Determinação de Indicadores Educacionais do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais via Cadeias Absorventes de Markov

Felipe Gomes Alves felipegalves1999@gmail.com
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, Rio Pomba, MG, Brazil

João Vitor Gomes Martins joaovictor.if2018@gmail.com
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, Rio Pomba, MG, Brazil

Hernando José Rocha Franco hernando.franco@ifsudestemg.edu.br
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, Rio Pomba, MG, Brazil

Liliane Lopes Cordeiro Pereira liliane.cordeiro@ifsudestemg.edu.br
Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais, Rio Pomba, MG, Brazil

Resumo

Uma cadeia de Markov é um caso particular dos processos estocásticos. Suas aplicações aparecem em diversas áreas tais como a física, meteorologia, biologia, teoria dos jogos. Dentro da teoria das cadeias de Markov, há um caso especial denominado cadeia absorvente de Markov, que fornece resultados com grande potencial de aplicação. Desta forma, este trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação das cadeias absorventes de Markov, que consiste em determinar indicadores educacionais do ensino médio dos campus do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais. Para realizar esta aplicação, utilizou-se dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Posteriormente, os resultados obtidos para os campus foram comparados, mostrando que não há muita variação entre indicadores educacionais de campus distintos.

Palavras-chave

Cadeias de Markov, Probabilidade de transição, Matriz de transição, Estados absorventes.

1 Introdução

De acordo com [5], o surgimento das cadeias de Markov está associado ao matemático russo Andrei Andreyevich Markov. Este, iniciou uma teoria para analisar processos que tinham a propriedade de “perda de memória", isto é, processos em que as experiências anteriores não influenciam nas experiências futuras.

Hoje, sabe-se que as cadeias de Markov são um tipo especial de processos estocásticos. Para [1], um processo estocástico é um modelo matemático que evolui ao longo do tempo de forma probabilística.

Este tipo de processo estocástico possibilita a análise e previsão de diversos sistemas. Segundo [7] "Por si só, as Cadeias de Markov tem um vasto campo de aplicação nas mais diversas áreas de conhecimento, tendo precisão considerável nos resultados encontrados e papel destacável no campo das probabilidades."

Um tipo especial das cadeias de Markov que é utilizada em diversas aplicações, é a cadeia absorvente de Markov. Suas aplicações permitem analisar situações que vão desde a determinação de indicadores educacionais, como mostra este trabalho e a obra [8], até a análise do processo produtivo de filé congelado de pescada, como pode ser observado na obra [3].

Utilizando-se da teoria das cadeias de Markov, este trabalho tem por objetivo determinar, de forma probabilística, indicadores educacionais do Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais (IF SUDESTE MG).

Para desenvolver tal trabalho, recorreu-se aos dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) dos anos de 2016, 2017 e 2018. Os dados utilizados foram as taxas de aprovação, reprovação e abandono do ensino médio do IF SUDESTE MG dos campus Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba. É importante destacar que o campus Santos Dumont não foi utilizado por não haver dados suficientes para a análise. Além disso, foram desconsiderados os campus Bom Sucesso, Cataguases, Manhuaçu, São João del-Rei e Ubá, por não conterem o ensino médio.

Os indicadores educacionais que foram determinados são: o tempo médio esperado de permanência em cada série, o tempo médio necessário para sair do ensino médio e as probabilidades de abandono e término.

2 Referencial Teórico

Neste tópico, apresenta-se, de forma breve, a teoria necessária para a compreensão da aplicação que será abordada a seguir.

Definição 2.1. **(Probabilidade)** Sejam E um experimento aleatório e A

um evento do espaço amostral Ω. A probabilidade do evento A ocorrer é uma função $P(A)$ que associa um evento a um número real, satisfazendo as seguintes condições:

- $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \Omega$;
- $P(\Omega) = 1$;
- Se A e B são dois eventos mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, tem-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Definição 2.2. (Probabilidade Condicional) Sejam E um experimento aleatório e A, B eventos do espaço amostral Ω, em que $P(B) > 0$. Assim, a probabilidade condicional de A ocorrer dado que B ocorreu é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definição 2.3. (Variáveis Aleatórias) Seja E um experimento aleatório com espaço amostral Ω. Diz-se que uma função x é uma variável aleatória, se associar cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número real, $x(\omega)$.

