Equações de diferenças lineares e homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes e crescimento populacional de plantas anuais.

Geraldo Cesar de Figueiredo gcfigueiredo@yahoo.com.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Eder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Wenderson Marques Ferreira wmf@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Resumo

Neste estudo abordam-se as equações de diferenças lineares e homogêneas de segunda ordem com coeficientes reais e constantes, apresentando o conjunto solução das mesmas e um problema da Biologia modelado por este tipo de equação.

Palavras-chave

Equações de diferenças lineares, Sequência de Fibonacci, Solução geral, Unicidade da solução, Plantas anuais.

1 Introdução

Neste trabalho apresenta-se um estudo das equações de diferenças lineares e homogêneas de segunda ordem com coeficientes reais constantes. Aborda-se, também, um problema biológico, apresentado no livro Mathematical Models in Biology da autora Leah Edelstein - Keshet, sobre crescimento da população de plantas anuais relacionando-se, assim, os resultados teóricos com uma aplicação biológica. Simulações do problema utilizando-se o software Excel também são apresentadas.

2 Equações de diferenças

2.1 Conceito inicial de equações de diferenças

As equações de diferenças ou equações de recorrência são aquelas com variações discretas. Para uma melhor compreensão desse conceito, vamos analisar a seguinte situação-problema (que foi extraída de uma vídeo-aula do professor Luciano Monteiro de Castro - programa PAPMEM do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, consulte [5]): considerando uma superfície retangular de dimensões $2 \times n$ (n inteiro positivo maior ou igual a 1) em que 2 é a altura e n a base (veja Figura 1). De quantas maneiras podemos colocar de forma justaposta (ou seja, sem que haja sobreposição) n "lâminas" retangulares indistinguíveis de dimensões 2×1 para obtermos uma cobertura exata desta superfície?

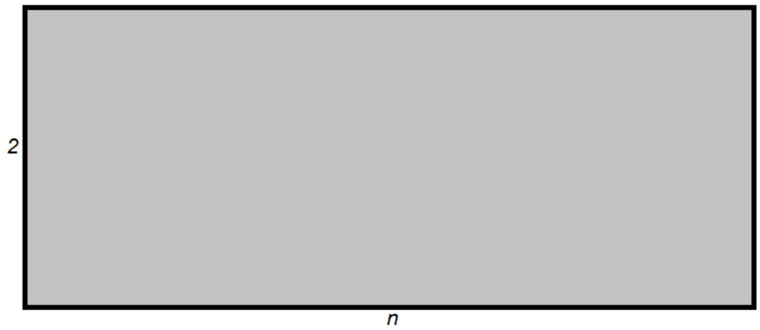
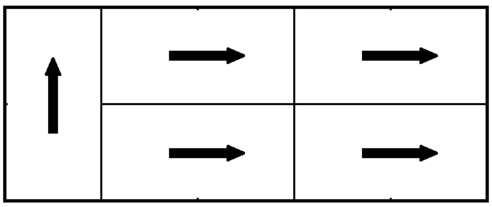


Figura 1: Superfície retangular de dimensões $2 \times n$.
Fonte: os autores.

Solução. No caso $n = 1$, a fronteira da superfície obtida é o retângulo de dimensões 2×1. É fácil notar a existência de apenas uma maneira para colocar essa única lâmina de modo a obtermos a cobertura solicitada. Por outro lado, para $n \geq 2$, o número de maneiras de se colocar as n lâminas para obtermos a cobertura solicitada não é único. Inicialmente notemos que $n \geq 2$ possibilita a colocação da primeira lâmina tanto na direção da fronteira de dimensão n (que iremos expressar como direção horizontal), quanto na direção da fronteira de dimensão 2 (que indicaremos como direção vertical) e, para uma melhor visualização desse fato, considere, por exemplo, $n = 5$ e vejamos algumas formas de obter a cobertura da superfície cuja fronteira será um retângulo de dimensões 2×5:

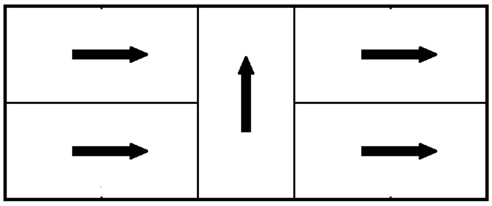
1) a primeira lâmina colocada na direção vertical, em seguida duas lâminas justapostas na direção horizontal e finalizando com as duas últimas lâminas também justapostas na direção horizontal;



Possibilidade 1: Cobertura da superfície retangular de dimensões 2×5.
Fonte: os autores.

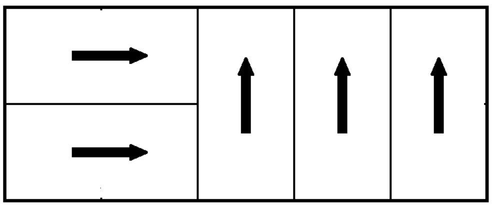
2) as duas primeiras lâminas colocadas justapostas na direção horizontal, em se-

guida uma lâmina na direção vertical e finalizando com as duas últimas lâminas justapostas na direção horizontal;



Possibilidade 2: Cobertura da superfície retangular de dimensões 2×5.
Fonte: os autores.

3) as duas primeiras lâminas colocadas justapostas na direção horizontal e, em seguida, três lâminas na direção vertical;



Possibilidade 3: Cobertura da superfície retangular de dimensões 2×5.
Fonte: os autores.

Outras maneiras podem ser obtidas, com raciocínios semelhantes. Antes de buscarmos a solução do problema proposto, é interessante observar a existência de duas quantidades que assumem valores variáveis nessa situação, mas apenas valores inteiros positivos:

(i) a dimensão variável da superfície retangular (variável independente), será denotada por n;

(ii) o número de maneiras que podemos colocar as n lâminas retangulares (variável dependente) será denotada por M_n.

