

---

# Curvas Planas de Largura Constante: Teorema de Barbier

**Marília Gomes Criste**

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

mariliacriste@gmail.com

**Gil Fidelix de Souza**

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

gilsouza@ufop.edu.br

**Geraldo César Gonçalves Ferreira**

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

geraldocesar@ufop.edu.br

---

## Resumo

Já imaginou uma bicicleta cujas rodas não tivessem o formato de um círculo? Neste trabalho discutiremos os conjuntos convexos, mais especificamente aqueles que possuem a mesma característica do círculo, a largura constante. Os conjuntos de largura constante estão presentes em várias áreas da engenharia, na arquitetura e no designer de diversos produtos. O Triângulo de Reuleaux, um exemplo mais comum dessas curvas de largura constante, é bastante empregado na construção de uma broca que gera um “furo quadrado”. Ao longo do texto demonstramos o Teorema de Barbier, o qual afirma que todo conjunto de largura constante  $m$  tem perímetro  $\pi m$  e ainda veremos que a área destes conjuntos será sempre maior que a do Triângulo de Reuleaux e menor que a do círculo. A partir desse estudo constatamos que existem diversas curvas que podem substituir o círculo em algumas situações, por exemplo, em uma roda de bicicleta.

## Palavras-chave

Curvas, Largura Constante, Triângulo de Reuleaux.

## 1 Introdução

O objeto de estudo deste trabalho são os conjuntos convexos, mais especificamente os de largura constante, cujo exemplo mais típico é o círculo. Mas será que o círculo é a única curva a apresentar essa característica? Veremos que existem infinitas curvas que, assim como o círculo, possuem a largura constante. A mais conhecida entre elas é o Triângulo de Reuleaux, curva construída a partir de um triângulo equilátero, que leva esse nome em homenagem ao físico alemão Franz Reuleaux.

Dessa forma, iniciaremos essa abordagem apresentando conceitos importantes de conjuntos compactos, e demonstraremos teoremas como o de Barbier que afirma

que todos os conjuntos de largura constante  $m$  possuem o mesmo comprimento do círculo, isto é, comprimento igual a  $\pi m$ .

## 2 Conjuntos de Largura Constante

Desenvolvendo as ideias apresentadas por Steven [4], abordaremos, inicialmente, conceitos essenciais de conjuntos, como área e perímetro, e demonstraremos teoremas importantes como o de Barbier.

### 2.1 Conjuntos Compactos

Neste trabalho, o estudo de conjuntos será voltado para o plano, embora alguns resultados possam ser generalizados para  $\mathbb{R}^n$ . A distância entre os pontos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  no plano, é o número

$$d(A, B) = \|A - B\| = \|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Para definirmos se um ponto pertence ou não a um determinado conjunto, usamos o conceito de disco aberto e disco fechado.

**Definição 2.1** (Disco aberto/fechado). *Para qualquer ponto  $X \in \mathbb{R}^2$  e dado o número real  $\delta > 0$  o disco aberto  $D(X, \delta)$ , com centro em  $X$  e raio  $\delta$ , é o conjunto de pontos*

$$D(X, \delta) \equiv \{Y \in \mathbb{R}^2 : d(X, Y) < \delta\}.$$

*Um disco fechado é o conjunto de pontos  $\bar{D}(X, \delta) \equiv \{Y \in \mathbb{R}^2 : d(X, Y) \leq \delta\}$ .*

**Definição 2.2** (Conjunto aberto). *Dizemos que  $X$  é um ponto interior de  $\mathcal{A}$  se existir  $\delta > 0$  tal que  $D(X, \delta) \subset \mathcal{A}$ . Um conjunto  $\mathcal{A}$  é dito aberto se todos os seus pontos forem interiores.*

**Definição 2.3** (Conjunto fechado). *Um conjunto  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^2$  é fechado se o seu complemento  $\mathbb{R}^2 - \mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^2 : X \notin \mathcal{F}\}$  é aberto.*

**Definição 2.4** (Conjunto Limitado). *Seja  $O$  a origem do plano, então um conjunto  $\mathcal{C}$  é dito limitado se  $\mathcal{C} \subset D(O, \delta)$ , para algum  $\delta > 0$ .*

A união de todos os subconjuntos abertos contidos em  $\mathcal{A}$  formam o seu interior, já um *conjunto fechado*  $\mathcal{F}$  é formado pela intersecção de todos os conjuntos fechados que o contém.

**Definição 2.5** (Conjunto Compacto). *Um subconjunto do plano fechado e limitado é dito compacto.*

**Exemplo 2.1.** *Os conjuntos  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  (FIG. 1) são, respectivamente:*

$\mathcal{A} = \{(x, y) : -1 \leq x < 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$  *é limitado, mas não é aberto e nem fechado.*

$\mathcal{B} = \{(x, y) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$  *é um disco, centrado em  $(-1, 1)$  com raio 2, fechado e limitado, portanto é um conjunto compacto.*

$\mathcal{C} = \{(x, y) : x - y > 1\}$  *é aberto e não limitado.*

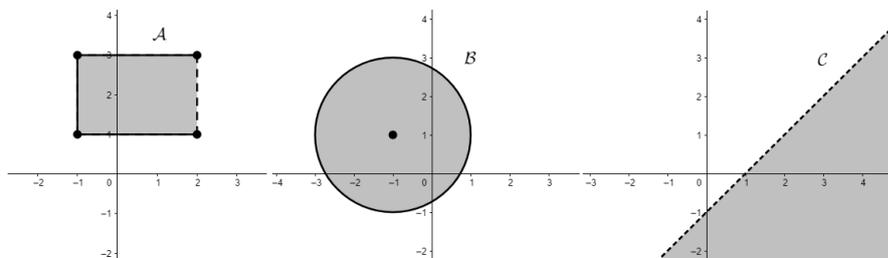


Figura 1

## 2.2 Largura de um Conjunto

Adaptando a definição de [4] para reta suporte, dizemos que a *reta suporte* a um conjunto compacto  $\mathcal{C}$  em  $X$  é a reta  $t$  tal que  $\mathcal{C}$  está em um dos semiplanos definidos por  $t$  e  $t \cap \mathcal{C} = \{X\}$ . Em cada direção, existem duas retas suportes para  $\mathcal{C}$ , que são paralelas (FIG. 2).

**Definição 2.6** (Largura). *Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto compacto e  $l$  uma reta (ou segmento) no plano. A largura de  $\mathcal{C}$  na direção de  $l$  é a distância entre duas retas suportes paralelas de  $\mathcal{C}$  que são perpendiculares à  $l$ .*

O *diâmetro* de  $\mathcal{C}$  é o número  $d \equiv \sup \{\|X - Y\| : X, Y \in \mathcal{C}\}$ . O seguinte Teorema mostra a relação entre diâmetro e largura.

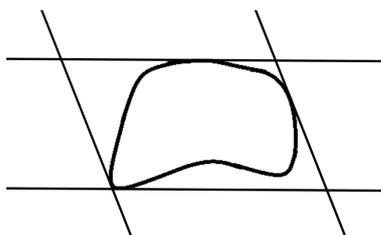


Figura 2

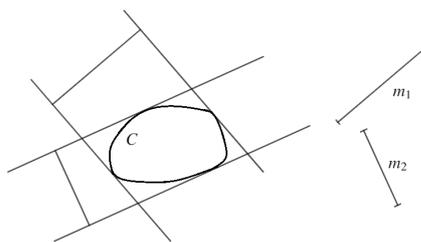


Figura 3:  $m$  é a largura do conjunto  $C$  na direção de  $l$

**Teorema 2.1.** *A largura máxima de um conjunto compacto  $C$  é igual ao seu diâmetro.*

*Demonstração.* Seja  $m$  a largura máxima de  $C$  e considere  $t_1$  e  $t_2$  retas suportes que estão na direção da largura máxima, sendo  $\{X\} = t_1 \cap C$  e  $\{Y\} = t_2 \cap C$ , então podemos afirmar que  $m = \|X - Y\|$ . De fato, se o segmento  $\overline{XY}$  for perpendicular às retas  $t_1$  e  $t_2$ , então  $m = \|X - Y\|$ . Por outro lado, suponhamos que o segmento  $\overline{XY}$  não seja perpendicular às retas  $t_1$  e  $t_2$ , então existem as retas paralelas  $t_3$  e  $t_4$  suportes a  $C$  e perpendiculares à reta que contém o segmento  $\overline{XY}$  (FIG. 4).