Definição 2.4. (Processos Estocásticos) Define-se formalmente um Processo estocástico $X = \{x_t | t \in T\}$ como uma família de variáveis aleatórias. T é denominado espaço de parâmetros, que pode ser contínuo, com $T = [0, \infty[$, ou discreto, com $T = \{1, 2, 3, ...\}$.

No processo X, todas as variáveis estão definidas sobre o mesmo espaço amostral e o contradomínio de todas as variáveis aleatórias é denominado espaço de estados do processo e é denotado por E. Se E é discreto, diz-se que o processo estocástico é discreto, e se E é contínuo, diz-se que o processo é contínuo.

Algumas situações podem ser modeladas por processos estocásticos, como por exemplo, variações de níveis de estoque, variações na qualidade de produtos, a evolução do número de desempregados num país, dentre outras.

Definição 2.5. **(Processos Markovianos)** Um processo estocástico é denominado processo markoviano quando:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$$

Isso significa que a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente, é igual a probabilidade de qualquer evento futuro, dado apenas o estado presente. Em outras palavras, um processo estocástico é denominado processo markoviano quando o estado futuro depende apenas do estado presente.

Definição 2.6. **(Cadeia de Markov)** Uma Cadeia de Markov é um processo markoviano que está definido em espaço de estados discretos E.

Definição 2.7. **(Probabilidade de transição)** Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados E e seja $x, y \in E$. A probabilidade

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x),$$

é conhecida como probabilidade de transição do estado x no tempo n ao estado y no tempo $n + 1$.

Se para cada X_n e X_{n+1} tem-se que:

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P(X_1 = y|X_0 = x)$$

então, as probabilidades de transição são chamadas de estacionárias. Isto significa que a probabilidade de transição de um determinado estado para outro não muda com o passar do tempo. Esta probabilidade também pode ser denotada como $p_{x,y}$.

Teorema 2.1. Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov com probabilidades de transição estacionárias e tome $x, y \in E$, com $E = \{1, 2, ..., n\}$. Então

$$p_{x,y} \geq 0$$

e

$$\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$$

Demonstração: Como $p_{x,y}$ representa uma probabilidade, então satisfaz a primeira condição da definição 2.1., ou seja, $p_{x,y} \geq 0$. E

$\sum_{y \in E} p_{x,y} = P(X_{n+1} = 1|X_n = x) + P(X_{n+1} = 2|X_n = x) + \ldots + P(X_{n+1} = x|X_n = x) + \ldots + (X_{n+1} = y|X_n = x) + \ldots + (X_{n+1} = n|X_n = x)$

Como a soma percorre todo o espaço amostral, dado que $X_n = x$, então $\sum_{y \in E} p_{x,y} = P(\Omega) = 1$

As probabilidades de transição de uma Cadeia de Markov podem ser descritas de forma simplificada, por meio de uma matriz, denominada matriz de transição.

Definição 2.8. **(Matriz de transição)** Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, ..., n\}$ e com probabilidades de transição estacionárias. Assim, a matriz de transição associada a essa Cadeia de Markov é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,n} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,0} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pelo teorema 2.1. tem-se que a soma dos elementos das linhas da matriz de transição será sempre igual a 1.

Além das probabilidades de transição e da matriz de transição, uma Cadeia de

Markov pode possuir uma distribuição inicial de probabilidade.

Definição 2.9. (Distribuição inicial de probabilidade) Seja $\{X_n\}$ uma Cadeia de Markov com espaço de estados E e com probabilidades de transição estacionárias. A função $\pi(x)$, $x \in E$ definida por

$$\pi(x) = P(X_0 = x)$$

é denominada distribuição inicial de probabilidade. Essa função fornece as probabilidades associadas a cada estado no tempo 0.

As cadeias de Markov também possuem uma classificação acerca de seus estados. Esta classificação leva em consideração as probabilidades de transição entre tais estados. Neste trabalho, será apresentado apenas uma classificação, conhecida como estado absorvente.

Estado absorvente: Um estado k é classificado como absorvente quando, uma vez alcançado, o processo nunca saíra deste estado, ou seja, $p_{k,k} = 1$.

