

## O Problema da Cobertura do Diamante Asteca

**Washington Mariano Praxedes**

washington.mariano@aluno.ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

**Rodrigo Geraldo do Couto**

couto@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

---

### Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer a quantidade de coberturas distintas por dominós possíveis de serem realizadas em uma região plana denominada *Diamante Asteca*. Além das ideias relacionadas aos problemas de cobertura de tabuleiros, o resultado é obtido a partir da utilização de estratégias bastante elegantes e engenhosas, tendo os conceitos da *Teoria dos Grafos* como ferramentas essenciais para modelar e encontrar uma relação de recorrência para resolver o problema. Nesse contexto, as teorias apresentadas tendem reforçar a justificativa de que o tema de *Coberturas de Tabuleiros* e demais regiões planas é um campo altamente rico e fértil para o desenvolvimento de projetos de oficinas de estudos de conteúdos da Matemática.

### Palavras-chave

Coberturas de Tabuleiros, Poliminós, Teoria dos Grafos, Diamante Asteca.

## 1 Introdução

Na literatura é possível encontrar vários problemas relacionados à cobertura de regiões por determinadas peças, sendo alguns mais simples e outros de maior complexidade de resolução. Muitos destes problemas se originam das mais diversas áreas de pesquisa, como as engenharias, química, física, dentre outras, sendo possível presenciar várias aplicações dos conteúdos estudados, como na construção civil, design de peças, jogos e desafios olímpicos matemáticos, etc.

Em [5], Fisher tratou de um problema da Física a partir do qual surgiu a solução de um problema de cobertura de tabuleiros. O objetivo do trabalho apresentado em [5] é determinar a quantidade de configurações distintas de uma rede quadrada de dímeros, onde cada dímero ocupa duas posições vizinhas da rede, sendo possível realizar a modelagem deste problema a partir da determinação do número de coberturas distintas possíveis de serem feitas em um tabuleiro quadrado por dominós.

Algumas considerações sobre o estudo dos poliminós e problemas de coberturas de tabuleiros são feitas em [8] por Guttmann, sendo citados trabalhos desenvolvidos durante o século XX, como é o caso da obra [2] de H. E. Dudeney, que data do início deste século, e do texto [9] de G. E. Martin, que data do final deste século. Outra bibliografia citada foi o texto [6] de S. W. Golomb, autor de grande importância para o embasamento teórico desta pesquisa no que se refere à poliminós e à problemas de coberturas de tabuleiros. Um caso particular de problema mais complexo sobre cobertura por poliminós e que foi tratado por Aigner em [1] será o foco deste trabalho, cuja discussão é sobre a quantidade de coberturas distintas do Diamante Asteca por peças de dominós.

## 2 Algumas Definições Importantes

Neste texto, um tabuleiro  $m \times n$  é uma região plana retangular subdividida por retas horizontais e verticais em quadrados unitários (de dimensão  $1 \times 1$ ) composto por  $m$  fileiras horizontais e  $n$  fileiras verticais, como visto na Figura 1.

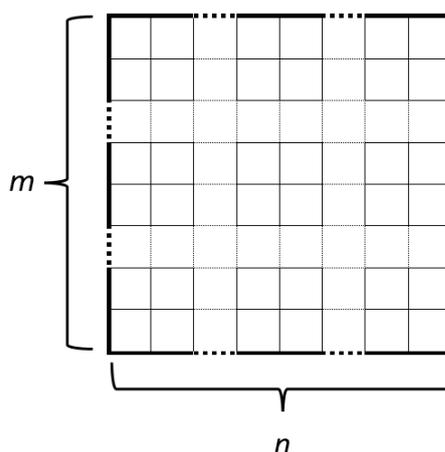


Figura 1: Representação de um tabuleiro  $m \times n$ .

Cada subdivisão do tabuleiro dada por um quadrado unitário será chamada de *célula*. Como definido por Golomb em [7], *poliminós* são peças conexas compostas por uma quantidade de quadrados unitários conectados um ao outro por pelo menos um de seus lados. A Figura 2 mostra alguns exemplos de poliminós.

Considera-se uma cobertura de um tabuleiro, ou de qualquer região plana, quando toda a sua área é completamente ocupada por poliminós sem a ocorrência de sobreposições, devendo as peças utilizadas na cobertura estarem inteiramente contidas na região coberta.

O *Diamante Asteca*, representado por  $AZ(n)$ , é uma figura plana com  $n$  fileiras horizontais centralizadas com  $2, 4, 6, \dots, 2n$  células dispostas uma sobre a outra juntamente com a reflexão

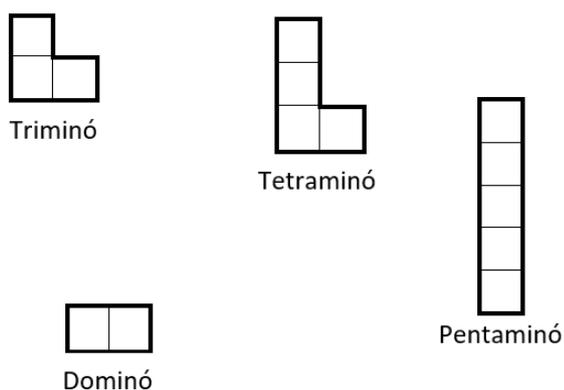


Figura 2: Exemplos de poliminós.

dessas em torno do eixo OX (eixo horizontal). A Figura 3 mostra  $AZ(n)$  para  $n = 1, 2, 3$ .

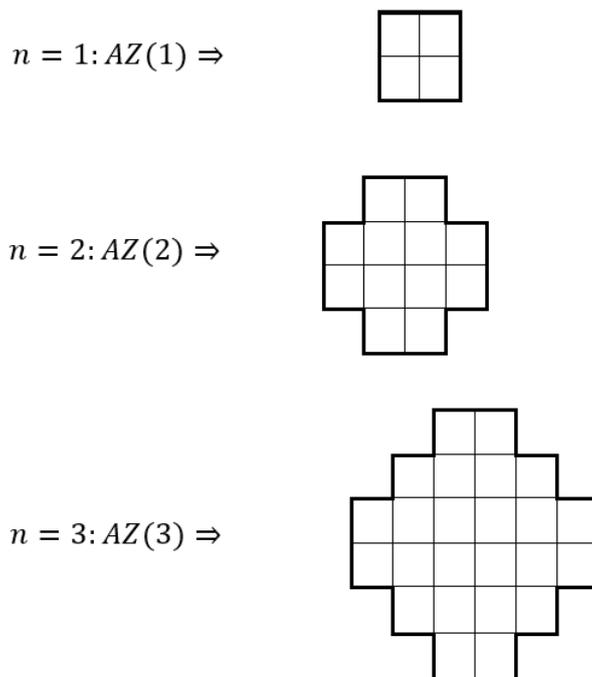


Figura 3: Diamantes astecas de ordens 1, 2 e 3.