Assim, é razoável notar que M_n é função de n. Também, como n pode assumir apenas valores na sequência $(x_n) = (1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots)$, conclui-se que as variações entre quaisquer termos de (x_n) são discretas e, consequentemente, também são discretas as variações entre os termos da imagem dos termos de (x_n). Objetivando determinar a solução do problema proposto, iniciemos a resolução do mesmo atribuindo a n valores que nos possibilitem uma manipulação direta, de modo que possamos determinar o valor de M_n. Em seguida, tentaremos visualizar se existe alguma relação entre esses resultados obtidos e, para não ignorar nenhuma maneira de cobrir a superfície e nem contabilizar alguma(s) dessas maneiras mais de uma vez, vamos adotar a seguinte notação:

$N1)$ $\uparrow$ para indicar uma lâmina colocada na posição vertical;

$N2)$ $\rightrightarrows$ para indicar duas lâminas colocadas justapostas na posição horizontal.

Com a notação estabelecida, temos:

(i) para $n = 1$, tem-se que $M_1 = 1$ e a única possibilidade é $\uparrow$;

(ii) para $n = 2$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×2. Nesse caso, temos as seguintes possibilidades: $\uparrow\uparrow$ ou $\rightrightarrows$. Logo $M_2 = 2$;

(iii) para $n = 3$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×3 e as maneiras possíveis de cobrirmos a superfície são: $\uparrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\rightrightarrows$ ou $\rightrightarrows\uparrow$. De modo que $M_3 = 3$.

(iv) para $n = 4$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×4 e, desta forma, as maneiras possíveis são:

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow,\ \uparrow\uparrow\rightrightarrows,\ \uparrow\rightrightarrows\uparrow,\ \rightrightarrows\uparrow\uparrow, \rightrightarrows\rightrightarrows\ .$$

Daí $M_4 = 5$;

(v) para $n = 5$, a fronteira da superfície é o retângulo de dimensões 2×5 e as possíveis maneiras de obtermos a cobertura da superfície são:

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow, \uparrow\uparrow\uparrow\rightrightarrows, \uparrow\uparrow\rightrightarrows\uparrow, \uparrow\rightrightarrows\uparrow\uparrow, \uparrow\rightrightarrows\rightrightarrows$$

$$\rightrightarrows\uparrow\uparrow\uparrow, \rightrightarrows\uparrow\rightrightarrows, \rightrightarrows\rightrightarrows\uparrow\ .$$

Portanto $M_5 = 8$.

Ao analisarmos a Tabela 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
M_n	1	2	3	5	8	?	?	?	?	?	?	...

Tabela 1: Dados resultantes das observações anteriores.
Fonte: os autores.

intuímos que o número de maneiras possíveis para colocar n lâminas, de modo que seja obtida a cobertura da superfície retangular de dimensões $2 \times n$, é dado pela soma do número de maneiras possíveis nos dois casos que o precedem. Dito de outra forma: para determinarmos M_n, os casos analisados nos sugerem que devemos recorrer aos valores $M_{n-1}, \quad M_{n-2}$ e adicioná-los. Isto é,

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}, \quad M_1 = 1, M_2 = 2, \quad n \geq 3. \tag{1}$$

Notemos que o valor da variável dependente M_n ($n \geq 3$) é determinado através de uma fórmula de recorrência e, deste modo, a Equação (1) evidencia o conceito de equações de diferenças. Mostremos agora que realmente a Equação (1) é a solução do problema inicial.

Inicialmente observe a necessidade de se ter $n \geq 3$ para que a Equação (1) tenha sentido e então considere a superfície retangular de dimensões $2 \times n$, particionada em n regiões retangulares de área igual a 2. Veja a Figura 2 em que cada região R_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tem altura 2 e base 1.

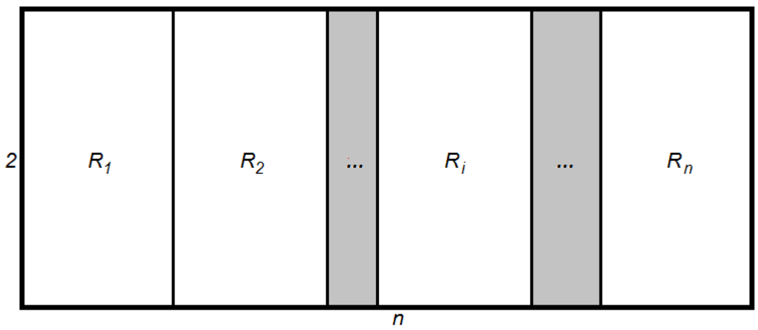


Figura 2: Possibilidade de particionamento da superfície retangular de dimensões $2 \times n$.
Fonte: os autores.

Assim, temos que:

(i) se a região R_1 for coberta por uma lâmina colocada na direção vertical, então haverá M_{n-1} maneiras para se colocar as $n-1$ lâminas de modo que seja coberta a superfície restante de dimensões $2 \times (n-1)$;

(ii) se as regiões R_1 e R_2 forem cobertas por duas lâminas justapostas na direção horizontal, então haverá M_{n-2} maneiras para se colocar as $n-2$ lâminas de modo que seja obtida a cobertura da superfície restante de dimensões $2 \times (n-2)$.

Portanto, $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$, em que $n \geq 3$, $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$.

Note que se definirmos $M_0 = 1$, podemos obter a sequência (M_n) através da fórmula de recorrência: $M_0 = M_1 = 1$ e $M_{n+1} = M_n + M_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. A sequência descrita dessa forma é chamada de sequência de Fibonacci em homenagem a Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci. Esse Matemático nasceu na cidade italiana de Pisa em 1175 e morreu no ano de 1250. Em sua obra mais famosa, intitulada *Liber Abaci*, publicada em 1202, são apresentados vários problemas. Dentre tais problemas, aquele que despertou grande atenção foi o seguinte:

A partir de um casal de coelhos, quantos casais serão gerados em um ano considerando-se que cada casal gera um novo casal que se torna produtivo a partir do segundo mês?