O conceito de estados absorventes permite analisar o principal ponto da teoria para este artigo, que são as cadeias absorventes de Markov. Este novo tipo de Cadeia de Markov necessita de que a matriz de transição seja organizada de forma diferente, levando em conta a transição entre estados absorventes e não absorventes. Desta forma, a matriz de transição deve possuir o seguinte formato:

$$P = \begin{pmatrix} N & \vdots & A \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ O & \vdots & I \end{pmatrix}$$

em que:

- N é um bloco quadrado cujas as linhas e colunas são compostas por estados não absorventes;
- A é um bloco cujas as linhas são compostas por estados não absorventes e as

colunas por estados absorventes;

- O é um bloco nulo, cujas as linhas são formadas por estados absorventes e as colunas por estados não absorventes;

- I é um bloco quadrado (matriz identidade) cujas as linhas e colunas são formadas por estados absorventes.

De acordo com [3], essa abordagem pode fornecer o número esperado de passos antes de o processo ser absorvido, o número esperado de vezes que o processo se encontra em qualquer estado não absorvente e a probabilidade de absorção por qualquer estado absorvente.

Segundo [2], a matriz $(I - N)^{-1}$ fornece o número esperado de passos que um processo está em cada estado não absorvente, antes da absorção e $(I - N)^{-1} \times A$ fornece a probabilidade de absorção dos estados absorventes.

O aprofundamento dos conceitos apresentados encontram-se nas obras [9] e [6].

3 Metodologia

Para determinar os indicadores educacionais dos quatro campus do IF SUDESTE MG (Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba), analisou-se os dados do Inep [4] de três anos consecutivos (2016, 2017, 2018) de cada campus. Os dados analisados foram as taxas de aprovação, reprovação e abandono das três séries de Ensino Médio. Ao fim da análise, foram calculadas as médias desses três anos, em cada campus, e os dados podem ser verificados na Tabela 1.

Tabela 1: Indicadores educacionais em % dos campus do IF SUDESTE MG

Campus	Aprovação Séries			Reprovação Séries			Abandono Séries		
	1º ano	2º ano	3º ano	1º ano	2º ano	3º ano	1º ano	2º ano	3º ano
Barbacena	90	93,9	97,533	9,267	5,867	1,433	0,733	0,233	1,034
Juiz de Fora	80,3	86,433	98,967	17,533	11,967	1,033	2,167	1,6	0
Muriaé	82,133	94,433	97,266	16,833	3,567	1,667	1,034	2	1,067
Rio Pomba	85,133	87,533	97,733	10,1	9,833	1,567	4,767	2,634	0,7

Fonte: Autor

Utilizando as cadeias absorventes de Markov, temos que a matriz de transição para o ensino médio, cujo os estados são 1º ano, 2º ano, 3º ano, término e abandono, é dada por:

$$P_k = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & 0 & p_{1,5} \\ 0 & p_{2,2} & p_{2,3} & 0 & p_{2,5} \\ 0 & 0 & p_{3,3} & p_{3,4} & p_{3,5} \\ 0 & 0 & 0 & p_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{5,5} \end{pmatrix}$$

em que $k = \{$Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba$\}$.

As probabilidades de transição são identificadas como:

- $p_{i,i}$ com $i = 1, 2, 3$ representa a probabilidade de permanecer na mesma série;
- $p_{i,j}$ com $i = 1, 2$ e $j = i + 1$ representa a probabilidade de passar para a próxima série;
- $p_{3,4}$ representa a probabilidade de término do ensino médio;
- $p_{i,5}$ com $i = 1, 2, 3$ representa a probabilidade de abandono na série i;
- $p_{i,i}$, com $i = 4, 5$ representa probabilidades de absorção, em que $p_{4,4} = p_{5,5} = 1$.

É fácil verificar que os estados 1º ano, 2º ano e 3º ano não são absorventes enquanto os estados término e abandono são absorventes. Assim, conhecendo o formato da matriz de transição para cada campus, pode-se obter os seguintes resultados:

- Os tempos médios esperados de permanência em cada série. Para isso, analisa-se os elementos diagonais da matriz $O_k = (I - N)^{-1}$, com $k = \{$Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba$\}$;
- Os tempos médios necessários para cada série (estado) ser absorvida. Para calcular esses tempos médios, soma-se as linhas da matriz O_k, com $k = \{$Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba$\}$;

- As probabilidades de término e abandono, através da matriz $R_k = (I - N)^{-1} \times A = O_k \times A$, em que $k = \{$Barbacena, Juiz de Fora, Muriaé e Rio Pomba$\}$.

4 Resultados e Discussões

Neste tópico, será apresentado dados obtidos através da metodologia apresentada anteriormente, assim como comparações, afim de trazer conclusões para os dados.