### 3 Número de Coberturas por Dominós do Diamante Asteca

Uma cobertura por dominós do diamante asteca é bastante simples de ser feita, dado que cada fileira vertical ou horizontal deste sempre poderá ser coberta por dominós, pelo fato de

apresentarem quantidades pares de células, o que garante a cobertura de todo o diamante. Já a determinação da quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas no diamante asteca por dominós é bem mais complexa de ser analisada e será o objetivo deste artigo.

Seja  $A(n)$  a quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas em  $AZ(n)$ . É fácil ver, por inspeção, que  $A(1) = 2^1$  e que  $A(2) = 2^3$ . Na sequência será feita a demonstração do caso geral, ou seja, será determinada a expressão de  $A(n)$  para um  $AZ(n)$  qualquer. As referências principais são os textos [3] e [4] de Elkies, Kuperberg, Larsen e Propp, que trazem quatro demonstrações desse resultado, e o texto [1] de Aigner, esse último sendo a base para esse trabalho.

Para tratar este problema, o plano será subdividido em células unitárias e com a aplicação de uma coloração xadrez. Com isso, o plano assumirá a forma de um tabuleiro de xadrez infinito  $Z = \mathbb{Z}^2$ , como mostrado na Figura 4. Em  $Z$ , cada dominó irá sempre cobrir uma célula branca e

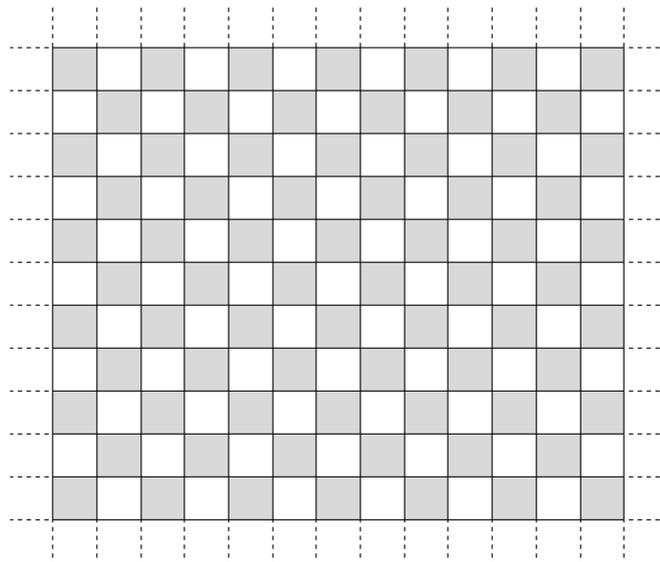


Figura 4: Tabuleiro de xadrez infinito  $Z$ .

uma célula preta. Existe somente um tipo de dominó, podendo este ser disposto no plano de duas maneiras distintas, verticalmente ou horizontalmente, como visto na Figura 5.

$T$  é dita uma *cobertura parcial* de  $Z$ , por dominós, se  $T$  cobre uma parte de  $Z$  (possivelmente todo  $Z$ ). As células não cobertas são chamadas *células livres*. A parte não coberta é denominada *região livre*.

Dada uma cobertura parcial de  $Z$ , a operação  $\sigma$  de *embaralhamento* consiste na realização de translações das peças de dominós em  $Z$  de acordo com a regra abaixo:

- (i) se for um dominó vertical cobrindo uma célula preta na parte superior, este desloca uma

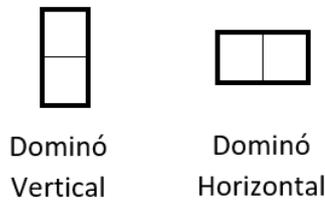


Figura 5: Posições do dominó no plano.

unidade para a direita;

- (ii) se for um dominó vertical cobrindo uma célula preta na parte inferior, este desloca uma unidade para a esquerda;
- (iii) se for um dominó horizontal cobrindo uma célula preta na parte direita, este desloca uma unidade para a cima;
- (iv) se for um dominó horizontal cobrindo uma célula preta na parte esquerda, este desloca uma unidade para a baixo.

A Figura 6 mostra a direção dos deslocamentos dos dominós em  $Z$  provocados pela operação  $\sigma$  de embaralhamento. Aplicando a operação  $\sigma$  de embaralhamento a todos os dominós de  $T$  obtém-se uma nova configuração  $\sigma(T)$ .

Um quadrado  $2 \times 2$  coberto por dois dominós, cuja célula superior esquerda apresenta coloração preta, é dito um *bloco preto*, como mostrado na Figura 7. Um bloco preto apresenta a propriedade de ser invariante pela operação de embaralhamento.

**Definição:** Uma cobertura parcial  $T$  do plano é dita *reduzida* se:

- (i)  $T$  não possui blocos pretos;
- (ii) a região livre de  $T$  pode ser coberta por blocos pretos disjuntos.

Denote por  $C$  o conjunto das coberturas parciais reduzidas de  $Z$ . De fato, pode-se garantir que não ocorrerão sobreposições em  $\sigma(T)$  desde que  $T$  seja uma cobertura parcial reduzida, de acordo com o resultado descrito no lema a seguir, cuja demonstração será dada posteriormente.

**Lema 1.** *Se  $T \in C$ , então  $\sigma(T) \in C$ , ou seja, a aplicação da operação  $\sigma$  de embaralhamento em uma cobertura parcial reduzida gera uma cobertura parcial reduzida. Ainda  $\sigma : C \rightarrow C$  é idempotente, isto é,  $\sigma^2 = I$ .*

O teorema a seguir traz a resposta do problema principal deste trabalho, que é referente ao número de coberturas distintas de  $AZ(n)$ .

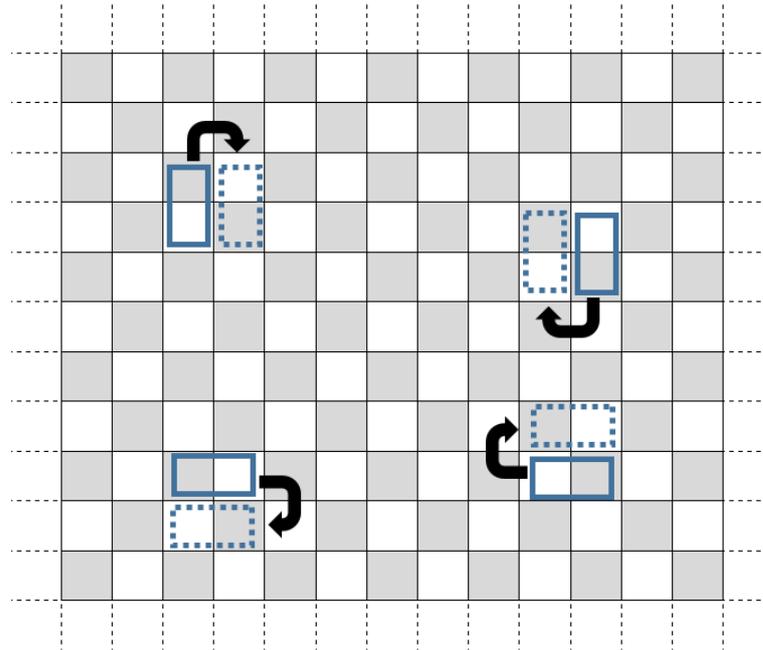


Figura 6: Novas posições dos dominós em  $Z$  após a operação  $\sigma$  de embaralhamento.

