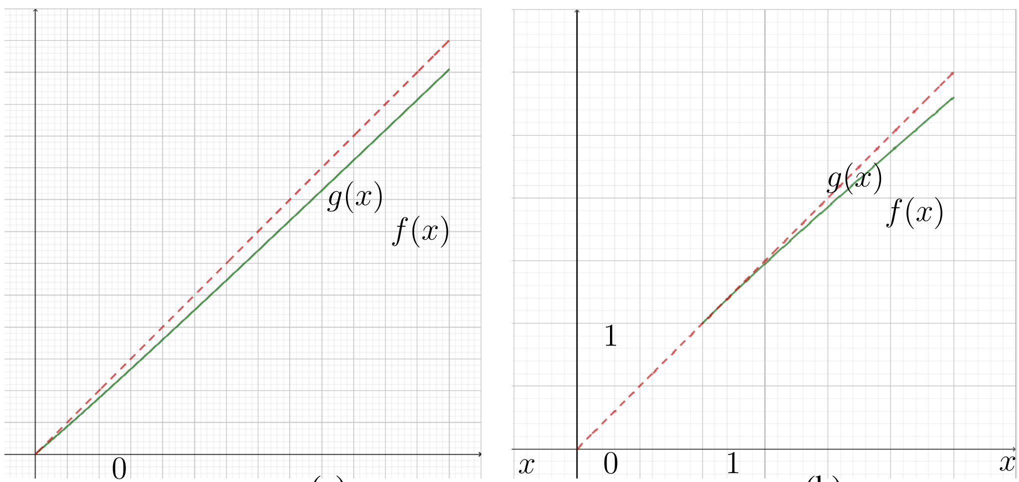

Figura 3: Gráfico da função f.

O comportamento de f pode ser melhor compreendido a partir da análise de sua derivada, dada por

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

O gráfico da derivada é apresentado em verde e linha contínua na Figura 4, juntamente com a função constante $h(x) = 1$, em vermelho e linha tracejada, para comparação. Observe que $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in (1, \infty)$ e, desta forma, f é uma função crescente, mas que apresenta crescimento menor que o da função identidade. Portanto, as funções f e identidade não se interceptam novamente, fazendo com que o ponto fixo de f seja único.

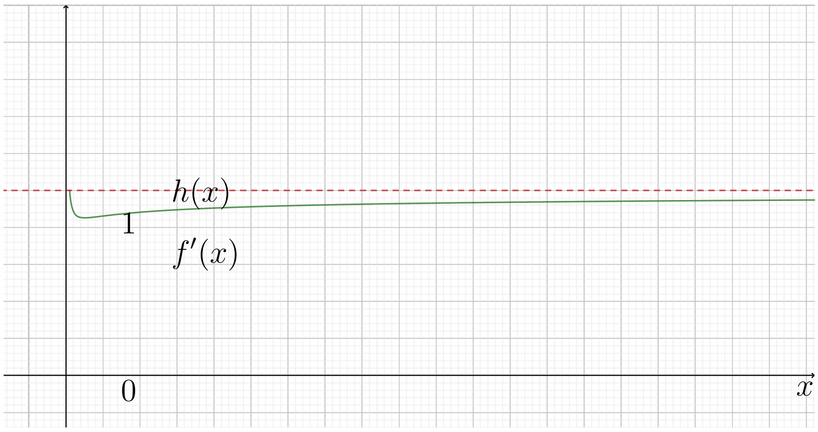

Figura 4: Gráfico da derivada de f.

Para os resultados seguintes, considere $x \geq 1$ e $r > 0$. Realizando a subtração de $f(x+r)$ por $f(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x+r) - f(x) &= -2 + x + r - 2\sqrt{x+r} + 4\sqrt[4]{x+r} - \\ &- \left(-2 + x - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}\right) \\ &= r - \left[2\left(\sqrt{x+r} - \sqrt{x}\right) - 4\left(\sqrt[4]{x+r} - \sqrt[4]{x}\right)\right] \\ &= r - F(x,r), \end{aligned}$$

em que $F(x, r)$ é definida em (31) é positiva como demonstrado no Lema 16. Utilizando dessa equação, mostra-se que f não é contração, ou seja, não se pode aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach à essa função. Com efeito, suponha que f seja contração e exista $\lambda \in [0, 1)$ tal que, para todo $x, y \in [1, \infty)$, tem-se