4.1 Apresentação e resultados dos Dados

Para cada campus do IF SUDESTE MG, pode-se obter os seguintes resultados:

Barbacena

Para o campus Barbacena, tem-se a seguinte matriz de transição.

$$P = \begin{pmatrix} 0,09267 & 0,9 & 0 & 0 & 0,00733 \\ 0 & 0,05867 & 0,939 & 0 & 0,00233 \\ 0 & 0 & 0,01433 & 0,97533 & 0,01034 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conhecendo a matriz de transição, pode-se determinar os tempos médios esperados de permanência em cada série por meio dos elementos diagonais da matriz $O = (I - N)^{-1}$.

$$O = \begin{pmatrix} 1,10214 & 1,05375 & 1,00385 \\ 0 & 1,06233 & 1,01203 \\ 0 & 0 & 1,01454 \end{pmatrix}$$

Da matriz O, verifica-se que os tempos médios esperados (em anos) de permanência no 1º ano, 2º ano, 3º ano são, respectivamente, $1,10214$, $1,06233$, $1,01454$. Já o tempo médio necessário para cada estado ser absorvido, isto é, o tempo médio necessário (em anos) para que o aluno da i-ésima série saia do sistema, é dado pelo vetor:

$$\begin{pmatrix} 3,15974 \\ 2,07436 \\ 1,01454 \end{pmatrix}$$

que é obtido através da soma das linhas de O. Desta forma, um aluno do 1º ano demora, em média, $3,15974$ anos para sair do ensino médio. Um aluno do 2º ano demora, em média, $2,07436$ anos e um do 3º ano gasta, em média, $1,01454$ anos.

Para determinar as probabilidades de término e abandono, utiliza-se a matriz dada por $R = O \times A$. Logo,

$$R = \begin{pmatrix} 0,97909 & 0,02091 \\ 0,98706 & 0,01294 \\ 0,98951 & 0,01049 \end{pmatrix}$$

Os elementos da primeira coluna da matriz indicam as probabilidades de término e os elementos da segunda coluna indicam as probabilidades de abandono. Desta forma, um aluno do 1º ano possui $0,97909$ de chance de terminar o ensino médio e $0,02091$ de chance de abandonar. Um aluno do 2º ano possui $0,98706$ de chance de terminar e 0.01294 de chance de abandonar. E um aluno do 3º ano possui 0.98951 de chance de terminar e 0.01049 de chance de abandonar.

Juiz de Fora

A matriz de transição associada ao campus de Juiz de Fora é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0,17533 & 0,80300 & 0 & 0 & 0,02167 \\ 0 & 0,11967 & 0,86433 & 0 & 0,01600 \\ 0 & 0 & 0,01033 & 0,98967 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, pode-se determinar a matriz O.

$$O = \begin{pmatrix} 1,21261 & 1,10609 & 0,966 \\ 0 & 1,13594 & 0,99207 \\ 0 & 0 & 1,01044 \end{pmatrix}$$

Assim o tempo médio esperado de permanência nos estados 1º ano, 2º ano, 3º ano são, respectivamente, $1,21261,\quad 1,13594,\quad 1,01044$ anos. Daí, o vetor de tempo médio necessário para cada estado ser absorvido é:

$$\begin{pmatrix} 3,2847 \\ 2,12801 \\ 1,01044 \end{pmatrix}$$

Isto indica que um aluno do 1º ano gasta, em média, $3,2847$ anos para sair do ensino médio. Um aluno do 2º ano demora, em média, $2,12801$ anos e um do 3º ano gasta, em média, $1,01044$ anos.

Por fim, a matriz que determinar as probabilidades de término e de abandono é:

$$R = \begin{pmatrix} 0,95603 & 0,04397 \\ 0,98183 & 0,01817 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

É importante verificar nesta matriz que um aluno do 3º ano do ensino médio deste campus não possui probabilidade de abandono, ou seja, uma vez atingido o estado 3º ano, o único destino possível é o término do curso. Além disso, um aluno do 1º ano possui $0,95603$ de chance de terminar o ensino médio e $0,04397$ de chance de abandonar. E um aluno do 2º ano possui $0,98183$ de chance de terminar e 0.01817 de chance de abandonar.