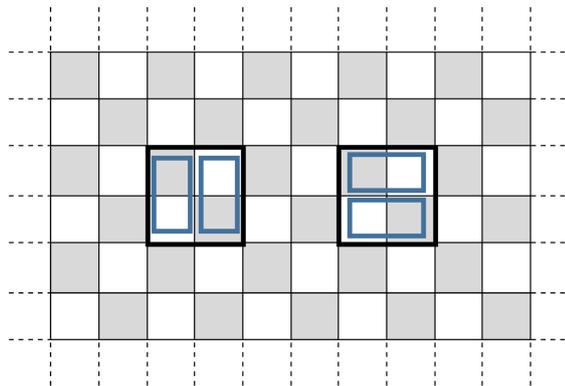


Figura 7: Representação de blocos pretos no plano.

**Teorema 1.** *O número de coberturas distintas de  $AZ(n)$  é igual a  $2^{\binom{n+1}{2}}$ .*

*Demonstração.* A posição de  $AZ(n)$  em  $Z$  será dada de modo que a sua célula superior esquerda seja preta. Considere  $T$  uma cobertura de  $AZ(n)$  (a Figura 8 mostra, como exemplo, uma cobertura  $T$  de  $AZ(6)$ ).

Seja  $T'$  a cobertura obtida de  $T$  eliminando os blocos pretos (a Figura 9 mostra a cobertura  $T'$  associada à cobertura  $T$  da Figura 8). Neste caso,  $T'$  será dita uma cobertura parcial reduzida

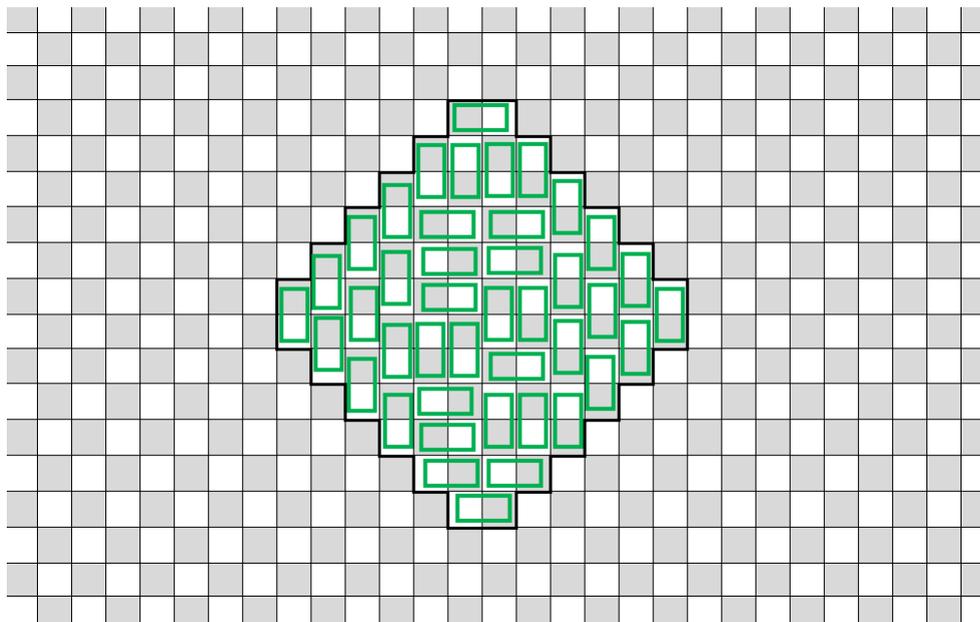


Figura 8: Exemplo de uma cobertura  $T$  de  $AZ(6)$ .

de  $AZ(n)$ . Seja  $T''$  uma cobertura parcial reduzida aplicada fora de  $AZ(n)$ , como mostrado na

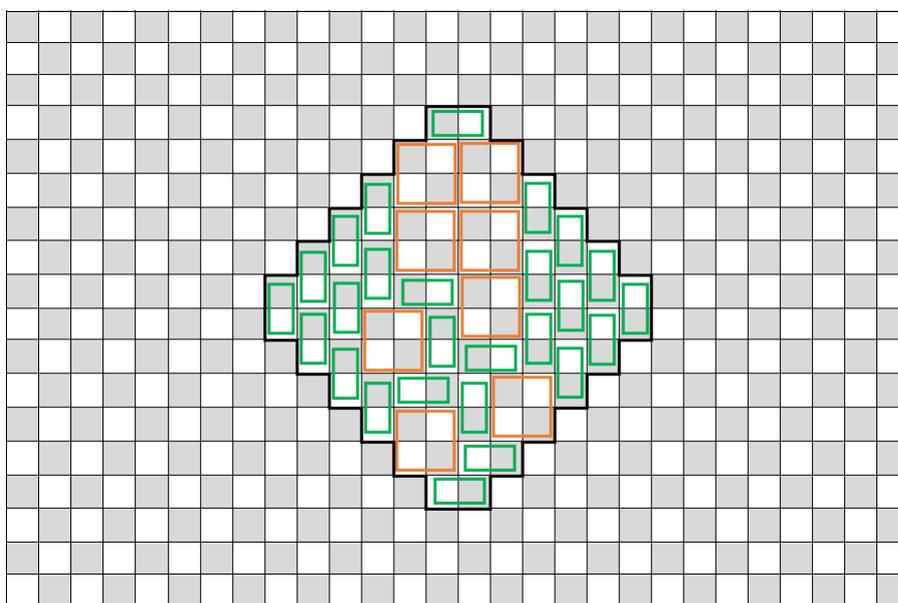


Figura 9: Cobertura  $T'$  associada à cobertura  $T$  da Figura 8.

Figura 10 (a Figura 10 mostra a cobertura  $T''$  fora de  $AZ(6)$ ). A cobertura  $T''$  é completa exceto por  $AZ(n)$  e as duas faixas (à esquerda e à direita) de altura 2. Observe que  $T''$  não contém

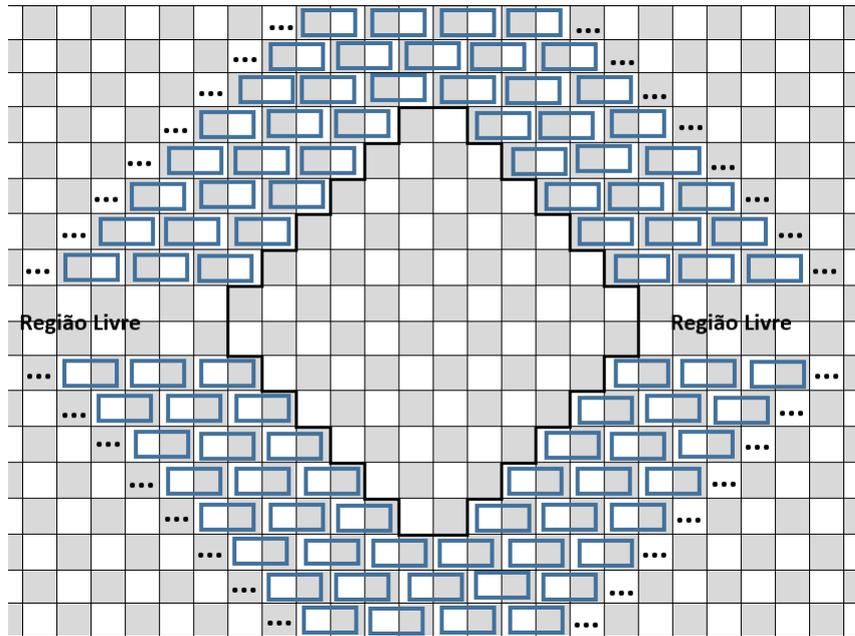


Figura 10: Exemplo da cobertura  $T''$  fora de  $AZ(6)$ .