A solução do problema originalmente proposto por Fibonacci é dado pela sequência de recorrência (M_n) obtida acima e esta é um exemplo de uma equação de diferença.

2.2 Formalização do conceito de equações de diferenças

Sejam $y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R}$. Uma equação de diferenças de ordem m é uma equação da forma

$$y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n), \quad n \geq m \tag{2}$$

em que $\{\beta_n\}$ é uma sequência de números reais e f é uma função de y_k e $\beta_n, \quad k \in \{n-1, n-2, \cdots, n-m\}$.

Neste trabalho denota-se uma equação de diferenças de ordem m por

$$\begin{cases} y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n), & n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} & dados. \end{cases} \tag{3}$$

Definição 2.1. *Uma sequência numérica $\{x_n\}$ é solução da Equação (3) se*

$$x_0 = y_0, \quad x_1 = y_1, \quad \cdots, \quad x_{m-1} = y_{m-1}$$

e

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-m}, \beta_n), \quad para \quad todo \quad n \geq m.$$

Analisando a forma que serão denotadas as equações de diferenças neste trabalho, a forma da Equação (3), a seguir apresenta-se alguns exemplos destas estruturas Matemáticas.

$$(1)\ \begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}, & n \geq 1, \\ y_0 \in \mathbb{R} & dado; \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, \beta_n) = \alpha y_{n-1}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$.

$$(2)\ \begin{cases} y_n = ay_{n-1} + b, & n \geq 1, \\ y_0 \in \mathbb{R} & dado; \end{cases}$$

sendo $f(y_{n-1}, \beta_n) = ay_{n-1} + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = b$;

$$(3)\ \begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, & n \geq 2, \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} & dado; \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = ay_{n-1} + by_{n-2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$;

$$(4)\ \begin{cases} y_n = y_{n-1} - 3y_{n-2} + 2n^2 - 7n, & n \geq 2, \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} & dados; \end{cases}$$

em que $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = y_{n-1} - 3y_{n-2} + 2n^2 - 7n$ e $\beta_n = 2n^2 - 7n$;

$$(5)\ \begin{cases} y_n = ny_{n-1} - n^2 y_{n-2}, & n \geq 2, \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} & dados; \end{cases}$$

com $f(y_{n-1}, y_{n-2}, \beta_n) = ny_{n-1} - n^2 y_{n-2}$ e $\beta_n = 0$;

$$(6)\ \begin{cases} y_n = \alpha(y_{n-1})^2, & n \geq 1, \\ y_0 \in \mathbb{R} & dado; \end{cases}$$

neste exemplo $f(y_{n-1}, \beta_n) = \alpha(y_{n-1})^2$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta_n = 0$.

2.3 Classificação das equações de diferenças

2.3.1 Equações de diferenças lineares

As equações de diferenças lineares de ordem m são equações da forma (3) quando

$$f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n) = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i} y_{n-i} \right) + \beta_n,$$

em que $\alpha_{n-i}y_{n-i}, \beta_n \in \mathbb{R}$. Isto é:

$$\begin{cases} y_n = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i} y_{n-i} \right) + \beta_n, \quad \alpha_{n-i}, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \quad dados. \end{cases} \tag{4}$$

A equação é dita não linear, caso contrário.

As equações dos exemplos de (1) a (5) são equações de diferenças lineares e o exemplo (6) é de uma equação não linear.

2.3.2 Equações de diferenças lineares e homogêneas

As equações de diferenças lineares de ordem m, ou seja, aquelas que tem a forma da Equação (4), são classificadas como homogêneas se $\beta_n = 0$. Em outras palavras, a forma geral dessas equações é

$$\begin{cases} y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n-i} y_{n-i}, \quad \alpha_{n-i} \in \mathbb{R}, \quad n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \quad dados. \end{cases} \tag{5}$$

Os exemplos (1), (3) e (5) correspondem a equações de diferenças lineares e homogêneas.

2.3.3 Equações de diferenças lineares com coeficientes constantes

No desenvolvimento desse trabalho considera-se que a forma geral das equações de diferenças lineares de ordem m com coeficientes constantes é dada pela Equação (4) com $\alpha_{n-i}, \quad i = 1, \cdots m$, constantes reais. Ou seja, a forma geral de tais equações é

$$\begin{cases} y_n = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} \right) + \beta_n, \quad \alpha_i, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \quad dados. \end{cases} \tag{6}$$

Deste modo, exemplos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes são dados pelas equações de (1) a (4).

2.3.4 Equações de diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes

As equações de diferenças de ordem m lineares e homogêneas com coeficientes constantes possuem a forma da Equação (6) com $\beta_n = 0$. Isto significa que são as equações cuja forma geral é

$$\begin{cases} y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \quad dados. \end{cases} \tag{7}$$

Apenas os exemplos (1) e (3) se referem a equações de diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes.

2.4 Equações de primeira ordem, lineares e homogêneas com coeficientes constantes

As equações de diferenças lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes têm a forma

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1; \\ y_0 \in \mathbb{R} \quad dado. \end{cases} \tag{8}$$

A solução desta equação é facilmente obtida:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0, \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0, \\ y_3 &= \alpha y_2 = \alpha^3 y_0, \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_n &= \alpha^n y_0. \end{aligned}$$

De modo que, $y_n = y_0 \alpha^n$ é a solução da Equação (8).