Muriaé

O campus Muriaé possui a seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{pmatrix} 0,16833 & 0.82133 & 0 & 0 & 0,01034 \\ 0 & 0,03567 & 0,94433 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0,01667 & 0,97266 & 0,01067 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desta forma, a matriz O é:

$$O = \begin{pmatrix} 1,2024 & 1,0241 & 0,98348 \\ 0 & 1,03699 & 0,99586 \\ 0 & 0 & 1,01695 \end{pmatrix}$$

Verifica-se que o tempo médio esperado de permanência no estado 1º ano é $1,2024$ anos, no estado 2º ano é $1,03699$ anos e no estado 3º ano é $1,01695$ anos. Segue que o vetor de tempo médio necessário para cada estado ser absorvido é:

$$\begin{pmatrix} 3,20998 \\ 2,03285 \\ 1,01695 \end{pmatrix}$$

em que $3,20998$ é o tempo gasto, em média, para que um aluno do 1º ano saia do ensino médio. $2,0328$ é o tempo gasto, em média, para que um aluno do 2º ano saia do sistema e $1,01695$ é o tempo gasto, em média, para que um aluno do 3º ano saia do sistema.

A matriz de probabilidades de término e abandono é dada por:

$$R = \begin{pmatrix} 0,95659 & 0,04341 \\ 0,96863 & 0,03137 \\ 0,98915 & 0,01085 \end{pmatrix}$$

Um aluno do 1º ano possui $0,95659$ de chance de terminar o ensino médio e $0,04341$ de chance de abandonar. Um aluno do 2º ano possui $0,96863$ de chance de terminar e $0,03137$ de chance de abandonar. E um aluno do 3º ano possui $0,98915$ de chance de terminar e $0,01085$ de chance de abandonar.

Rio Pomba

A matriz de transição do campus Rio Pomba é:

$$P = \begin{pmatrix} 0,101 & 0,85133 & 0 & 0 & 0,04767 \\ 0 & 0,09833 & 0,87533 & 0 & 0,02634 \\ 0 & 0 & 0,01567 & 0,97733 & 0,007 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daí, a matriz O é dada por:

$$O = \begin{pmatrix} 1,11235 & 1,05025 & 0.93395 \\ 0 & 1,10905 & 0,98624 \\ 0 & 0 & 1,01592 \end{pmatrix}$$

Desta matriz, verifica-se que o tempo médio esperado de permanência no estado 1º ano é $1,11235$ anos, no estado 2º ano é $1,10905$ anos e no estado 3º ano é $1,01592$ anos. O vetor de tempo médio necessário para cada estado ser absorvido é:

$$\begin{pmatrix} 3.09655 \\ 2.09529 \\ 1.01592 \end{pmatrix}$$

Desta forma, um aluno do 1º ano demora, em média, 3.09655 anos para sair do ensino médio. Um aluno do 2º ano demora, em média, 2.09529 anos e um do 3º ano gasta, em média, 1.01592 anos.

A matriz que fornece as probabilidade de término e abandono é:

$$R = \begin{pmatrix} 0.91277 & 0.08723 \\ 0.96388 & 0.03612 \\ 0.99289 & 0.00711 \end{pmatrix}$$

Logo, um aluno do 1º ano possui 0.91277 de chance de terminar o ensino médio e 0.08723 de chance de abandonar. Um aluno do 2º ano possui 0.96388 de chance de terminar e 0.03612 de chance de abandonar. E um aluno do 3º ano possui 0.99289 de chance de terminar e 0.00711 de chance de abandonar.

4.2 Discussão e Comparações dos Dados

Para sintetizar os dados obtidos, serão apresentados a seguir tabelas comparativas dos três indicadores analisados.

Tabela 2: Tempo médio esperado (em anos) de permanência em cada série

Campus	Séries		
	1º ano	2º ano	3º ano
Barbacena	1.10214	1.06233	1.01454
Juiz de Fora	1.21261	1.13594	1.01044
Muriaé	1.20240	1.03699	1.01695
Rio Pomba	1.11235	1.10905	1.01592

Fonte: Autor

Para todos os campus, nota-se que o tempo médio esperado de permanência em cada série reduz à medida que se avança de série. Além disso, o campus Muriaé, que apresenta o segundo maior tempo para o 1º ano, reduz consideravelmente no 2º ano, tornando-se o campus com menor tempo de permanência. Já o campus Juiz de Fora, possui o maior tempo para o 1º ano e também o menor tempo para o 3º ano. Por fim, todos os campus apresentam tempos próximos para o 3º ano.