blocos pretos e a região livre fora de  $AZ(n)$  pode ser preenchida por blocos pretos disjuntos. Verifica-se que  $T' \cup T''$  é uma cobertura parcial reduzida associada a  $T \cup T''$ . As Figuras 11 e 12 mostram os exemplos das coberturas  $T \cup T''$  e  $T' \cup T''$  em  $AZ(6)$ , respectivamente. Aplicando a operação  $\sigma$  de embaralhamento em  $T' \cup T''$  tem-se que

$$\sigma(T' \cup T'') = \sigma(T') \cup \sigma(T'').$$

Essa igualdade é verificada considerando que é indiferente aplicar a operação  $\sigma$  em toda a cobertura de uma região do plano ou em cada uma das partes que a compõe separadamente, visto que essa operação modifica individualmente a posição de cada dominó utilizado na cobertura. Logo, pelo Lema 1, tem-se que  $\sigma(T' \cup T'')$  também é uma cobertura parcial reduzida (a Figura 13 mostra que a operação  $\sigma$  aplicada na cobertura da Figura 12 gerou uma outra cobertura parcial reduzida de  $AZ(5)$ ). Da maneira em que  $AZ(n)$  foi construído no tabuleiro, a aplicação da operação  $\sigma$  de embaralhamento em uma cobertura parcial reduzida  $T'$  qualquer sempre irá gerar uma nova cobertura parcial reduzida de  $AZ(n - 1)$ . Para comprovar esse fato, considere os dois eixos de simetria de  $AZ(n)$  que o subdivide em 4 quadrantes. Qualquer dominó que esteja disposto na borda de  $AZ(n)$  no primeiro quadrante poderá se deslocar somente uma célula para baixo ou para a esquerda, devido à coloração branca das células dessa diagonal. Isso fará com que a todos os dominós se desloquem para a região de  $AZ(n - 1)$ , mantendo a borda de  $AZ(n)$  livre para que os dominós da cobertura  $T''$  possam ocupá-la. Também verifica-se que os dominós fora das bordas de  $AZ(n)$  não poderão ocupar as células de sua borda após a aplicação da operação  $\sigma$

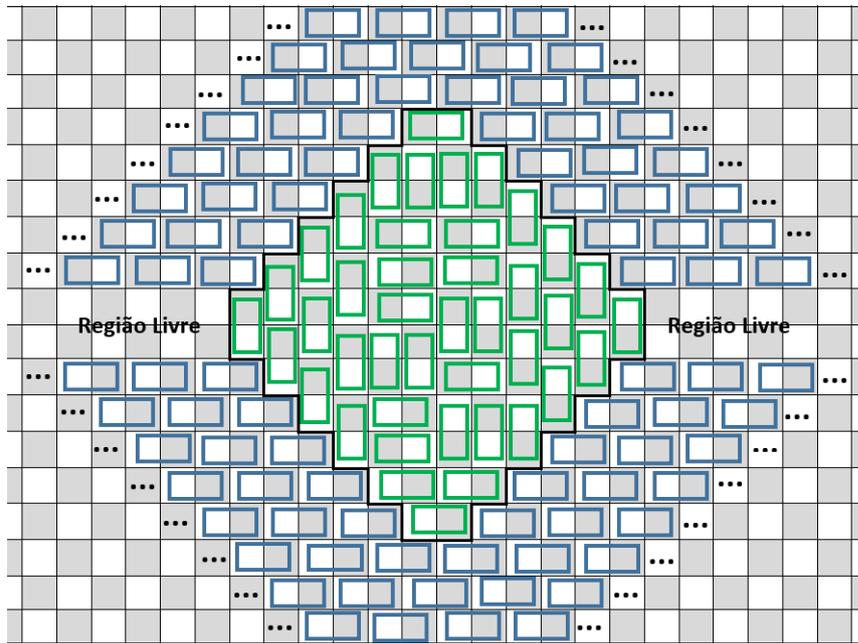


Figura 11: Exemplo da cobertura  $T$  de  $AZ(6)$  juntamente com a cobertura  $T''$ .

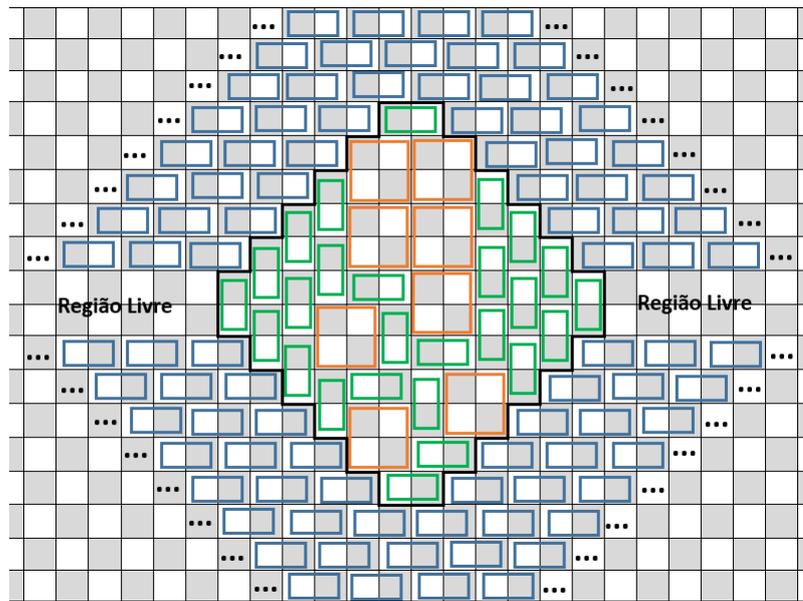


Figura 12: Exemplo da cobertura  $T'$  de  $AZ(6)$  juntamente com a cobertura  $T''$ .

de embaralhamento, pois, caso isso ocorresse, haveriam sobreposições pelo fato de estas serem ocupadas pelos dominós da cobertura  $T''$ , contradizendo o Lema 1. O mesmo fato é observado para os outros três quadrantes, que também terão todos os dominós de suas bordas deslocados