2.5 Equações de segunda ordem, lineares e homogêneas com coeficientes constantes

Equações de diferenças lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes têm a forma da Equação (7) com $m = 2$, ou seja, são equações da forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{n-i} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i y_{n-i} = \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Denotando $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b$, conclui-se que a forma geral das equações de diferenças lineares, homogêneas de segunda ordem e com coeficientes constantes é

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \quad dados. \end{cases} \tag{10}$$

Na Equação (10), as escolhas $a = b = y_0 = y_1 = 1$ e $y_n = M_n$, a transformam em

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}, \quad M_0 = M_1 = 1, \quad n \geq 2.$$

Desde que $M_1 = 1$ e $M_2 = 2$, observamos que a equação linear e homogênea com coeficientes constantes acima é a Equação (1)

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2}, \quad M_1 = 1, M_2 = 2, \quad n \geq 3,$$

que foi desenvolvida em detalhes na seção 2.1.

Proceder como fizemos para obter a solução da equação (8) não nos conduz a solução de (10). Neste sentido, utilizaremos conceitos de Álgebra Linear e nosso primeiro passo é garantir a unicidade da solução, caso esta exista.

Os conceitos de Álgebra Linear utilizados podem ser vistos, por exemplo, em [2].

Proposição 2.1 (Unicidade da solução)**.** *Uma equação de diferenças linear, homogênea de segunda ordem e com coeficientes constantes, tem solução única. Ou seja, é única a solução da equação*

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2; \\ y_0, y_1 \in \mathbb{R} \quad dados, \end{cases} \tag{11}$$

caso ela exista.

Prova. Sejam (x_n) e (z_n) soluções da Equação (11). Logo $x_0 = z_0 = y_0$, $x_1 = z_1 = y_1$ e x_n, z_n verificam a equação de recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$, para todo $n \geq 2$.

Considere a proposição

$$p(n) : x_n = z_n, \quad para \quad todo \quad n \geq 2.$$

Demonstraremos a veracidade de $p(n)$ pelo Método de Indução Finita:

(i) se $n = 2$, então $x_2 = ax_1 + bx_0 = az_1 + bz_0 = z_2$. Ou seja, $p(2)$ é verdadeira,

(ii) suponha $p(n)$ verdadeira para todo $3 \leq n \leq k$. Em particular

$$x_{k-1} = z_{k-1} \quad e \quad x_k = z_k.$$

Assim

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} = az_k + bz_{k-1} = z_{k+1}.$$

Segue-se do Princípio de Indução Finita que $x_n = z_n$ para todo n, ou seja, $(x_n) = (z_n)$ e concluímos a unicidade.

□

Iremos a partir de agora desenvolver um estudo em busca da solução para as equações lineares, homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes. Considere o conjunto de todas as sequências de números reais, isto é, considere o conjunto

$$\mathbb{R}^\infty = \{(y_n) = (y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) : y_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 2.2. *As operações usuais de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^\infty$ são respectivamente definidas por:*

$$(i) \quad (x_n) + (z_n) \; := \; (x_n + z_n) \; = \; (x_0 + z_0, x_1 + z_1, \cdots, x_n + z_n, \cdots)$$
$$= \; (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) + (z_0, z_1, \cdots, z_n, \cdots), \tag{12}$$

para quaisquer $(x_n), (z_n) \in \mathbb{R}^\infty$;

(ii)

$$k(x_n) := (kx_n) = (kx_0, kx_1, \cdots, kx_n, \cdots) = k(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) \tag{13}$$

quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$.

Note que o conjunto $\mathbb{R}^\infty$, considerando as operações de adição e multiplicação por escalar acima definidas, é um espaço vetorial. Abordaremos, entretanto, um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ conveniente.

Definição 2.3. *Dados $a, b, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto*

$$S = \{(y_n) = (y_0, y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty : y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \quad n \geq 2\}.$$

Note que o conjunto S acima definido é o conjunto solução da Equação (10).

Lema 2.1. *S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ de dimensão 2.*

Prova. Inicialmente provaremos que S é um subespaço vetorial S.

A princípio, nota-se que o vetor nulo de $\mathbb{R}^\infty$ pertence ao conjunto S, pois a sequência $(y_n) = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ é gerada pela recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$ com $y_0 = y_1 = 0$.

(i) Se $(x_n), (z_n) \in S$, então $(t_n) = (x_n) + (z_n) \in S$, pois

$$t_n = x_n + z_n = [ax_{n-1} + bx_{n-2}] + [az_{n-1} + bz_{n-2}]$$

e portanto

$$t_n = a[x_{n-1} + z_{n-1}] + b[x_{n-2} + z_{n-2}] = at_{n-1} + bt_{n-2}.$$

(ii) Se $(x_n) \in S$ e $k \in \mathbb{R}$, então $k(x_n) \in S$, pois

$$a[kx_{n-1}] + b[kx_{n-2}] = k[ax_{n-1} + bx_{n-2}] = kx_n.$$

Logo S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

Agora, provaremos que $dim\ S$ = 2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to S$ a transformação definida por

$$T(y_0, y_1) = (y_n), \quad em \quad que \quad y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2.$$