Seja  $m'$  a distância entre as retas  $t_3$  e  $t_4$ , assim

$$m < \|X - Y\| \leq m'.$$

Mas isso contradiz o fato de  $m$  ser a largura máxima de  $C$ , logo o segmento  $\overline{XY}$  é perpendicular às retas  $t_1$  e  $t_2$ .

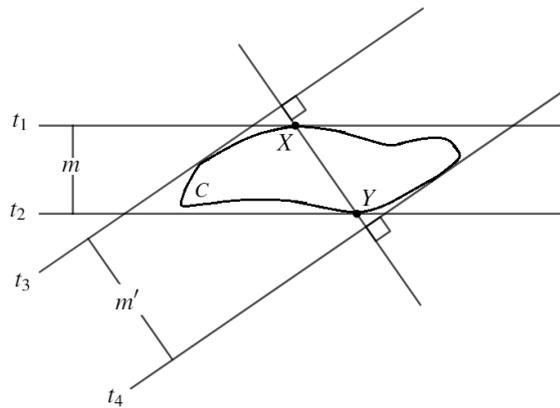


Figura 4

Sejam  $P$  e  $Q$  pontos quaisquer de  $C$  e  $w$  a largura de  $C$  na direção de  $\overline{PQ}$ , então

$$\|X - Y\| = m \geq w \geq \|P - Q\|.$$

Portanto,  $m$  é o diâmetro. □

**Corolário 2.1.** *Seja  $C$  um conjunto compacto e  $t_1$  e  $t_2$  retas suportes paralelas em uma direção de largura máxima. Então valem as seguintes afirmações:*

- i. Se  $X$  é um ponto de  $C$ , de modo que  $\{X\} = C \cap t_1$  e  $l$  é uma reta perpendicular à  $t_1$  passando por  $X$ , então  $l$  intersecta  $t_2$  em  $Y$ , de modo que  $Y \in C$ .*
- ii.  $t_1$  e  $t_2$  intersectam  $C$  nos pontos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e a reta que contém esses pontos é perpendicular à  $t_1$  e  $t_2$ .*

*Demonstração.*

- i. Se  $l$  é perpendicular à  $t_1$ , então seja  $\{Y\} = l \cap t_2$ , assim podemos afirmar que a largura máxima de  $C$  é dada por  $m = \|X - Y\|$ . Suponhamos que  $Y \notin C$ , então existe  $Z \in C$  de modo que  $Z$  também pertence à  $t_2$  (FIG. 5). Os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  formam um triângulo retângulo em  $Y$ , então podemos concluir que  $\|X - Z\| > \|X - Y\| = m$ , mas isso contradiz a hipótese de  $m$  ser a largura máxima de  $C$ . Portanto,  $Y \in C$ .*

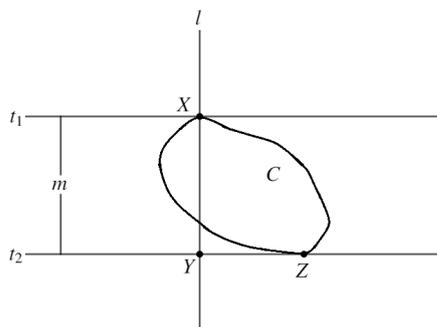


Figura 5

ii. Suponhamos agora que  $t_2$  toca  $C$  em pelo menos dois pontos,  $Y$  e  $W$ . Como  $\overline{XY}$  é perpendicular à  $t_2$ , pelo item anterior, temos um triângulo  $XYW$  retângulo em  $Y$ , assim  $\|X - W\| > \|X - Y\|$ , mas novamente temos uma contradição, pois  $\|X - Y\|$  é a largura máxima de  $C$ , portanto,  $t_2$  toca  $C$  em um único ponto. De modo análogo,  $t_1$  intersecta  $C$  em um único ponto. Suponhamos então que  $t_1$  e  $t_2$  tocam  $C$  respectivamente nos pontos  $X$  e  $Y$  e que o segmento  $\overline{XY}$  não é perpendicular às retas  $t_1$  e  $t_2$ . Como, por hipótese, a distância entre as retas  $t_1$  e  $t_2$  é  $m$ , largura máxima de  $C$ , temos  $\|X - Y\| > m$ , novamente um absurdo, portanto o segmento  $\overline{XY}$  é perpendicular às retas  $t_1$  e  $t_2$ .  $\square$

**Definição 2.7** (Conjunto Convexo). *Uma região  $C$  é convexa se para quaisquer dois pontos  $X$  e  $Y$  pertencentes à  $C$ , temos que o segmento  $\overline{XY} \subset C$ .*

**Definição 2.8** (Conjunto Estritamente Convexo). *Seja  $C$  um conjunto convexo, fechado e não vazio e  $\text{fr } C$  a fronteira de  $C$ .  $C$  é dito estritamente convexo se dados  $X, Y \in C$ ,  $\overline{XY} \subset \text{fr } C$  implicar em  $X = Y$ .*

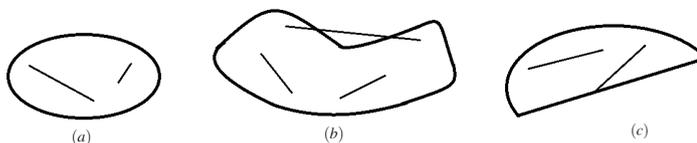


Figura 6: (a) conjunto estritamente convexo, (b) conjunto não convexo e (c) conjunto convexo

**Definição 2.9** (Conjunto de Largura Constante).  *$\mathcal{C}$  é um conjunto de largura constante se a sua largura é a mesma em todas as direções.*

Podemos citar como exemplo de conjunto de largura constante um círculo de raio  $r$  (ou mesmo um disco de mesmo raio) e o Triângulo de Reuleaux, conforme descrito em detalhes na seção 3.1.2.

**Observação 2.1.** *No caso em que  $\mathcal{C}$  é uma curva de largura constante, segue do Corolário 2.1 que, se  $\mathcal{C} \cap t_1 = \{X\}$  e  $\mathcal{C} \cap t_2 = \{Y\}$  e  $t_1$  e  $t_2$  são retas suportes paralelas, então o segmento  $\overline{XY}$  é ortogonal às retas  $t_1$  e  $t_2$ . E, se  $t$  é uma reta suporte a  $\mathcal{C}$ , então  $t \cap \mathcal{C}$  consiste de um único ponto, ou seja,  $\mathcal{C}$  é estritamente convexa [10].*

### 2.3 Teorema de Barbier

As definições de *perímetro* e *área* não são nada fáceis quando se trata de conjuntos convencionais. A área e o perímetro de conjuntos convexos se aproximam à dos polígonos regulares inscritos ou circunscritos à medida que o tamanho do lado diminui e o número de lados aumenta (FIG. 7).

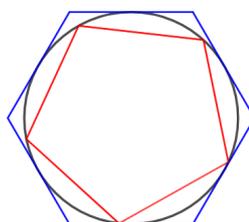


Figura 7: Círculo inscrito em um hexágono e circunscrito à um pentágono

**Definição 2.10** (Perímetro). *O perímetro de um conjunto compacto convexo não vazio é o comprimento de sua borda e é igual ao supremo (ínfimo) dos perímetros de todos os polígonos convexos inscritos (circunscritos).*

**Definição 2.11** (Área). *A área de um conjunto compacto convexo não vazio é igual ao supremo (ínfimo) das áreas de todos os polígonos convexos inscritos (circunscritos).*

O método de exaustão, que é uma aplicação das definições acima, será usado para a demonstração do Lema a seguir, para saber mais sobre esse método verifique em [1].