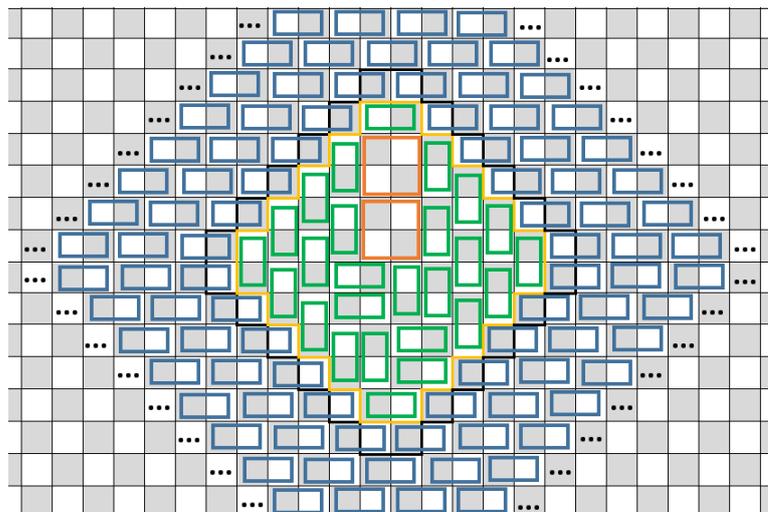


Figura 13: A operação  $\sigma$  aplicada na cobertura da Figura 12 gerou uma outra cobertura parcial reduzida de  $AZ(5)$ .

para a região de  $AZ(n - 1)$ , como exemplificado na Figura 14 no caso de  $AZ(6)$ . Denote

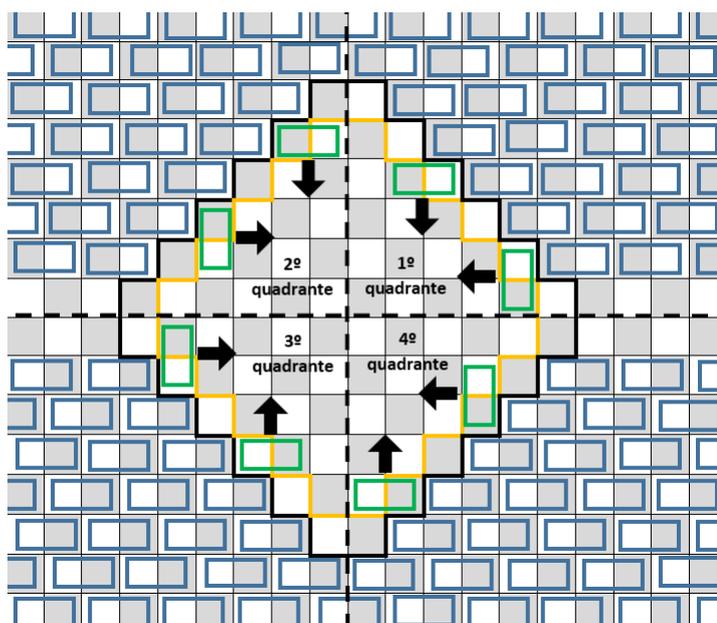


Figura 14: Deslocamentos dos dominós das bordas de  $AZ(6)$  por quadrante com a aplicação da operação  $\sigma$ .

por  $C(n)$  o conjunto das coberturas parciais reduzidas de  $AZ(n)$ . Duas coberturas  $T_i$  e  $T_j$  de  $AZ(n)$  são ditas *equivalentes* se  $T'_i = T'_j$ , sendo  $T'_i$  e  $T'_j$  coberturas parciais reduzidas associadas a  $T_i$  e  $T_j$ , respectivamente. Essa é uma relação de equivalência no conjunto das coberturas de

$AZ(n)$ . Denote  $B_1, B_2, \dots, B_r$  as classes de equivalência no conjunto das coberturas de  $AZ(n)$ . Sendo assim, o número de coberturas de  $AZ(n)$  é dado por

$$A(n) = \sum_{j=1}^r \#B_j.$$

Dado uma cobertura  $T$  de  $AZ(n)$ , considere  $T'$  ( $T$  excluindo os blocos pretos) e  $T''$  como definido anteriormente. Foi visto que  $T' \cup T''$  é cobertura parcial reduzida e pelo Lema 1  $\sigma(T' \cup T'') = \sigma(T') \cup \sigma(T'')$  é cobertura parcial reduzida com  $T' \subset AZ(n)$ , sendo  $\sigma(T')$  uma cobertura parcial reduzida de  $AZ(n - 1)$ . Como  $\sigma^2 = I$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma : C(n) &\longrightarrow C(n - 1) \\ T' &\longmapsto \sigma(T') \end{aligned}$$

é uma bijeção entre  $C(n)$  e  $C(n - 1)$ .

Tomando  $T_i$  um representante de  $B_i$ , tem-se que  $C(n) = \{T'_1, \dots, T'_r\}$ , logo  $C(n - 1) = \{\sigma(T'_1), \dots, \sigma(T'_r)\}$ , ou seja, denote  $\widehat{B}_i$  a classe de equivalência no conjunto das coberturas de  $AZ(n - 1)$  com o representante  $\sigma(T'_i)$ , tem-se que

$$A(n - 1) = \sum_{j=1}^r \#\widehat{B}_j,$$

como mostrado no esquema a seguir.

$$\begin{aligned} B_i \subset AZ(n) &\xrightarrow{\text{Eliminar os blocos pretos}} T'_i \in C(n) \xrightarrow{\text{Aplicar a operação } \sigma \text{ de embaralhamento}} \\ &\sigma(T'_i) \in C(n - 1) \xrightarrow{\text{Cobrir os blocos pretos}} \widehat{B}_i \subset AZ(n - 1). \end{aligned}$$

Seja um *buraco preto* um quadrado  $2 \times 2$  de  $Z$  que pode ser coberto por um bloco preto. Suponha que  $T'_i$  contém  $t$  dominós e  $x$  buracos pretos. Dado que a operação  $\sigma$  de embaralhamento aplicada em  $T'_i$  conserva a quantidade de dominós então  $\sigma(T'_i)$  possui  $t$  dominós e  $y$  buracos pretos. Tem-se que o número de células de  $AZ(n)$  e de  $AZ(n - 1)$ , representados por  $|AZ(n)|$  e por  $|AZ(n - 1)|$ , são dados por

$$|AZ(n)| = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) = 2 \cdot \left[ \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \right] = 2n(n + 1)$$

e

$$|AZ(n - 1)| = 2n(n - 1).$$

Com isso, sendo as quantidades de células cobertas de  $T'_i$  e  $\sigma(T'_i)$  iguais e correspondentes ao dobro de suas quantidades de dominós, pode-se relacionar estas quantidades com as quantidades

totais de células de  $AZ(n)$  e de  $AZ(n - 1)$  efetuando a subtração das células correspondentes às regiões livres dadas por seus buracos pretos, isto é,

$$2t = 2n(n + 1) - 4x$$

e

$$\begin{aligned} 2t &= 2n(n - 1) - 4y \\ \Rightarrow 2n(n + 1) - 4x &= 2n(n - 1) - 4y \\ \Rightarrow 2n^2 + 2n - 4x &= 2n^2 - 2n - 4y \\ \Rightarrow 4n &= 4x - 4y \\ \Rightarrow n &= x - y. \end{aligned}$$

Sendo assim, como  $T'_i$  possui  $x$  buracos pretos e cada buraco preto pode ser coberto de duas maneiras distintas por dominós, tem-se que  $\#B_i = 2^x$ . De maneira análoga, como  $\sigma(T'_i)$  possui  $y$  buracos pretos, tem-se que  $\#\widehat{B}_i = 2^y$ .