Tabela 3: Tempo médio esperado (em anos) para cada estado ser absorvido

Campus	Séries		
	1º ano	2º ano	3º ano
Barbacena	3.15974	2.07436	1.01454
Juiz de Fora	3.2847	2.12801	1.01044
Muriaé	3.20998	2.03285	1.01695
Rio Pomba	3.09655	2.09529	1.01592

Fonte: Autor

Pela Tabela 3, percebe-se que o campus Juiz de Fora apresenta o maior tempo médio para o estado 1º ano ser absorvido e o menor tempo médio para o estado 3º ano. Analisando os campus Juiz de Fora e Rio Pomba no 1º ano, nota-se que há uma diferença de aproximadamente $0,19$ anos, isto é, por volta de 69 dias de diferença. Novamente, os campus apresentam tempos próximos para o terceiro ano.

Tabela 4: Probabilidades de término e abandono

Campus	Término Séries 1º ano	2º ano	3º ano	Abandono Séries 1º ano	2º ano	3º ano
Barbacena	0.97909	0.98706	0.98951	0.02091	0.01294	0.01049
Juiz de Fora	0.95603	0.98183	1	0.04397	0.01817	0
Muriaé	0.95659	0.96863	0.98915	0.04341	0.03137	0.01085
Rio Pomba	0.91277	0.96388	0.99289	0.08723	0.03612	0.00711

Fonte: Autor

Já pela Tabela 4, é possível notar que em todos os campus, a probabilidade de um aluno terminar o ensino médio aumenta à medida que se avança nas séries. Já a probabilidade de abandonar reduz com o avanço. O campus Rio Pomba, apresenta o maior aumento de probabilidade de término do 1º para o 3º ano, enquanto o campus Barbacena possui o menor. Além disso, Juiz de Fora é o único campus que apresenta probabilidade 1 em alguma série.

5 Conclusão

As cadeias de Markov fornecem métodos práticos para análise e previsão de sistemas. O método utilizado neste trabalho possibilitou obter os tempos médios esperados de permanência em cada série, os tempos médios esperados de permanência no sistema e as probabilidades de término e abandono.

Ao apresentar esta análise dos indicadores educacionais do IF SUDESTE MG, do ponto de vista probabilístico, verificou-se que todos os campus apresentam resultados muito semelhantes e com poucas variações.

Desta forma, sugere-se para trabalhos futuros, uma análise dos dados obtidos levando em consideração fatores educacionais. Este estudo também pode ser replicado em outros contextos educacionais, a fim de contribuir para o aperfeiçoamento das instituições de ensino.

6 Agradecimentos

Ao PIBIC/CNPq e ao IF SUDESTE MG - Campus Rio Pomba que permitiram o desenvolvimento deste trabalho. Agradecemos também aos orientadores pelos ensinamentos, pela paciência e incentivo.

Referências

[1] Narela Bajram and Daria Ler. Application of discrete-time markov models. *Southeast Europe Journal of Soft Computing*, 2(1), 2013.

[2] Silvana Ligia Vincenzi Bortolotti et al. Estudo de custos para uma microempresa de guardanapos de papel utilizando cadeias absorventes de markov. *Revista Gestão da Produção Operações e Sistemas*, (4):89, 2007.

[3] Rogério Malta Branco and Antônio Sérgio Coelho. Cadeias absorventes de markov no processo produtivo de filé congelado de pescada. *Revista Synergismus scyentifica*, 1:646–657, 2006.

[4] Censo Escolar. Inep-instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais anísio teixeira. *Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/>. Acessado em 27 fev. 2020*, 2018.

[5] Ali Golmakani et al. Cadeias de markov. *VII Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática realizada em Maceió. Disponível em: <http://www.im.ufal.br/evento/bsbm/download/minicurso/cadeias.pdf>. Acessado em 27 fev. 2020*, 2014.

[6] Barry R James. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Number 519.2. 1996.

[7] Marcelo de Ramos Manoel et al. Cadeias de markov: uma abordagem voltada para o ensino médio. 2016.

[8] Jair Mendes Marques and Sani de Carvalho Rutz da Silva. A cadeia de markov na determinação de indicadores educacionais. *Revista da FAE*, 16(2):88–101, 2013.

[9] Anders Tolver. An introduction to markov chains. *Recuperado el*, 15, 2016.