$$d(f(y), f(x)) = |f(y) - f(x)| \leq \lambda |y - x| = \lambda d(y, x).$$

Considerando $f(y) = f(x + r)$, segue-se que

$$|f(x + r) - f(x)| \leq \lambda |x + r - x| = \lambda |r|,$$

e, observando que f é crescente e $r > 0$, pode-se retirar os módulos da equação anterior. Além disso, substituindo $f(x + r) - f(x) = r - F(x, r)$, tem-se

$$r - F(x, r) \leq \lambda r,$$

que pode ser reorganizada da forma

$$(1 - \lambda)r \leq F(x, r).$$

Na sequência, tomando x tendendo a infinito, a função $F(x, r)$ tende a zero. Desta forma, é obtido que

$$(1 - \lambda)r \leq 0,$$

e pode-se multiplicar por $\frac{1}{r}$ em ambos os lados da desigualdade, pois $r > 0$. Com isso,

$$(1 - \lambda) \leq 0 \implies \lambda \geq 1,$$

contradição. Portanto, f não é uma contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach não pode ser aplicado a essa função.

Na sequência, será demonstrado que f não possui uma função ρ como definida no Teorema de Boyd-Wong. De fato, suponha que exista uma função ρ como a definida no Teorema 12, tal que $\rho(r) < r,\ \forall r \in (0, \infty)$. Dessa forma, segue-se que

$$r - F(x, r) = f(x + r) - f(x) \leq \rho(x + r - x) = \rho(r) < r,$$

e tomando novamente x tendendo a infinito, é obtido que

$$r \leq \rho(r) < r,$$

contradição. Portanto, não existe ρ tal que f satisfaça as condições do Teorema do

Ponto Fixo de Boyd-Wong. Note que, quando toma-se o limite de x tendendo ao infinito, ocorre o que foi discutido na Observação 7, mostrando onde o Teorema 12 pode falhar.

Porém, será visto que f satisfaz as condições do Teorema 7. Utilizando da desigualdade (33), demonstrada no Lema 18, obtém-se

$$-F(x,r) \leq -\epsilon r + \epsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}},$$

e segue-se que

$$|f(x+r)-f(x)| = r-F(x,r) \leq r-\epsilon r+\epsilon^2(2x+r)^{\frac{3}{2}} \leq r(1-\epsilon)+\epsilon^2(1+2x+r)^{\frac{3}{2}},$$

o que pode ser reescrito da forma

$$|f(x+r)-f(x)| \leq r(1-\epsilon) + \epsilon^{\frac{3}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}(1+|x+r|+|x|)^{\frac{3}{2}}.$$

A última relação satisfaz as condições de (19) com $x_0 = 0$, $\beta = \dfrac{3}{2}$, $\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\varLambda = 1$ e $\psi(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2}}$ sendo ψ uma função crescente com continuidade no zero. Desta forma, pode-se aplicar o Teorema 7 à função f para garantir a existência de um único ponto fixo que, por inspeção, já foi apresentado ser $x = 1$.

Além disso, note que, como $\psi(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2}}$, já se obtém a condição do Corolário 11, com $\vartheta = 2$. Com efeito, substituindo na equação (25), tem-se

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{2^2C}{n^{2-1}} = \frac{4C}{n}, \tag{34}$$

e a estimativa da taxa de convergência obtida é da ordem de $\dfrac{1}{n}$. □

Referências

[1] L. M. Blumenthal. *Theory and Applications of Distance Geometry*. Chelsea Publishing Company, New York, 2 edition, 1953.

[2] D. W. Boyd and J. S. W. Wong. *On Nonlinear Contractions*. Proceedings of

the American Mathematical Society, 20(2):458–464, 1969.

[3] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, 1989.

[4] E. L. Lima. *Curso de Análise, Vol. 1*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 14 edition, 2017.

[5] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 5 edition, 2017.

[6] D. M. Oliveira. *Enfraquencendo a Hipótese de Contração do Teorema do Ponto Fixo de Banach*, 2019. 57 f. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

[7] V. Pata. *A Fixed Point Theorem in Metric Spaces*. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 10(2):299–305, 2011.

[8] R. O. Pereira, W. M. Ferreira, and E. M. Martins. *A Equivalência entre o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Valor Intermediário* . RMAT: Revista da Matemática da UFOP, 05(1):108–119, 2018.

[9] M. A. Santos, W. M. Ferreira, and E. M. Martins. *Os Teoremas das Panquecas*. RMAT: Revista da Matemática da UFOP, 06(1):102–125, 2019.