**Lema 2.1.** *O perímetro do círculo de raio  $R$  é  $2\pi R$ .*

*Demonstração.* Faremos uma comparação entre polígonos regulares inscritos e circunscritos, para isso usaremos polígonos com  $2^n$  lados, sendo  $n$  inteiro e  $n \geq 2$ . Consideremos um círculo  $\mathcal{C}$  de raio  $R$  e  $p_n$  o polígono regular inscrito com lado  $l_n$  e perímetro  $c_n$ . Para mudarmos de  $p_n$  para  $p_{n+1}$  usamos o ponto médio dos arcos formados pelos vértices do polígono  $p_n$  (FIG. 8).

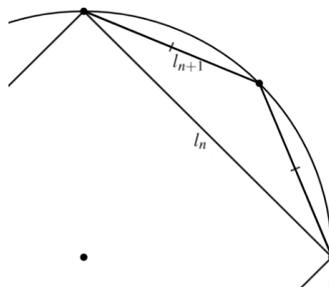


Figura 8

Pela desigualdade triangular, podemos afirmar que  $l_n < 2l_{n+1}$ , para todo  $n \geq 2$ , então

$$c_n = 2^n l_n < 2^n 2l_{n+1} = 2^{n+1} l_{n+1} = c_{n+1}$$

que nos garante que a sequência  $\{c_n\}$  é positiva e crescente.

Consideremos então  $P_n$  o polígono circunscrito de  $2^n$  lados sendo  $C_n$  o seu perímetro e  $L_n$  o seu lado, do mesmo modo que  $\{c_n\}$  é crescente concluímos que  $\{C_n\}$  é decrescente. Para  $n = 2$  temos  $C_2 = 8R > c_n$  (FIG. 9), então a sequência  $\{c_n\}$  é limitada, logo podemos definir o perímetro do círculo como  $\ell(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

Usando as relações trigonométricas no triângulo  $ABC$  isósceles (FIG. 10) obtemos

$$\text{sen}(\pi/2^n) = \frac{l_n/2}{R}, \text{ logo } l_n = 2R \text{sen}(\pi/2^n).$$

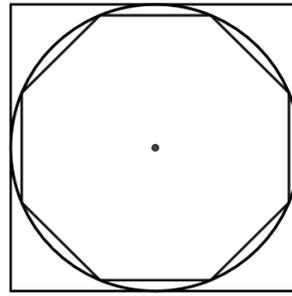


Figura 9

Assim,

$$\ell(\mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n 2R \operatorname{sen}(\pi/2^n) = 2R \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{sen}(\pi/2^n). \quad (1)$$

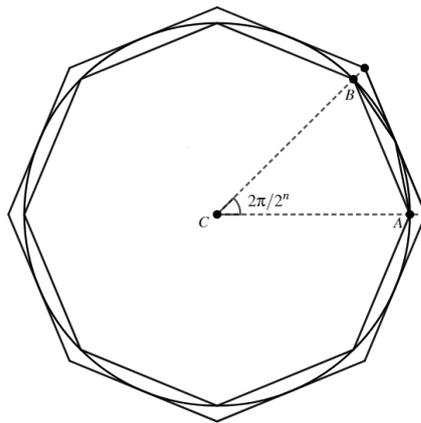


Figura 10

Se tomarmos círculos  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  de raios  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, com  $R_1 \neq R_2$ , teremos, pela equação (1), que

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\mathcal{C}_1)}{2R_1} &= \frac{\ell(\mathcal{C}_2)}{2R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{sen}(\pi/2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi/2^n)}{2^n (\pi/2^n)} \\ &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/2^n)}{(\pi/2^n)} = \pi \cdot 1 = \pi, \end{aligned}$$

ou seja, para qualquer valor de  $R$  a razão  $\frac{\ell(C)}{2R}$  será sempre  $\pi$ . Portanto, da equação (1) concluímos que

$$\ell(C) = 2\pi R.$$

□

O Teorema de Barbier estabelece que um conjunto de largura constante  $m$  também possui perímetro  $\pi m$  e para sua demonstração precisaremos do Lema a seguir.

**Lema 2.2.** *Sejam  $ABCD$  um losango e  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$  duas cordas, perpendiculares à diagonal  $\overline{BD}$ , situadas em semiplanos distintos em relação a  $\overline{AC}$ . Seja  $m$  a distância entre as cordas  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$ , então o perímetro do hexágono  $APQCNM$  não depende da posição de  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ}$ .*

*Demonstração.* O perímetro  $P$  do hexágono  $APQCNM$  é dado por

$$P = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QC} + \overline{CN} + \overline{NM} + \overline{MA}. \tag{2}$$

Consideremos os triângulos  $QBP$ ,  $CBA$ ,  $CDA$  e  $NDM$  semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo-Ângulo (AAA) (FIG. 11), seja  $x$  a medida dos lados do losango,  $y = \overline{PB} = \overline{BQ}$ ,  $z = \overline{ND} = \overline{DM}$ ,  $m = \overline{RS}$  e  $w = \overline{RO}$ , então, dos triângulos isósceles  $PBQ$ ,  $NDM$  e  $ABC \cong CDA$ , existem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\overline{PQ}}{2}}{y} &= \text{sen}(\alpha), & \text{logo } \overline{PQ} &= 2y \text{sen}(\alpha), \\ \frac{\frac{\overline{NM}}{2}}{z} &= \text{sen}(\alpha), & \text{logo } \overline{NM} &= 2z \text{sen}(\alpha), \\ \frac{\overline{BO}}{x} &= \frac{\overline{OD}}{x} = \text{cos}(\alpha), & \text{logo } \overline{BO} &= \overline{OD} = x \text{cos}(\alpha). \end{aligned}$$

Os triângulos  $QBP$  e  $NDM$  são semelhantes aos triângulos  $CBA$  e  $CDA$ ,

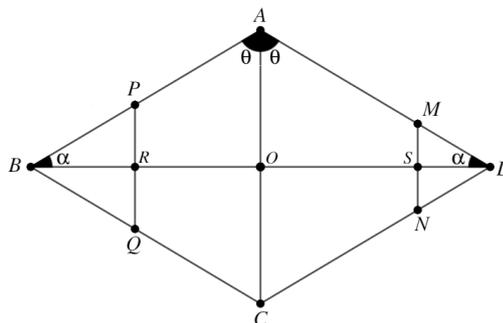


Figura 11

respectivamente, pelo caso AAA, temos

$$\frac{y}{x} = \frac{x \cos(\alpha) - w}{x \cos(\alpha)}, \quad \text{logo} \quad y = \frac{x \cos(\alpha) - w}{\cos(\alpha)},$$

$$\frac{z}{x} = \frac{x \cos(\alpha) - (m - w)}{x \cos(\alpha)}, \quad \text{logo} \quad z = \frac{x \cos(\alpha) - m + w}{\cos(\alpha)}.$$

Então  $y + z = \frac{2x \cos(\alpha) - m}{\cos(\alpha)}$ , substituindo estes resultados na equação (2), obtemos

$$\begin{aligned} P &= (x - y) + 2y \operatorname{sen}(\alpha) + (x - y) + (x - z) + 2z \operatorname{sen}(\alpha) + (x - z) \\ &= 4x + 2(y + z)[\operatorname{sen}(\alpha) - 1] \\ &= 4x + 2\left(2x - \frac{m}{\cos(\alpha)}\right)(\operatorname{sen}(\alpha) - 1). \end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do hexágono depende apenas de três fatores: a distância  $m$  entre as cordas, um dos ângulos e a medida do lado do losango. □

Para demonstrar o Teorema de Barbier, primeiramente iremos mostrar que um círculo  $\mathcal{O}$  de diâmetro  $m$  e uma curva  $\mathcal{C}$  de largura constante  $m$  sempre podem ser circunscritos por polígonos equiangulares com  $2^n$  lados e mesmo perímetro. Em seguida, faremos um processo limite em tais polígonos de  $2^n$  lados para concluir que  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  possuem mesmo perímetro, ou seja, o perímetro de  $\mathcal{C}$  é  $\pi m$ .