Observa-se que T é linear, pois, considerando-se $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ com $T(x_0, x_1) = (x_n)$ e $(z_0, z_1) \in \mathbb{R}^2$ com $T(z_0, z_1) = (z_n)$, tem-se que

$$T((x_0, x_1) + k(z_0, z_1)) = T(x_0 + kz_0, x_1 + kz_1) = (x_n + kz_n)$$

e sendo assim,

$$T((x_0, x_1) + k(z_0, z_1)) = (x_n) + k(z_n) = T(x_0, x_1) + kT(z_0, z_1).$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem temos

$$dim\,\text{Nuc}\ T + dim\,\text{Im}\ T = dim\,\text{V}\ .$$

Desta forma, sendo $V = \mathbb{R}^2$, tem-se que

$$dim \text{ Nuc } T + dim \text{ Im } T = 2. \tag{14}$$

Também, nota-se que Nuc $T = \{(0,0)\}$, pois

$$T(y_0, y_1) = (0,0,0,0,\cdots,0,\cdots)$$

implica em

$$y_0 = y_1 = 0,$$

de modo que

$$\text{Nuc } T = \{(0,0)\}.$$

Logo, como Nuc $T = \{(0,0)\}$, conclui-se que dim Nuc $T = 0$ e a Equação (14) fornece

$$dim \text{ Im } T = 2. \tag{15}$$

Além disso, T é sobrejetiva (o equivalente a dizer que Im $T = S$), pois para toda sequência $(x_n) \in S$ existe $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_0, x_1) = (x_n)$. Portanto, visto que Im $T = S$, da Equação (15) conclui-se que

$$dim \ S = 2.$$

□

Pelo Lema 2.1, conclui-se que uma base do conjunto S é formada por 2 vetores, de modo que a solução da Equação (10) é alcançada ao determinarmos uma base para o conjunto S. Também em consequência de S ser subespaço temos a proposição a seguir.

Proposição 2.2 (Princípio da superposição)**.** *Se (x_n) e (z_n) são soluções da equação de diferenças $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2$, então*

$$(t_n) = k_1(x_n) + k_2(z_n) \tag{16}$$

também é solução, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Prova. Tem-se, para todo $n \geq 2$, que

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = a[k_1x_{n-1} + k_2z_{n-1}] + b[k_1x_{n-2} + k_2z_{n-2}].$$

Logo

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = k_1[ax_{n-1} + bx_{n-2}] + k_2[az_{n-1} + bz_{n-2}],$$

e portanto,

$$at_{n-1} + bt_{n-2} = k_1 x_n + k_2 z_n = t_n.$$

□

De agora em diante, inspirados pelo fato de que a solução das equações de diferenças lineares, homogêneas e com coeficientes constantes de primeira ordem é da forma exponencial, procuraremos por soluções também na forma exponencial, ou seja, soluções do tipo $y_n = \lambda^n$. Neste caso teríamos

$$y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$$

e daí

$$\lambda^n = a(\lambda^{n-1}) + b(\lambda^{n-2}).$$

A equação anterior equivale a

$$\lambda^{n-2}[\lambda^2 - a\lambda - b] = 0$$

e portanto,

$$\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - a\lambda - b = 0.$$

Logo,

(i) se $\lambda = 0$ temos que $y_n = 0$ para todo n. Ou seja, a solução é a trivial (que terá sentido apenas se $y_0 = y_1 = 0$);

(ii) se $\lambda \neq 0$, então $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = 0$. O polinômio $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ é denominado **polinômio característico** associado à equação de diferenças em estudo. As raízes do polinômio $p(\lambda)$ são denominadas autovalores e expressas por

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}. \tag{17}$$

De modo que, dados os valores dos coeficientes a e b da Equação (10) os valores λ_1 e λ_2 são unicamente determinados. Uma vez que tentamos solução da forma $y_n = \lambda^n$, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$y_n^1 = \lambda_1^n \quad \text{e} \quad y_n^2 = \lambda_2^n \tag{18}$$

verificam a recorrência $y_n = ay_{n-1} + by_{n-2}$.

Apresentaremos a seguir três proposições que estabelecem resultados fundamentais para escrevermos a solução procurada. Tais proposições referem-se ao polinômio $p(\lambda)$, ou melhor, são resultados que relacionam o valor de seu discriminante $\Delta = a^2 + 4b$ às suas raízes, λ_1 e λ_2.

Proposição 2.3. *Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, então $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, as raízes do polinômio característico são valores reais e distintos. Também afirmamos ser o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ um conjunto linearmente independente. De fato, considere a equação

$$c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = 0, \text{ para todo } n.$$

Em particular, para $n = 0$ e $n = 1$, temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0. \end{cases}$$

Como $det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, pois $\lambda_1 \neq \lambda_2$, conclui-se que a única solução do sistema é a solução trivial, $c_1 = c_2 = 0$. De modo que o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ é um conjunto linearmente independente e, desta forma, uma base para S.

□

Proposição 2.4. *Se $\Delta = a^2 + 4b = 0$, então $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. Se $a^2 + 4b = 0$, então o polinômio característico tem uma raiz real de multiplicidade dois, dada por $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$. Note que $a \neq 0$ (pois, $a = 0$ resulta em $\lambda = 0$, o que implica na solução trivial). Também, visto que uma solução é dada por λ_1^n, objetivamos determinar uma outra solução de modo que o conjunto formado pelas mesmas seja um conjunto linearmente independente, já que desta forma teremos uma base para S.

Afirma-se que $n\lambda_1^n \in S$.

De fato, $n\lambda_1^n \in S$, se e somente se

$$n\lambda_1^n = a(n-1)\lambda_1^{n-1} + b(n-2)\lambda_1^{n-2},$$

que equivale a

$$n(\lambda_1^2 - a\lambda_1 - b) = -a\lambda_1 - 2b, \quad para \quad todo \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí
$$\begin{cases} \lambda_1^2 - a\lambda_1 - b = 0, & (A) \\ \quad -a\lambda_1 - 2b = 0. & (B) \end{cases}$$

Como $\Delta = a^2 + 4b = 0$, tem-se de (A) que $\lambda_1 = \dfrac{a}{2}$. Para concluir a prova basta verificar que esse λ_1 satisfaz (B):

$$-a\lambda_1 - 2b = 0 \Leftrightarrow -a\left(\frac{a}{2}\right) - 2b = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} - 2b = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2+4b}{2} = 0$$

e essa última igualdade é verdadeira por hipótese. Concluímos, assim, que $n\lambda_1^n \in S$.