Então, pode-se afirmar que

$$\#B_i = 2^x = 2^{n+y} = 2^n \cdot 2^y = 2^n \cdot (\#\widehat{B}_i).$$

Logo, verifica-se as igualdades

$$A(n) = \sum_{j=1}^r (\#B_j) = \sum_{j=1}^r 2^n \cdot (\#\widehat{B}_j) = 2^n \cdot \sum_{j=1}^r (\#\widehat{B}_j) = 2^n \cdot A(n - 1).$$

Desse resultado obtém-se a relação de recorrência

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^n \cdot A(n - 1) \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot A(n - 2) \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 2 \\ &= 2^{\binom{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, fica estabelecido que a quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas em  $AZ(n)$  é dada por  $2^{\binom{n+1}{2}}$ . □

#### 4 Demonstração do Lema 1

Nesta seção será feita a demonstração do seguinte resultado:

“Se  $T \in C$ , então  $\sigma(T) \in C$ , ou seja, a aplicação da operação  $\sigma$  de embaralhamento em uma cobertura parcial reduzida gera uma cobertura parcial reduzida. Ainda  $\sigma : C \rightarrow C$  é idempotente, isto é,  $\sigma^2 = I$ .”

*Demonstração.* Considerando  $T$  uma cobertura parcial reduzida de  $Z$ , deverá ser demonstrado que:

- (i)  $\sigma(T)$  é uma cobertura parcial;
- (ii)  $\sigma(T)$  não contém blocos pretos;
- (iii)  $\sigma(\sigma(T)) = T$ ;
- (iv) a região livre de  $\sigma(T)$  pode ser coberta por blocos pretos disjuntos.

Inicialmente será demonstrado o item (i), ou seja, que a operação  $\sigma$  de embaralhamento aplicada em uma cobertura parcial reduzida não provoca sobreposições. Uma região  $2 \times 2$  cuja célula superior esquerda é preta será denominada *bloco* (não confundindo com a definição dada anteriormente de bloco preto, que consiste em um bloco coberto por dois dominós). Para isso, suponha, por contradição, que após a aplicação da operação  $\sigma$  de embaralhamento ocorre sobreposição em uma célula  $c$  de  $Z$ . Considere que  $c$  é uma célula branca (o caso em que  $c$  é uma célula preta é análogo). Então, tem-se em  $T$  uma das duas situações mostradas na Figura 15.

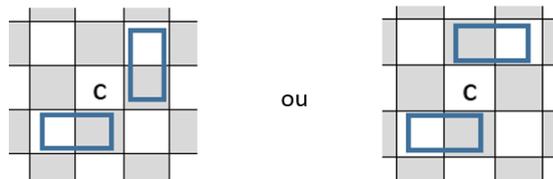


Figura 15: Casos de sobreposição de uma célula branca na aplicação da operação  $\sigma$  em  $T$ .

Pela Figura 15 é possível ver que  $c$  é uma célula livre, pois, se  $c$  fosse coberta teria a ocorrência de um bloco preto em  $T$ , contrariando o fato de  $T$  ser uma cobertura parcial reduzida. Mas, como  $T$  é uma cobertura parcial reduzida,  $c$  deveria pertencer a um bloco da região livre, o que não acontece em nenhuma das duas situações possíveis de sobreposição mostradas na Figura 15, pois os dois blocos que contém  $c$  apresentam células cobertas. Logo, não ocorre sobreposição de nenhuma célula branca em  $\sigma(T)$ .

O item (ii) pode ser comprovado lembrando que os blocos pretos são invariantes por  $\sigma$ , logo, um

bloco preto só pode ser formado a partir da aplicação da operação  $\sigma$  de embaralhamento se esta for aplicada em outro bloco preto. E, como  $T$  não possui blocos pretos, por ser uma cobertura parcial reduzida, verifica-se a impossibilidade de ocorrência de blocos pretos em  $\sigma(T)$ .

O item (iii) segue diretamente da definição de  $\sigma$ .

Para demonstrar o item (iv) serão feitas algumas definições. Considere o tabuleiro de xadrez infinito  $Z$ . Considere agora o grafo infinito  $B = (V, E)$  onde o conjunto de vértices  $V$  é formado pelos blocos, e dois blocos  $b_i$  e  $b_j$  serão adjacentes se compartilharem uma célula  $c$ , como mostrado na Figura 16.

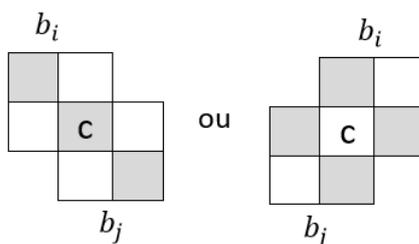


Figura 16: Representação da relação de adjacência entre dois blocos.

Com isso, pode-se ver que o grafo  $B$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ . Logo, tem-se que  $B$  é bipartido (logo, é bicolorido) e 4-regular, pois todo bloco  $b_i$  de  $V$  é adjacente a exatamente 4 outros blocos de  $V$ , como mostrado na Figura 17.

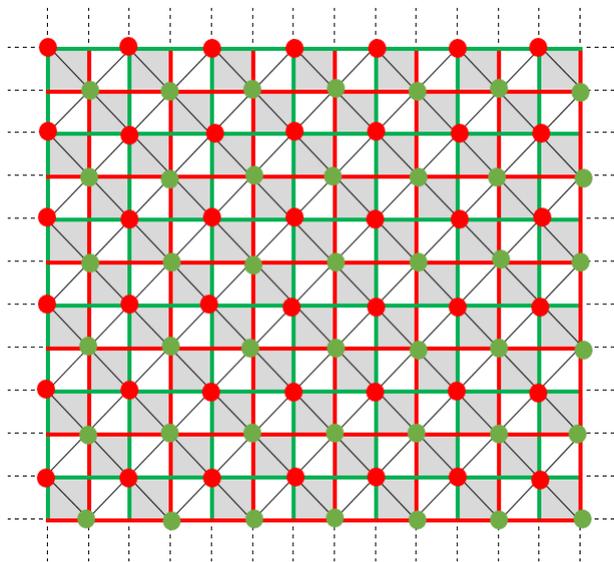


Figura 17: Número de adjacências de um bloco de  $V$  e bipartição de  $B$ .

Considere uma cobertura parcial  $T$  de  $Z$  sem blocos pretos. Com isso, um bloco  $b_i \in B$  será

classificado como:

- *rico* (com respeito a  $T$ ), se  $b_i$  tem somente um dominó completo de  $T$  (e neste caso contém apenas um dominó, pois  $T$  não possui blocos pretos);
- *pobre* (com respeito a  $T$ ), caso contrário, como exemplificado na Figura 18.