**Teorema 2.2** (Barbier). *Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto de largura constante  $m$ , então o*

perímetro de  $\mathcal{C}$  é  $\pi m$ .

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{O}$  um círculo de diâmetro  $m$  e  $\mathcal{C}$  um conjunto de largura constante  $m$ . Aplicaremos o método da indução finita para mostrar que  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  podem ser circunscritos por polígonos equiangulares (ângulos iguais) de  $2^k$  lados e de mesmo perímetro. Temos que a afirmação é verdadeira para  $k = 2$ , pois  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  podem ser circunscritos por quadrados de mesmo perímetro (FIG. 12).

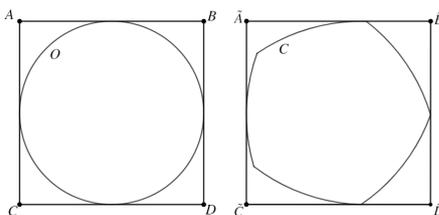


Figura 12

Para ver isto, sejam  $ABCD$  e  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$  quadriláteros equiangulares que circunscvem, respectivamente, os conjuntos  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$ , observemos que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos, assim como  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ , com distância  $m$  entre eles, pois os lados são segmentos de retas suportes a  $\mathcal{O}$ . O mesmo vale para o polígono  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ , como os quadriláteros possuem a mesma altura, então eles são quadrados equivalentes. Suponhamos que a afirmação seja válida para  $k = n$  e vejamos, então, que a afirmação é válida para  $n + 1$  e, portanto, para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Pela hipótese de indução,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$  podem ser circunscritos por polígonos equiangulares de  $2^n$  lados e de mesmo perímetro, então consideremos os lados adjacentes  $\overline{BE}$  e  $\overline{BF}$  opostos à  $\overline{DH}$  e  $\overline{DG}$ , respectivamente (FIG. 13 - adaptada de [4]). Prolongando esses lados obtemos o losango  $ABCD$ , que será congruente ao losango  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$  obtido pelo prolongamento de  $\overline{\tilde{B}\tilde{E}}$ ,  $\overline{\tilde{B}\tilde{F}}$ ,  $\overline{\tilde{D}\tilde{G}}$  e  $\overline{\tilde{D}\tilde{H}}$ , isso é possível porque os ângulos  $\hat{D}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{\tilde{D}}$  e  $\hat{\tilde{B}}$  são congruentes por hipótese, e a distância entre os lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ , e  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$  são iguais a largura do círculo  $\mathcal{O}$ , do mesmo modo a distância entre os lados  $\overline{\tilde{A}\tilde{D}}$  e  $\overline{\tilde{B}\tilde{C}}$  e  $\overline{\tilde{A}\tilde{B}}$  e  $\overline{\tilde{D}\tilde{C}}$  são iguais a largura da curva  $\mathcal{C}$ . Traçamos então as retas  $\overline{PQ}$  e  $\overline{MN}$  suportes a  $\mathcal{O}$ , perpendiculares a diagonal  $\overline{DB}$ , cuja distância entre elas é  $m$ , formando o hexágono  $AMNCPQ$ . De modo análogo temos as retas  $\overline{\tilde{P}\tilde{Q}}$  e  $\overline{\tilde{M}\tilde{N}}$  formando o hexágono  $\tilde{A}\tilde{M}\tilde{N}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}$ , que, conforme o Lema 2.2, possui o

mesmo perímetro de  $AMNCPQ$ . Do polígono inicial, trocamos os vértices  $D$  e  $B$  pelos vértices  $Q, P, M$  e  $N$ , respectivamente, ( $\tilde{D}$  e  $\tilde{B}$  pelos vértices  $\tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{M}$  e  $\tilde{N}$ ), se refizermos esse processo em todos os vértices dos dois polígonos, o número de vértices irá dobrar e assim, passaremos a ter polígonos equiangulares de  $2^{n+1}$  lados com perímetros iguais.

Concluimos, pelo princípio da indução finita, que polígonos equiangulares de  $2^n$  lados, com  $n$  natural e maior do que 1, de mesmo perímetro, podem circunscrever a  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{C}$ . Portanto, quando  $n \rightarrow \infty$ , o perímetro de  $\mathcal{C}$  será igual a  $\pi m$ , que é igual ao perímetro do círculo  $\mathcal{O}$ .

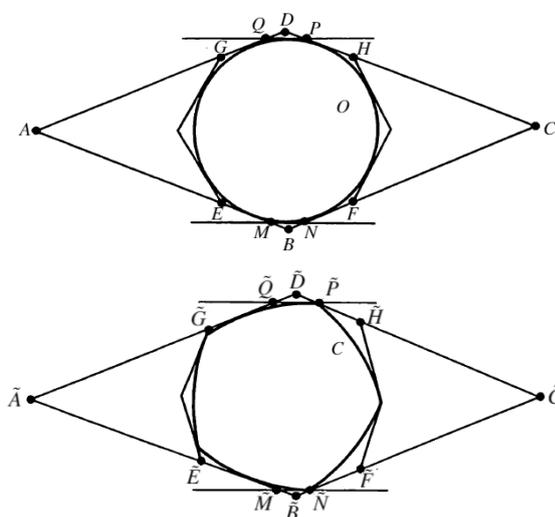


Figura 13

□

### 3 Curvas de Largura Constante

Esta seção é dedicada à descrição, construção e aplicação de curvas de largura constante, mais especificamente do Triângulo de Reuleaux. As referências utilizadas para esta seção são [6], [7] e [9].

### 3.1 Curvas de Largura Constante

Uma curva é dita de largura constante, como vimos no capítulo 2, se em todas as direções ela possuir sempre a mesma largura. Quando falamos de curvas de largura constante, logo pensamos no círculo, por ser o mais comum.

Os sólidos com secções circulares, por exemplo, o cilindro, são utilizados como base para transportar blocos desde a antiguidade, pois eles conservam a distância entre o chão e o bloco sempre constante (FIG. 14).

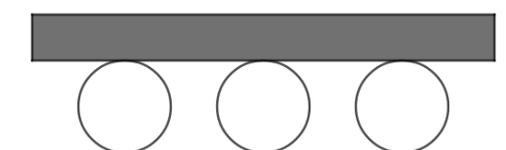


Figura 14

A tampa do bueiro encontrada pelas ruas das cidades é circular, pois, independente da forma que ela girar, sempre se encaixará e nunca cairá no buraco, simplesmente por ser uma curva de largura constante. Outro exemplo são as moedas que, em sua maioria, são circulares, para que possam entrar com facilidade em máquinas de caça niqueis.

O *Triângulo de Reuleaux* foi usado pelo físico alemão Franz Reuleaux que desenvolveu mecanismos envolvendo uma curva plana construída a partir de um triângulo equilátero no século XIX. Formado pela união de três arcos de raio  $m$  e ângulo  $\pi/3 \text{ rad}$ , centrados nos vértices de um triângulo equilátero, o Triângulo de Reuleaux (FIG. 3.1.2) é uma curva de largura contante, assim como o círculo. Apesar de pouco conhecida tem sido encontrada em diversas áreas como na arquitetura e em algumas engenharias.

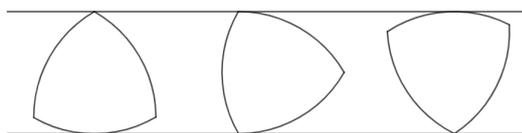


Figura 15

Existem infinitos tipos de curvas de largura constante, então um bloco pode ser transportado usando cilindros cuja as secções não sejam circulares (FIG. 16).

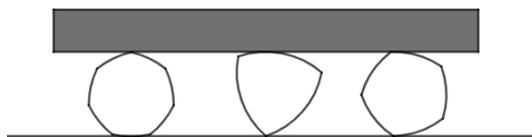


Figura 16

Serão desenvolvidos, nessa seção, alguns exemplos de curvas de largura constante. O perímetro dessas curvas, independente de seu formato, é igual ao perímetro do círculo de mesma largura, como já é conhecido pelo Teorema de Barbier, mas, mesmo assim, esse fato será deduzido junto com a fórmula para cálculo da área da região englobada pela curva.