Também afirma-se que o conjunto $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$ é um conjunto linearmente independente.

De fato, considere o sistema

$$c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n = 0, \quad para \quad todo \quad n.$$

Como a identidade acima deve ser verificada para todo n, se $n = 0$, então $c_1 = 0$, pois $\lambda_1 \neq 0$. Logo,
$$c_2 n\lambda_1^n = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

De modo que $c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n = 0, \quad para \quad todo \quad n$, implica em $c_1 = c_2 = 0$. Daí o conjunto $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$ é uma base para S, pois, é um conjunto linearmente independente.

□

Proposição 2.5. *Se $\Delta = a^2 + 4b < 0$, então as raízes de $p(\lambda)$ são números complexos conjugados de módulo $r \neq 0$ e de argumento θ e $-\theta$ e, $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{r^n cos(n\theta), r^n sen(n\theta)\} \subset S$ é um conjunto linearmente independente e, portanto, uma base para S.*

Prova. se $a^2 + 4b < 0$, as raízes do polinômio característico são valores complexos conjugados; digamos $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$. Usando a **forma trigonométrica** e a **fórmula de Euler**, escrevemos

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i = r(\cos\theta + i\text{sen}\,\theta) = re^{i\theta}$$

e
$$\lambda_2 = \alpha - \beta i = r(\cos\theta - i\text{sen}\,\theta) = re^{-i\theta},$$

em que $r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ e θ é tal que $\cos\theta = \dfrac{\alpha}{r}, \quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{\beta}{r}$.

Pela **fórmula de De Moivre**, sabe-se que o produto entre os complexos $z_1 =$

$r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2), \quad \cdots\ z_k = r_k(\cos\theta_k + i \text{ sen } \theta_k)$ é dado por

$$z_1 z_2 ... z_k = r_1 r_2 ... r_k(\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k)).$$

Dessa forma

$$(\lambda_1)^n = (r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \text{ sen}(n\theta))$$

e

$$(\lambda_2)^n = (r(\cos\theta - i \text{ sen } \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) - i \text{ sen}(n\theta))$$

são soluções da Equação (10), conforme visto na Equação (18). Assim, pelo princípio da superposição (Proposição 2.2), conclui-se que

$$\gamma_1 = \frac{(\lambda_1)^n + (\lambda_2)^n}{2} = r^n \cos(n\theta) \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{(\lambda_1)^n - (\lambda_2)^n}{2i} = r^n \text{sen}(n\theta)$$

também serão soluções da Equação (10).

Afirmamos ainda ser o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ = $\{r^n\cos(n\theta), r^n\text{sen}(n\theta)\}$ linearmente independente. De fato, considere o sistema

$$c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \text{sen}(n\theta) = 0, \quad para \quad todo \quad n. \tag{19}$$

Uma manipulação na Equação (19) fornece

$$[c_1 r^n \cos(n\theta) + c_2 r^n \text{sen}(n\theta)] \frac{\cos(n\theta)}{r^n} = 0$$

que equivale a

$$c_1 \cos^2(n\theta) + c_2 \text{sen}(n\theta) \cos\,(n\theta) = 0$$

e portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} [c_1 \cos^2(n\theta) + c_2 \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)]\, d\theta = 0, \quad para \quad todo \quad n.$$

De modo que

$$c_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta + c_2 \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)\, d\theta = 0, \quad para \quad todo \quad n. \tag{20}$$

Como $f_1(\theta) = \cos^2(n\theta)$ é uma função par e $f_2(\theta) = \text{sen}(n\theta)\cos(n\theta)$ é uma função ímpar, da Equação (20) escrevemos

$$2c_1 \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta = 0. \tag{21}$$

Assim, como $\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta > 0$, pois $f_1(\theta) = \cos^2(n\theta)$ é uma função não negativa e não identicamente nula, a Equação (21) fornece $c_1 = 0$ e substituindo $c_1 = 0$ na Equação (19), tem-se

$$c_2 r^n \text{sen}(n\theta) = 0, \quad para \quad todo \quad n$$

implicando em $c_2 = 0$. Deste modo, $c_1 = c_2 = 0$, e o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{r^n\cos(n\theta), r^n\text{sen}(n\theta)\}$ é linearmente independente e, portanto, uma base para S.

□

Neste momento, determinada uma base para o conjunto S, retornemos à determinação da solução geral para a Equação (10). Vimos que, para $\lambda = 0$, tem-se a solução trivial (desde que $y_0 = y_1 = 0$) e se $\lambda \neq 0$, então $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b = 0$, de modo que para determinar a solução procurada devemos analisar o discriminante, $\Delta = a^2 + 4b$, do polinômio característico $p(\lambda)$. Temos as possibilidades

(i) se $\Delta > 0$, pela Proposição 2.3 o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ forma uma base para o conjunto solução da Equação (10) e, portanto, a solução geral é dada por

$$y_n = k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Exemplo 2.1. *Vamos determinar a solução geral da equação*

$$y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{23}$$

Temos que o polinômio característico da Equação (23) é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$. Portanto, a solução geral da Equação (23) é dada por

$$y_n = k_1(1 - \sqrt{2})^n + k_2(1 + \sqrt{2})^n, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

(ii) se $\Delta = 0$, pela Proposição 2.4 o conjunto $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\} = \left\{\left(\frac{a}{2}\right)^n, n\left(\frac{a}{2}\right)^n\right\}$ forma uma base para o conjunto solução da Equação (10) e nesse caso a solução geral

será
$$y_n = k_1\left(\frac{a}{2}\right)^n + k_2 n\left(\frac{a}{2}\right)^n, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}; \tag{25}$$

(iii) se $\Delta < 0$, pela Proposição 2.5 o conjunto $\{r^n cos(n\theta), r^n sen(n\theta)\}$ forma uma base para o conjunto das soluções reais da Equação (10) e assim a solução geral real é
$$y_n = r^n(k_1\text{cos}(n\theta) + k_2\text{sen}(n\theta)), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \tag{26}$$
em que r é o módulo e θ é o argumento de uma das raízes complexas do polinômio $p(\lambda)$.