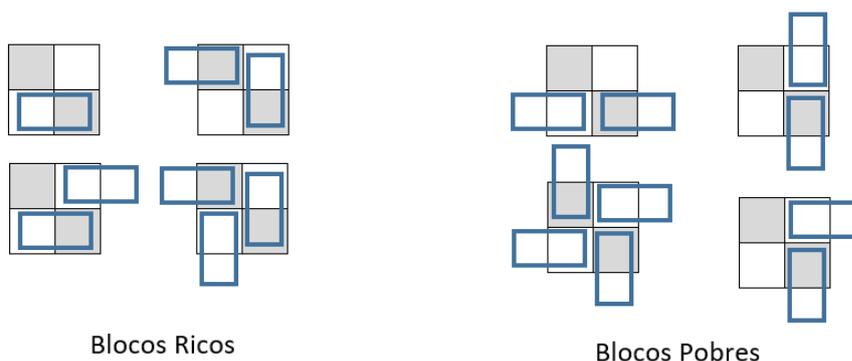


Figura 18: Exemplos de blocos ricos e de blocos pobres.

É evidente que todo bloco completamente descoberto é classificado como pobre. Seja  $B_T = (V_T, E_T)$  o subgrafo induzido de  $B$  onde  $V_T$  é o conjunto de todos os blocos pobres de  $B$ . E, por ser subgrafo de  $B$ , consequentemente  $B_T$  também é bipartido e, portanto, bicolorido, como qualquer grafo bipartido. Dado um bloco rico  $b_R$  pertencente a  $B$ , considere a *coloração local* aplicada nos blocos pobres adjacentes a este como definido na sequência:

- $b_k$  receberá cor vermelha, se contém a metade do dominó pertencente a  $b_R$ ;
- $b_k$  receberá cor verde, caso contrário, como exemplificado na Figura 19.

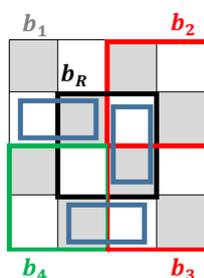


Figura 19: Exemplo de aplicação da *coloração local*.

Observe que  $b_1$  é vizinho rico de  $b_R$ , logo não recebe cor. A conclusão do item (iv) decorre da proposição citada a seguir.

**Proposição 1.** *Seja  $T$  uma cobertura parcial de  $Z$  sem blocos pretos. Então,  $T$  é reduzida se, e somente se:*

- (a)  $\sigma(T)$  é uma cobertura parcial;
- (b) existe uma bicoloração de  $B_T$  que coincide com a coloração local de todos os blocos ricos de  $T$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $T$  uma cobertura parcial reduzida. Já foi visto que o item (a) é satisfeito. Seja  $G$  o conjunto dos blocos livres disjuntos que compõem a região livre de  $T$  e  $R$  o conjunto de blocos pobres que não estão em  $G$ . Logo, considerando os grafos  $B = (V, E)$  e  $B_T = (V_T, E_T)$  definidos anteriormente, tem-se que  $V_T = G \cup R$ . Sendo assim, considere a bicoloração em que os elementos de  $G$  são coloridos de verde e os elementos de  $R$  de vermelho. Será mostrado que esta é uma bicoloração admissível. Sejam  $b_1$  e  $b_2$  dois blocos pobres adjacentes pertencentes a  $B_T$  com uma célula  $c$  em comum, como visto na Figura 20.

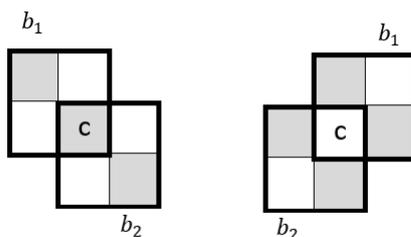


Figura 20: Dois blocos pobres adjacentes de  $B_T$ .

Logo, como  $b_1$  e  $b_2$  são dois blocos pobres, tem-se que  $c$  não pode ser coberta, pois, caso fosse, haveria um dominó completo pertencente a  $b_1$  ou a  $b_2$ . Então, sendo  $c$  descoberta e pertencente à região livre de  $T$ , um dos blocos que a contém necessita ser livre devido ao fato da cobertura  $T$  ser reduzida. Com isso, conclui-se que um dos blocos que contém  $c$  está em  $G$  e o outro necessariamente precisa estar em  $R$ , pois, não podem haver blocos livres adjacentes em  $G$ . Portanto, tem-se que um dos blocos pobres  $b_1$  ou  $b_2$  assumirá cor verde e o outro cor vermelha, como mostrado na Figura 21.

Resta mostrar que a coloração definida anteriormente coincide com a coloração local induzida pelos blocos ricos. Agora, considere os dois blocos pobres  $b_1$  e  $b_2$  adjacentes ao bloco rico  $b_R$ , de acordo com a Figura 22, ou seja,  $b_1$  é verde na coloração local e  $b_2$  é vermelho na coloração local.

Como  $T$  é uma cobertura parcial reduzida, tem-se que a célula  $c$  é livre, pois, caso contrário, iria ocorrer uma das três situações: ou  $b_R$  seria um bloco preto, ou  $b_1$  seria bloco rico, ou  $T$  não

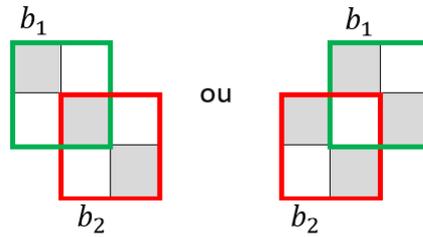


Figura 21: Coloração aplicada em dois blocos pobres adjacentes de  $B_T$ .

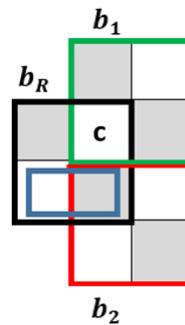


Figura 22: Coloração local aplicada em dois blocos pobres adjacentes a um bloco rico em  $T$ .

seria uma cobertura parcial. Sendo  $c$  livre e pertencente somente aos blocos  $b_R$  (que é rico) e  $b_1$ , conclui-se que  $b_1$  é um bloco livre, logo pertencente a  $G$ , ou seja, é verde na coloração de  $B_T$ . Sendo  $b_2$  um bloco pobre com pelo menos uma célula coberta, conclui-se que  $b_2$  pertence a  $R$ , logo terá cor vermelha na coloração de  $B_T$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora, seja  $T$  uma cobertura parcial de  $Z$  sem blocos pretos e considere os itens (a) e (b) válidos. Seja o grafo  $B_T = (V_T, E_T)$  com  $V_T = G \cup R$  apresentando a coloração de  $B_T$  do item (b). Como os blocos em  $G$  são da mesma cor, então não são adjacentes, logo são disjuntos. Com isso, basta demonstrar que  $G$  ocupa toda a região livre de  $T$ , ou seja, que toda célula livre de  $T$  pertence a um bloco de  $G$ .