### 3.1.1 Círculo

*Círculo* é o conjunto de pontos  $X$  equidistantes a um ponto dado  $O$ , denominado centro. Para construí-lo é preciso apenas determinar a posição do centro e o tamanho do raio  $R = d(X, O)$  (FIG. 17).

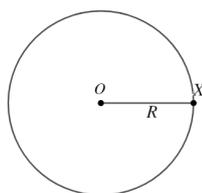


Figura 17

A largura  $m$  de um círculo de raio  $R$  é o número  $m = 2R$ . Para calcular o perímetro  $P$  e a área  $A$  de um círculo de largura  $m$  usamos as fórmulas já

conhecidas

$$P = 2\pi R = 2\pi \frac{m}{2} = \pi m,$$

$$A = \pi R^2 = \pi \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{\pi m^2}{4}.$$

### 3.1.2 Triângulo de Reuleaux

O *Triângulo de Reuleaux* é uma curva plana construída a partir de um triângulo equilátero, mas pode ser visto também como a união de três arcos de raio  $m$  e ângulo  $\pi/3 \text{ rad}$ . Sua construção é muito simples e pode ser feita de duas formas diferentes. Uma forma é, a partir de um triângulo equilátero de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , traçarmos um arco com centro em  $A$  e extremidades nos outros dois vértices, depois repetimos o processo com os vértices  $B$  e  $C$  (FIG. 18).

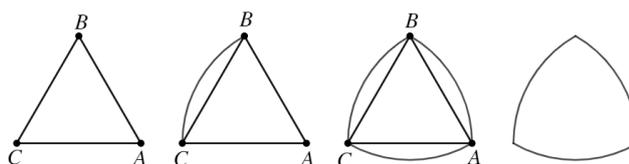


Figura 18

Nesse caso temos uma curva de largura constante  $m$ , onde  $m$  é a medida dos lados do triângulo usado como base para a construção.

Uma outra forma de construir o Triângulo de Reuleaux é a partir da interseção de três círculos de mesmo raio. A partir de dois pontos dados  $A$  e  $B$ , traçamos três círculos de raio  $\overline{AB}$ , sendo  $O_1$  centrado em  $A$ ,  $O_2$  em  $B$  e  $O_3$  com centro em  $C = O_1 \cap O_2$  (FIG. 19). Percebemos facilmente que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  formam um triângulo equilátero.

O perímetro dessa curva pode ser obtido pela soma do comprimento de três arcos de ângulo  $\pi/3 \text{ rad}$  e raio  $m$ , isto é,

$$P = 3 \cdot \frac{\pi m}{3} = \pi m,$$

conforme foi provado no Teorema de Barbier, é igual ao comprimento do círculo

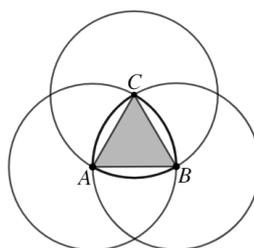


Figura 19

de largura  $m$ .

A área pode ser obtida ao somarmos a área dos três segmentos circulares formados ao redor do triângulo, que é a área do setor menos a área do triângulo, isto é,

$$A_{seg. circular} = \frac{\pi m^2}{6} - \frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12},$$

com a área do triângulo equilátero de lado  $m$ :

$$A = 3 \frac{m^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} + \frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Ou com a soma das áreas dos três setores circulares, subtraindo duas vezes a área do triângulo equilátero de lado  $m$

$$A = 3 \frac{\pi m^2}{6} - 2 \frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2}. \tag{3}$$

### 3.1.3 Polígonos de Reuleaux

Qualquer polígono regular com uma quantidade ímpar de lados pode originar uma curva de largura constante, conhecida como *Polígonos de Reuleaux*. A construção é semelhante à do Triângulo de Reuleaux, os arcos são construídos usando os vértices como centro e extremidades nos lados oposto (FIG. 20).

Apenas polígonos com uma quantidade ímpar de lados podem originar curvas de largura constante, pois se o número de lados for par os vértices não são opostos

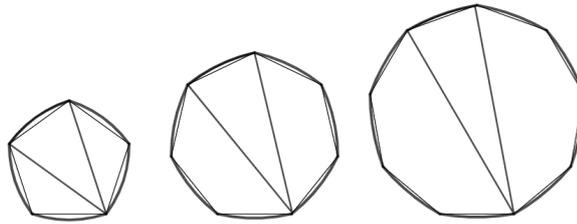


Figura 20: Polígonos de Reuleaux construídos a partir de polígonos equiláteros, de 5, 7 e 9 lados, respectivamente

a lados, mas sim a outros vértices, com isso não é possível formar arcos com extremidades nos vértices (FIG. 21).

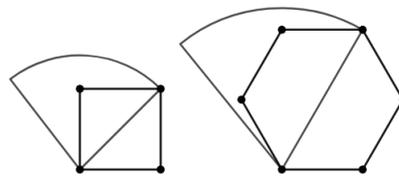


Figura 21

Para chegarmos ao perímetro e à área de um Polígono de Reuleaux considere-  
mos  $n$  o número de lados do polígono regular,  $m$  a medida da diagonal,  $c$  a medida  
do lado e  $\pi/n \text{ rad}$  o ângulo de cada setor (FIG. 22).

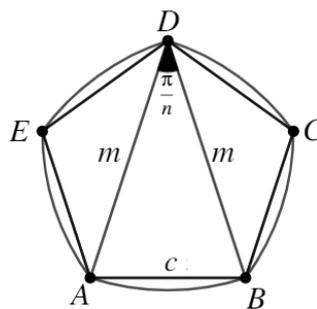


Figura 22

O perímetro é a soma dos  $n$  arcos de raio  $m$  e ângulo  $\pi/n \text{ rad}$ , então, como já

é esperado, temos

$$P = n \frac{\pi m}{n} = \pi m.$$

Para a fórmula da área é preciso relembrar algumas relações importantes, seja  $h$  a medida da altura do triângulo  $ABD$  e  $a$  o apótema do polígono. Usando relações trigonométricas chegamos a  $c = 2m \text{sen}(\pi/2n)$  e  $A_{\Delta ABC} = \frac{m^2 \text{sen}(\pi/n)}{2}$ , com isso podemos escrever a área do segmento circular como a área do setor menos a área do triângulo, isto é

$$A_{seg. circular} = \frac{\pi m^2}{2n} - \frac{m^2 \text{sen}(\pi/n)}{2} = \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\pi}{n} - \text{sen}(\pi/n) \right]. \quad (4)$$

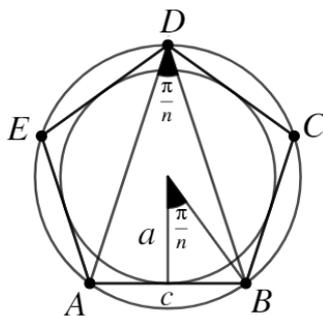


Figura 23

O apótema  $a$  é a medida do raio do círculo inscrito no polígono (FIG. 23), pode ser dado por

$$\tan(\pi/n) = \frac{c/2}{a} \implies a = \frac{c/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{2m \text{sen}(\pi/2n) \cos(\pi/n)}{2 \text{sen}(\pi/n)} = \frac{m \cos(\pi/n)}{2 \cos(\pi/2n)}.$$

Assim, considerando  $p$  como o perímetro do polígono, temos

$$A_{pol. regular} = \frac{pa}{2} = n \cdot 2m \text{sen}(\pi/2n) \cdot \frac{m \cos(\pi/n)}{2 \cos(\pi/2n)} \cdot \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{n m^2 \cos(\pi/n) \text{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)}. \quad (6)$$

Enfim, a área de um Polígono de Reuleaux de  $n$  lados e largura  $m$  é a soma dos  $n$  segmentos circulares obtidos em (4) com a área do polígono (6), isto é,

$$A = \frac{n m^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)} + n \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] \quad (7)$$

$$= \frac{n m^2}{2} \left[ \frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right]. \quad (8)$$

Nos Polígonos de Reuleaux, existem pontos em que é possível traçar retas suportes em direções diferentes, isto é, no mesmo ponto existe mais de uma reta suporte, esses pontos são os vértices do polígono que dão origem à curva, (FIG. 24). Para confirmar que os Polígonos de Reuleaux são curvas de largura constante, observamos que a distância entre as retas suportes é dada pelo segmento que une os pontos de intersecção entre as retas e a curva, isto é, o raio dos arcos.