Em todos os casos anteriores, a determinação de k_1 e k_2 é feita a partir de y_0 e y_1 (conhecidos no problema).

- No caso (i), observando que
$$n = 0 \Rightarrow y_0 = k_1 + k_2 \quad e \quad n = 1 \Rightarrow y_1 = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2,$$
tem-se o seguinte sistema:
$$\begin{cases} k_1 + k_2 = y_0, \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = y_1. \end{cases}$$
Resolvendo o sistema anterior, temos
$$k_1 = \frac{det\begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \frac{y_0\lambda_2 - y_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad k_2 = \frac{det\begin{pmatrix} 1 & y_0 \\ \lambda_1 & y_1 \end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \frac{y_1 - y_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

- No caso (ii), obtemos o sistema:
$$\begin{cases} k_1 = y_0, \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_1 = y_1, \end{cases}$$
cuja solução é
$$k_1 = y_0, \qquad k_2 = \frac{y_1 - y_0\lambda_1}{\lambda_1}.$$

- No caso (iii), tem-se
$$n = 0 \Rightarrow y_0 = k_1 \quad e \quad n = 1 \Rightarrow y_1 = r(k_1\text{cos}(\theta) + k_2\text{sen}(\theta)).$$

O que fornece o seguinte sistema:

$$\begin{cases} k_1 = y_0, \\ k_1 \cos\theta + k_2 \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y_1}{r}. \end{cases}$$

De modo que a solução é

$$k_1 = y_0, \qquad k_2 = \frac{y_1 - r y_0 \cos\theta}{r \operatorname{sen}\theta}.$$

Observação 2.1. *Note que $r \neq 0$, pois caso contrário, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Também, se sen $\theta = 0$, teríamos soluções reais e, portanto, deve ocorrer sen $\theta \neq 0$.*

3 Crescimento populacional de plantas anuais.

Na presente seção desenvolvemos uma modelagem que pode ser vista em [4]. Nossa contribuição aqui é apresentar o modelo em uma sequência didática, utilizando equações de diferenças e a teoria desenvolvida na Seção 2.

J. Bicho, N. Torres e S. Cruz, veja [3], definem plantas anuais como sendo aquelas que completam seu ciclo de vida (composto por: germinação, floração, produção de sementes e morte) em um ano. Entre essas plantas, existem aquelas que toleram as geadas (denominadas **plantas anuais rústicas**) e aquelas que são danificadas ou mortas pela geada e pelas baixas temperaturas (denominadas **plantas anuais semi-rústicas**).

A principal característica das plantas anuais consiste na pouca, ou mesmo nenhuma, exigência quanto aos nutrientes do solo o que possibilita o cultivo dessas plantas juntamente com outras espécies, pois elas não interferem no bom desenvolvimento das outras plantas.

As plantas anuais produzem, geralmente, suas sementes no verão e o ciclo de vida dessas plantas se inicia na primavera com a germinação das sementes. Em seguida, a nova planta inicia um período de crescimento vegetativo, entrando na sua fase reprodutiva, quando atingem um determinado desenvolvimento e morrem no auge do seu estágio reprodutivo, deixando as suas sementes no solo. Uma fração dessas sementes (caso sobrevivam ao inverno e a fatores diversos, tais como: clima, ações de predadores, etc) darão origem a novas plantas.

Alguns exemplos de plantas anuais:

(i) na agricultura - Milho, Feijoeiro, Faveira e Tomateiro;

(ii) na ornamentação - Malmequer, Amor-perfeito e Manjerico;

(iii) plantas daninhas - Ervilhaca e Saramago.

3.1 Propagação de plantas anuais

A seguir apresenta-se um modelo para o problema de propagação das plantas anuais. Inicialmente destacamos que:

(i) para tais plantas sobreviverem como uma espécie, uma população suficientemente grande deve ser renovada a cada ano;

(ii) exige-se um sistemático acompanhamento dessas plantas e também das reservas de sementes (de várias idades) em cada instante temporal.

Observação 3.1. *Consideraremos que a idade das sementes é determinada pelo número de invernos que elas sobrevivem. Ou seja, sementes que sobrevivem ao primeiro inverno já serão consideradas sementes de um ano. Analogamente, sementes de dois anos são aquelas que sobrevivem a dois invernos e assim sucessivamente.*

Observação 3.2. *Se quisermos complicar um pouco a modelagem do problema basta considerarmos o fato de que as plantas anuais produzem sementes que podem ficar adormecidas por vários anos antes da potencial germinação. Entretanto iremos considerar que sementes com mais de dois anos não podem germinar e serão desprezadas na modelagem apresentada. Uma hipótese mais geral que essa deixaria a modelagem mais completa, mas tornaria a modelagem mais onerosa e fugiria dos objetivos deste trabalho.*

Etapa 1 - Declaração do Problema. Visto que as estações do ano no hemisfério sul obedecem à seguinte distribuição:

- Outono - De 22 de março a 20 de junho,
- Inverno - De 21 de junho a 23 de setembro,
- Primavera - De 23 de setembro a 21 de dezembro,
- Verão - De 21 de dezembro a 21 de março,

suponha que:

1) a produção de sementes ocorre no fim do verão, digamos entre os meses de fevereiro e março. É nesse período registrado o final da temporada de crescimento das plantas que, como já mencionado, deixam suas sementes no solo antes de

morrer;

2) a germinação das sementes que sobreviveram ao último inverno ocorre na primavera, digamos entre os meses de outubro e novembro. É essa germinação que originará uma nova geração de plantas;

3) a fração, ou seja a porcentagem, de sementes que germinam depende da idade das mesmas e a fração de sementes com um ano de idade que germinam é não nula.