Seja  $c$  uma célula livre em  $T$  pertencente a dois blocos adjacentes,  $b_1$  e  $b_2$ . Logo, ocorre uma das duas situações mostradas na Figura 23.

Com isso, verifica-se que se  $b_1$  e  $b_2$  forem ambos blocos ricos causará sobreposição de  $c$  em  $\sigma(T)$ , o que levaria à contradição do item (a). Se  $b_1$  e  $b_2$  forem ambos blocos pobres, então, tem-se que um deles está em  $G$  e o outro em  $R$  como visto anteriormente, afirmando que  $c$  pertence a um bloco de  $G$ . Por fim, sendo  $b_1$  um bloco pobre e  $b_2$  um bloco rico, a bicoloração local aplicada a partir de  $b_2$  fará com que  $b_1$  seja pertencente a  $G$ . Portanto, conclui-se que toda célula livre de  $T$  pertence a um bloco livre de  $G$ . Além disso, sendo todos os blocos de  $G$  disjuntos devido à bicoloração aplicada em  $B_T$ , tem-se que nenhuma célula livre de  $T$  pertence a dois blocos livres

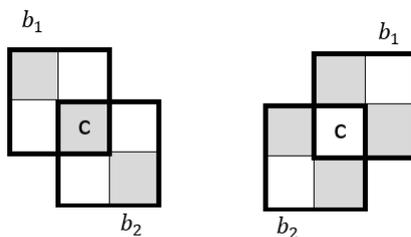


Figura 23: Dois blocos pobres adjacentes com uma célula livre  $c$  em comum.

disjuntos. Também é possível afirmar que nenhuma célula coberta de  $T$  pertence a  $G$ , dado que  $G$  possui apenas blocos livres.

Então, conclui-se que todos os blocos de  $G$  estão contidos na região livre de  $T$  e que não há ocorrência de sobreposições, permitindo afirmar que  $T$  é uma cobertura parcial reduzida.  $\square$

Agora, com a Proposição 1 demonstrada, é possível concluir a demonstração do item (iv) do Lema 1.

Seja  $T$  uma cobertura parcial reduzida de  $Z$ . Então,  $\sigma(T)$  não possui blocos pretos. Dado um bloco rico  $b_R$  com respeito a  $T$ , tem-se que  $b_R$  também é rico com respeito a  $\sigma(T)$ , e vice-versa, considerando que  $\sigma(\sigma(T)) = T$ . Com isso, conclui-se que tanto os blocos ricos quanto os blocos pobres de  $T$  e  $\sigma(T)$  são os mesmos, ou seja, que  $B_T = B_{\sigma(T)}$ . Verifica-se, também, que a operação  $\sigma$  de embaralhamento apenas alterna as cores aplicadas na coloração local dos grafos  $B_T$  e  $B_{\sigma(T)}$  na transição de  $T$  para  $\sigma(T)$ , como observado na Figura 24.

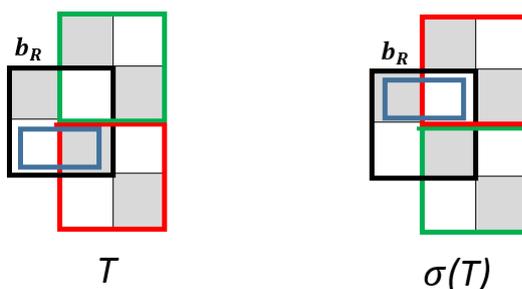


Figura 24: Coloração local aplicada a partir de um bloco rico  $b_R$  com respeito a  $T$  e  $\sigma(T)$ .

Definindo a coloração de  $B_{\sigma(T)}$  simplesmente trocando as cores dos blocos de  $B_T$ , tem-se que essa coloração de  $B_{\sigma(T)}$  coincide com a coloração local dada pelos blocos ricos de  $B_{\sigma(T)}$ . Sendo assim, tem-se que são satisfeitos os itens (a) e (b) do lema anterior para  $B_{\sigma(T)}$ , permitindo concluir que  $\sigma(T)$  também é uma cobertura parcial reduzida.  $\square$

## 5 Conclusão

O estudo de coberturas de tabuleiros e de outras regiões planas, como pôde ser visto ao longo do desenvolvimento deste trabalho e no texto [10] de Praxedes, fornece análises riquíssimas de propriedades matemáticas que envolvem conceitos tanto geométricos quanto combinatórios. No caso específico da cobertura do diamante asteca, a engenhosidade da modelagem do problema a partir da introdução de conceitos da Teoria dos Grafos e da definição de operações específicas, como a operação  $\sigma$  de embaralhamento, foram de fundamental importância para resolver o problema proposto como objetivo principal deste trabalho.

O estabelecimento da relação de recorrência escrevendo  $A(n)$  em função de  $A(n - 1)$  foi uma estratégia essencial e que permitiu alcançar o resultado final, dado pelo número de coberturas distintas possíveis de serem feitas em  $AZ(n)$ . Alguns conceitos matemáticos mais básicos, como soma de sequências numéricas, princípio multiplicativo, números binomiais, por exemplo, serviram de suporte para concluir tal demonstração.

De fato, fica comprovado mais uma vez a partir deste trabalho que problemas de coberturas de tabuleiros e de outras regiões planas representam um tópico de enorme potencial para ser tratado em projetos de pesquisas em grupos de estudos sobre matemática, considerando sua eficácia no desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes envolvidos. Tal eficiência pode ser justificada visto que a condução das soluções dos problemas propostos são dadas a partir da interação de conceitos de diferentes eixos da matemática.

Verifica-se, também, que os estudos desse tema podem ser mais dinâmicos e estimulantes devido à possibilidade de utilização de materiais, como tabuleiros e peças, durante as oficinas de estudos, auxiliando a compreensão por meio da relação entre o concreto e o abstrato, sem contar a variedade de problemas cotidianos relacionados à cobertura de tabuleiros. Recursos computacionais, como softwares geométricos e de desenho, também podem ser aliados potenciais nos estudos de problemas de coberturas de tabuleiros.

## Referências

- [1] Martin Aigner. *A course in enumeration*, volume 238. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] H E Dudeney. *The canterbury puzzles (and other curious problems)*. EP Dutton, New York, 1908.
- [3] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (part i). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(2):111–132, 1992.
- [4] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings (part ii). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(3):219–234, 1992.

- [5] Michael E Fisher. Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. *Physical Review*, 124(6):1664, 1961.
- [6] Solomon W Golomb. Checker boards and polyominoes. *The American Mathematical Monthly*, 61(10):675–682, 1954.
- [7] Solomon W Golomb. *Polyominoes: puzzles, patterns, problems, and packings*, volume 16. Princeton University Press, 1996.
- [8] Anthony J Guttmann. History and introduction to polygon models, polyominoes and polyhedra. *To the memory of two distinguished scientists and wonderful colleagues, Pierre Leroux and*, page 1.
- [9] George Martin. *Polyominoes: A guide to puzzles and problems in tiling*. Cambridge University Press, 1991.
- [10] Washington Mariano Praxedes. Coberturas de tabuleiros: O problema do diamante asteca. *PROFMAT*, 2019.