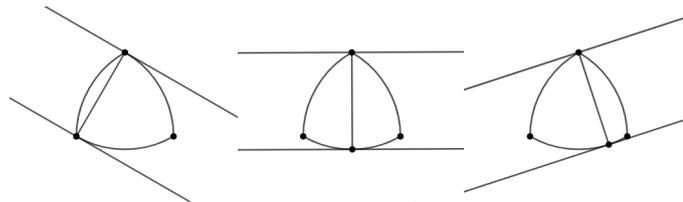


Figura 24

### 3.1.4 Curvas Paralelas aos Polígonos de Reuleaux

Um outro tipo de curva de largura constante, semelhante aos Polígonos de Reuleaux, pode ser construída usando como base polígonos regulares com um número ímpar de lados. Faremos, ao longo do capítulo, uma construção para o triângulo e outra para o pentágono, mas a última servirá para qualquer polígono com mais de três lados.

Iniciamos prolongando os lados do triângulo. Em um dos vértices, traçamos um círculo de raio  $r$  qualquer e marcamos os pontos  $A'$  e  $A''$ , formados pelas interseções do círculo com os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente (FIG. 25). Em seguida construímos um arco com centro em  $A$  e extremidades em  $A'$  e  $A''$ .

Repetimos o processo nos vértices  $B$  e  $C$ , usando o mesmo raio  $r$ . Para finalizar

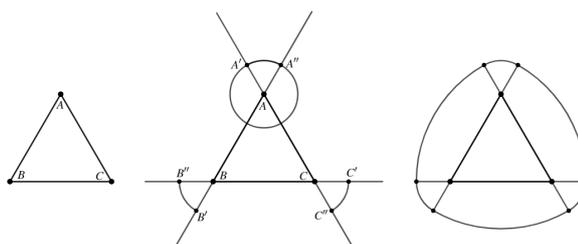


Figura 25

construímos os arcos centrados em  $A$  e extremidades em  $B'$  e  $C''$ , repetindo igualmente nos vértices  $B$  e  $C$ . Esta curva terá largura igual a soma do lado  $l$  do triângulo com duas vezes o raio  $r$  do círculo, isto é,  $m = l + 2r$ . Um procedimento semelhante pode ser realizado em qualquer polígono regular com uma quantidade ímpar de lados, mas, ao invés de prolongarmos os lados, devemos prolongar as diagonais (FIG. 26). A largura dessas curvas também é  $m = l + 2r$ .

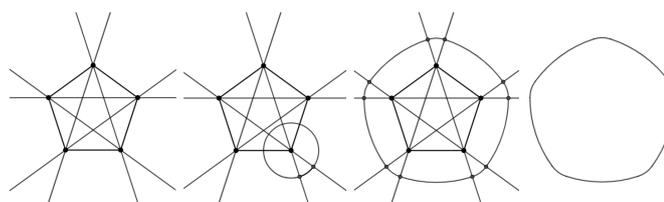


Figura 26

Sabendo as medidas  $l$  e  $r$  (FIG. 27), o perímetro será a soma dos  $n$  arcos de raio  $l + r$  com os  $n$  arcos de raio  $r$ , isto é,

$$P = n \left( \frac{\pi(l + r)}{n} + \frac{\pi r}{n} \right) = \pi(l + 2r) = \pi m.$$

Para a área, somamos a área do polígono cuja diagonal mede  $l$ ,

$$A_{pol. regular} = \frac{n l^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)}$$

com a área dos  $n$  arcos de raio  $r$  e das  $n$  regiões circulares, formado pela diferença entre o segmento circular de raio  $l + r$  e o triângulo isósceles de dois lados medindo

$l$ , assim obtemos

$$A = \frac{n l^2 \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2 \cos(\pi/2n)} + n \left[ \frac{\pi r^2}{2n} + \left( \frac{\pi(l+r)^2}{2n} - \frac{l^2 \operatorname{sen}(\pi/n)}{2} \right) \right] \quad (9)$$

$$= \frac{n l^2}{2} \left[ \frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] + \frac{\pi}{2} [r^2 + (r+l)^2]. \quad (10)$$

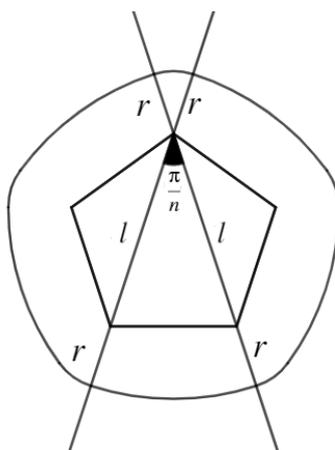


Figura 27

Diferente dos Polígonos de Reuleaux, nessa curva cada ponto possui apenas uma reta suporte, pois os vértices do polígono não fazem parte da curva. Ela recebe esse nome por possuir tangentes paralelas ao Polígono de Reuleaux (FIG. 28).

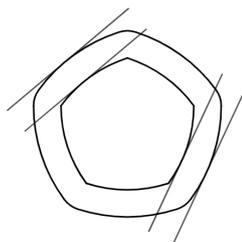


Figura 28

A distância entre as retas suportes dessa curva é dada pelo segmento  $\overline{XY}$  que é soma do raio de dois arcos, isso acontece porque, pelo corolário 2.1, o segmento  $\overline{XY}$  é perpendicular as retas suportes e, como sabemos, toda reta perpendicular

a reta tangente, no ponto de tangência, de um círculo passa pelo seu centro (FIG. 29).

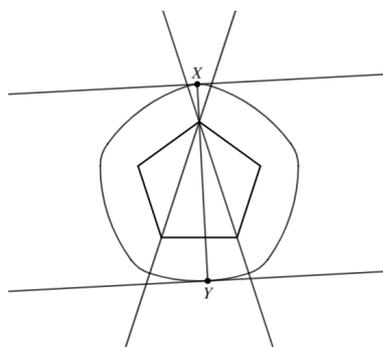


Figura 29

### 3.1.5 Curva Formada por Retas Concorrentes

Essas curvas são construídas a partir de retas, todas concorrentes entre si (FIG. 30). Inicialmente escolhemos uma das interseções entre as retas, o ponto escolhido será o centro de um círculo de raio qualquer. Começando então pelo ponto  $A$  temos,  $G$  e  $H$  interseções entre o círculo e as retas que passam por  $A$ . O arco  $GH$ , centrado em  $A$ , é o primeiro arco da curva. O próximo arco tem centro em  $E$  e raio  $\overline{EH}$ , observe que  $E$  é ponto de interseção entre as retas que dão origem ao novo arco. Continuando o processo, temos os arcos centrado em  $D, C, A, E, D$  e  $C$  e raios  $\overline{DI}, \overline{CJ}, \overline{AK}, \overline{EL}, \overline{DM}$  e  $\overline{CN}$ , respectivamente.

Observe que os pontos  $B$  e  $F$  não foram utilizados como centro de nenhum arco, caso eles fossem escolhidos teríamos um círculo (FIG. 31).

A largura dessa curva é dada pela distância entre pontos extremos de arcos em uma mesma reta, ou seja, a largura será igual a média dos segmentos  $\overline{LH} = \overline{MI} = \overline{NJ} = \overline{GK}$ .

É fácil perceber que esses segmentos são congruentes (FIG. 32-a), as equações

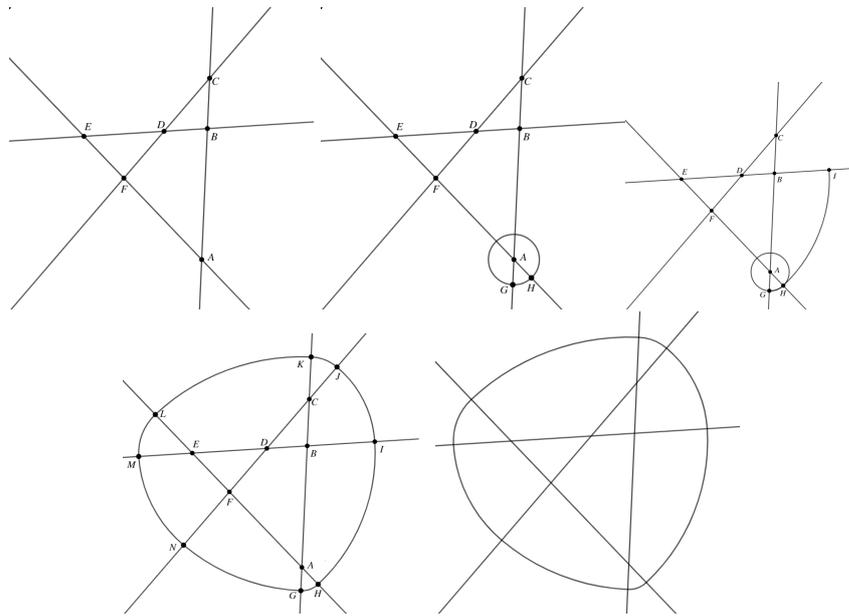


Figura 30

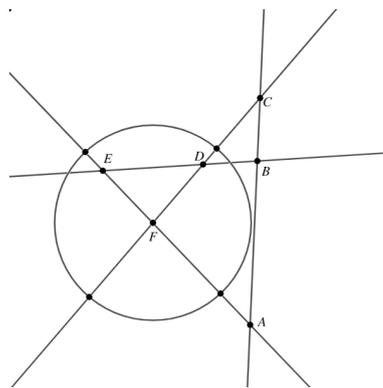


Figura 31

a seguir são verdadeiras, pois são segmentos que pertencem ao mesmo arco

$$b + c + d = e + f + g \tag{11}$$

$$a + b = m + l \tag{12}$$

$$c + d = k + j \tag{13}$$

$$m + l + k = g + h + i. \tag{14}$$

Somando  $a$  na equação (11) garantimos que os segmentos  $\overline{LH}$  e  $\overline{MI}$  são iguais, da mesma forma, somando  $j$  na equação (14) temos que  $\overline{NJ} = \overline{GK}$ . Por fim, se somarmos as equações (12) e (13) temos que  $\overline{MI} = \overline{NJ}$ , portanto

$$\overline{LH} = \overline{MI} = \overline{NJ} = \overline{GK}.$$

Podemos considerar a largura da curva na direção de qualquer outra reta (FIG. 32-b), considere  $X$  um ponto do arco  $ML$  e  $r$  a reta suporte nesse ponto,  $s$  é perpendicular a reta  $r$  em  $X$ , então  $E \in s$  e  $s$  toca o arco  $HI$  em  $Y$ , a reta  $t$  é suporte à curva em  $Y$ , logo as retas  $t$  e  $s$  são perpendiculares. Assim, a distância entre as retas  $r$  e  $t$  é dada por  $\|X - Y\|$  que é igual ao raio dos  $ML$  e  $IH$ , ou seja, igual ao segmento  $\overline{MI}$ , portanto a largura dessa curva será sempre constante.

Para esse tipo de curva, também é possível calcular perímetro e área, porém é necessário saber a medida dos ângulos entre as retas e a medida do raio de cada setor.

### 3.2 Comparando a Área

Já sabemos que independente da forma de construção das curvas de largura constante  $m$  elas sempre terão comprimento  $\pi m$ , como foi provado no Teorema de Barbier e comprovado com os cálculos feitos acima. Para a área dessas curvas, existe uma relação muito importante a qual diz que dentre todas as curvas de largura constante  $m$  a de menor área é o Triângulo de Reuleaux e a de maior área é o círculo.

Quando pensamos nos Polígonos de Reuleaux é intuitivo entender que a curva de maior área é o círculo e a de menor é o Triângulo de Reuleaux, afinal eles foram construídos a partir de polígonos regulares que por sua vez podem ser inscritos num círculo. Mostraremos que para os Polígonos de Reuleaux e para as curvas paralelas a eles isso é verdade.

A equação da área (8) para os Polígonos de Reuleaux de largura  $m$  é uma sequência monótona e crescente, assim, quando  $n = 3$  o polígono de menor área será o Triângulo de Reuleaux e quando  $n \rightarrow \infty$  a área tende para  $\frac{\pi m^2}{4}$ , isto é, para

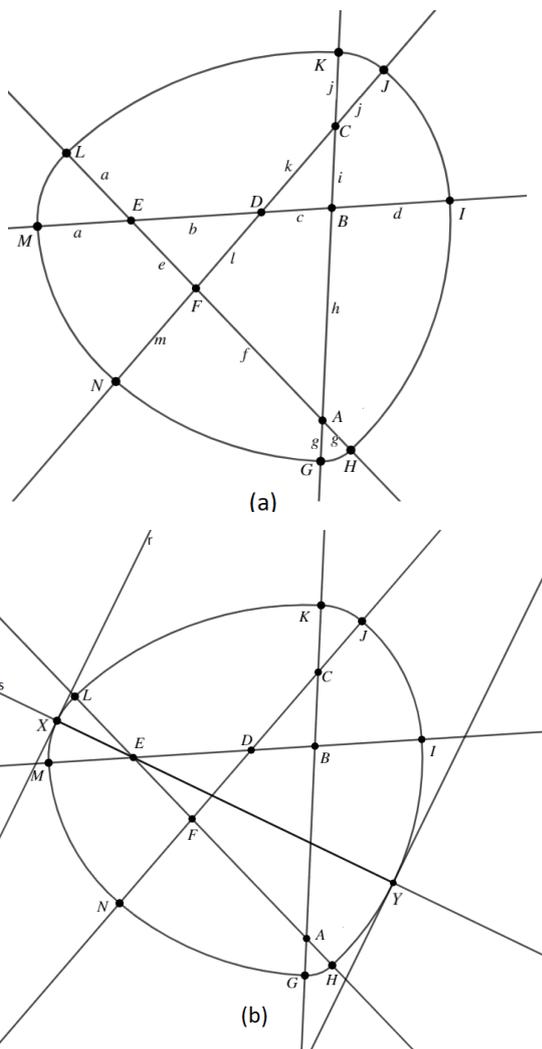


Figura 32

a área do círculo de raio  $\frac{m}{2}$ , vejamos

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n m^2}{2} \left[ \frac{\cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{\cos(\pi/2n)} + \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}(\pi/n) \right] \\
 &= \frac{m^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/2n)} \operatorname{sen}(\pi/2n) \frac{(\pi/2n)}{(\pi/2n)} + n \frac{\pi}{n} - n \operatorname{sen}(\pi/n) \frac{(\pi/n)}{(\pi/n)} \right] \\
 &= \frac{m^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \frac{\pi \cos(\pi/n) \operatorname{sen}(\pi/2n)}{2n \cos(\pi/2n) (\pi/2n)} + \pi - n \frac{\pi \operatorname{sen}(\pi/n)}{n (\pi/n)} \right] \\
 &= \frac{m^2}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \pi - \pi \cdot 1 \right) \right] = \frac{m^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi m^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Se refizermos esse procedimento para a área das curvas paralelas aos Polígonos de Reuleaux de largura  $m$ , encontrada em (9), também chegaremos a área do círculo.

Vamos então comparar a menor curva paralela ao Polígono de Reuleaux com Triângulo de Reuleaux, ambos com a mesma largura  $m$  (FIG. 33).

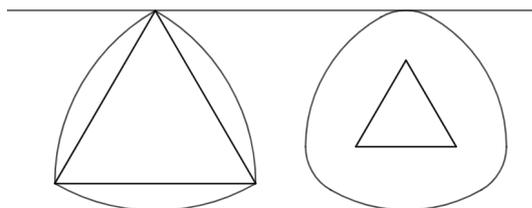


Figura 33

A área da curva paralela ao Triângulo de Reuleaux, de largura  $m = l + 2r$ , é dada pela equação (9) quando  $n = 3$ , ou seja,

$$A = \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l).$$

Ao substituir  $m = l + 2r$  na equação (3) da área do Triângulo de Reuleaux de largura  $m$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{m^2(\pi - \sqrt{3})}{2} &= \frac{(l + 2r)^2(\pi - \sqrt{3})}{2} \\ &= \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l) - (r^2 + lr)(2\sqrt{3} - \pi) \\ &< \frac{l^2(\pi - \sqrt{3})}{2} + \pi r(r + l). \end{aligned}$$

Portanto a área do Triângulo de Reuleaux é menor.

O Teorema a seguir mostra que o círculo possui a maior área e o Triângulo de Reuleaux a menor, independentemente da curva, desde que tenham todas a mesma largura  $m$ . A demonstração desse Teorema será omitida, as ferramentas utilizadas vão além dos objetivos deste estudo, ela está disponível na página 250 de [11].

**Teorema 3.1.** *Entre todos os conjuntos de largura constante  $m$ , o que possui a maior área é o círculo e o triângulo de Reuleaux a menor.*

### 3.3 Aplicações do Triângulo de Reuleaux

Algumas imagens na obra *Codex Madrid* de Leonardo da Vinci, no século XV, mostram alguns triângulos curvos. A janela da *Catedral de Notre Dame* do século XIII em Bruges na Bélgica (Fig. 34) e algumas referências que nos levam a Leonard Euler no século XVIII são registros que evidenciam a presença de triângulos curvos, mas o primeiro a estudar e fazer uso dessa curva foi Franz Reuleaux (1829-1905).



Figura 34: Janela da Catedral de Notre Dame [8]

O Triângulo de Reuleaux é utilizado em várias áreas, por exemplo, nas engenharias mecânica e civil, na arquitetura e no designer de diversos produtos (Fig. 35, 36, 37, 38, 39 e 40).

Se colocarmos um Triângulo de Reuleaux de largura  $m$  para girar dentro de um quadrado de lado medindo  $m$ , observamos que a trajetória percorrida pelo Triângulo de Reuleaux se assemelha ao quadrado, porém com os vértices arredondados (FIG. 41).

Devido a esta especificidade, fazer "furos quadrados", o Triângulo de Reuleaux é muito utilizado na engenharia mecânica. Harry James Watts, em 1914, produziu uma broca inspirada no Triângulo de Reuleaux (FIG. 42), para produzir furos com



Figura 35: Tampa de esgoto em São Francisco [2]



Figura 36: Moedas de Libras [5]

formato aproximado de um quadrado.

O Triângulo de Reuleaux também é utilizado na produção de motores, como o Motor de Wankel (FIG. 43), que não faz uso dos pistões usuais, garantindo assim um motor menor e mais silencioso [3].

#### 4 Conclusão

Desenvolvemos um estudo sobre entes geométricos pouco conhecidos e que estão presentes em vários objetos há alguns séculos: os conjuntos de largura constante. Dentre os conjuntos de largura constante, o mais popular é o círculo e, em menor escala, o triângulo de Reuleaux. Para melhor examinar as várias construções



Figura 37: Lápis [5]



Figura 38: Groot Vleeshuis (Gante, Bélgica) [5]

geométricas, a utilização do software GeoGebra foi um importante instrumento de trabalho para a realização dessa análise, pois possibilitou compreensões primordiais para o entendimento dos conceitos pesquisados.

Desse modo, realizamos um estudo acerca das curvas de largura constante e verificamos que o Teorema de Barbier tem como principal consequência a observação de que todas as curvas de largura constante  $m$  não podem ser diferenciadas pelo comprimento de seu perímetro.



Figura 39: Lixeira [5]



Figura 40: Guan Baihua e sua bicicleta especial (China, 2009) [8]

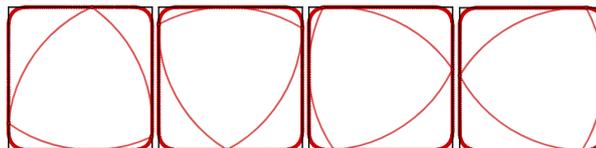


Figura 41

### Referências

- [1] Sônia P. CARVALHO. A área e o perímetro de um círculo. *1º Colóquio de Matemática da Região Sudeste, UFMG, 2011.*
- [2] divulgadores.com. Triângulos de Reuleaux y otras curvas de ancho constante.

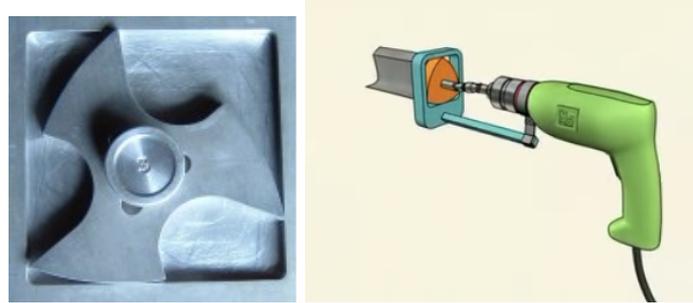


Figura 42: Broca para "furo quadrado" [8] e [3]

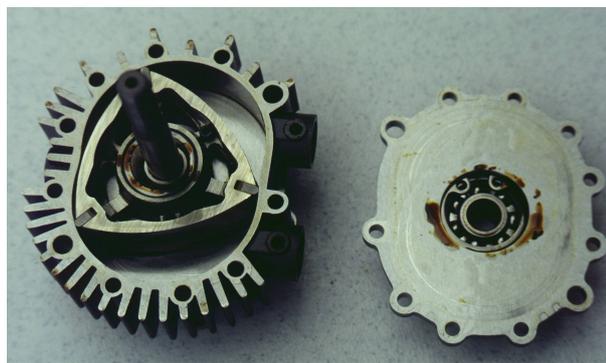


Figura 43: Motor de Wankel [3]

<https://divulgadores.com/poligonos-de-reuleaux/>.  
Acesso 15 de janeiro de 2018.

[3] ENGENHARIA em Movimento. Entenda a ciência por trás do furo quadrado. <http://www.engenhariadomovimento.com.br/2014/12/entenda-ciencia-por-trasdo-furo.html>. Acesso em 15 de março de 2018.

[4] Steven R. LAY. Convex Sets and Their Applications. *New York: John Wiley & Sons*, 1982.

[5] M. Macho. Franz Reuleaux, sus triángulos y sus mecanismos. <https://ztfnews.wordpress.com/2014/09/30/franz-reuleaux-sus-triangulos-y-sus-mecanismos/>. Acesso em 12 de fevereiro de 2018.

- [6] José Luiz Pastore MELO. Polígonos de Reuleaux e a generalização de Pi. *Revista do Professor de Matemática, no 81, 2o Quadrimestre de 2013, Rio de Janeiro: SBM, 2013.*
- [7] André Soares RODRIGUES. Polígonos de Reuleaux. *Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - UFPB, João Pessoa,, 2015.*
- [8] Clara Grima RUIZ and Raquel Garcia ULLDEMOLINS. Mati, una profesora muy particular: No todo es lo que parece. <https://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/poligonos-de-reuleaux/>. Acesso em 12 de fevereiro de 2018.
- [9] Celso Itsuo TARUMOTO. Polígonos de Reuleaux e Aplicações. *Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) - UFGD, Dourados,, 2014.*
- [10] J. F. VOLOCH. Curvas de Largura Constante. *Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, no 5, 1987.*
- [11] I. M. YAGLOM and V. G. BOLTYANSKII. Convex Figures. *New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1961.*