Assim, o problema consiste na determinação da população de plantas em um dado instante de tempo.

Etapa 2 - Definições e hipóteses. A seguir faz-se a descrição dos parâmetros α, β, σ e γ especificados no problema. A saber:

- α: fração de sementes de um ano que germinam,
- β: fração de sementes de dois anos que germinam,
- σ: fração de sementes que sobrevivem a um determinado inverno,
- γ: número de sementes produzidas por planta entre os meses de fevereiro e março.

Consideraremos que os parâmetros α, β, σ e γ são constantes e observando que o banco de sementes muda constantemente ao longo do ano devido a fatores diversos (germinação, envelhecimento e mortalidade de algumas sementes, bem como a produção de algumas novas sementes) façamos a definição das variáveis do problema. Novamente devemos observar que, para simplificação do problema, vamos pressupor que sementes com mais de dois anos não são mais viáveis e podem ser desprezadas.

Para melhor compreensão de todas as quantidades envolvidas nesse problema, apresentaremos as mesmas de forma esquemática na Figura 3.1, respeitando suas hipóteses.

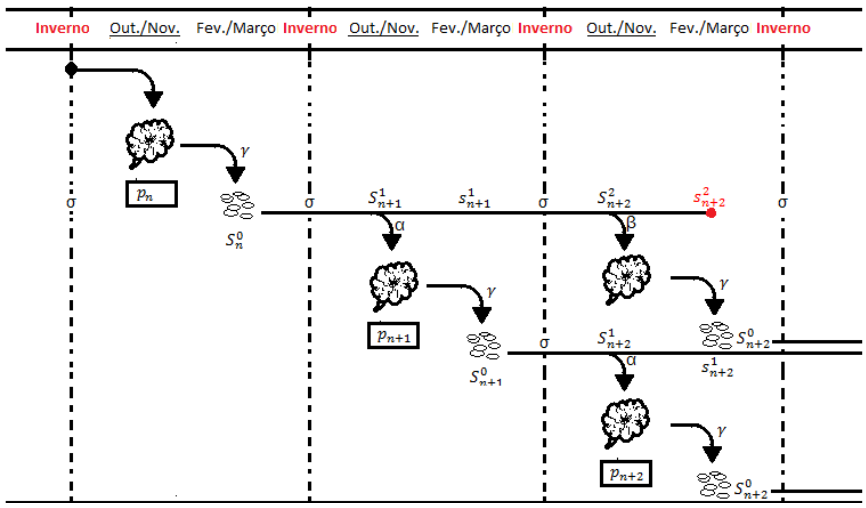


Figura 3.1: Propagação das plantas anuais.
Fonte: os autores.

Plantas anuais produzem, cada uma, γ sementes no verão (tais sementes podem permanecer no solo por até dois anos antes de germinarem). As respectivas frações α e β de sementes, de um ano e de dois anos, que germinam originarão uma nova geração de plantas.

Discussão do modelo. A seguir são definidas todas as variáveis do problema. A saber:

- p_n: número de plantas presentes no instante n;
- S_n^0: número de novas sementes produzidas no instante n entre os meses de fevereiro e março;
- S_n^1: número de sementes com idade de um ano nos meses de outubro e novembro no instante n;
- s_n^1: número de sementes com idade de um ano no instante n que restaram após algumas germinarem;
- S_n^2: número de sementes com idade de dois anos nos meses de outubro e novembro no instante n;
- s_n^2: número de sementes com idade de dois anos que restaram após algumas germinarem (note que essas sementes serão desprezadas).

Observação 3.3. *Para cada variável anteriormente definida, destaca-se que o subscrito refere-se ao instante que se faz referência e, para as variáveis relacionadas ao número de sementes, os sobrescritos indicam a idade das mesmas.*

A princípio nota-se que há um grande número de variáveis nesse problema. Contudo, pelo fato de essas variáveis se relacionarem, veremos que as mesmas serão descritas em função apenas da variável p_n.

Etapa 3 - As Equações. Nosso ponto de partida em busca de um modelo matemático para esse problema concentra-se na formulação da equação que gera a população de plantas, p_n, no instante n. Considerando-se a fração α (das sementes que germinam com um ano de idade) e a fração β (das sementes que germinam com dois anos de idade), nota-se que p_n é determinado pelo número de plantas originadas de sementes de um ano de idade, adicionado ao número de plantas originadas de sementes de dois anos de idade, de modo que

$$p_n = \alpha S_n^1 + \beta S_n^2,\ n \geq 2. \tag{27}$$

Afirmamos anteriormente que todas as variáveis podem ser descritas em função da variável p_n. Desta forma, acompanhando a ordem sequencial dos acontecimentos esquematizados na Figura 3.1, iremos visualizar como tais variáveis se relacionam com a variável p_n e os parâmetros α, β, σ e γ.

1) S_n^0- O número de novas sementes produzidas em março (no instante n) $-$ é determinado multiplicando-se o parâmetro γ pela quantidade de plantas existentes naquele instante:

$$S_n^0 = \gamma p_n. \tag{28}$$

2) S_{n+1}^1- O número de sementes com um ano de idade no instante $n+1$ $-$ é determinado multiplicando-se a fração de sementes que sobreviveram ao último inverno (a constante σ) pelo número de sementes produzidas no instante n (a variável S_n^0):

$$S_{n+1}^1 = \sigma S_n^0. \tag{29}$$

Assim, substituindo o valor de S_n^0 dado pela Equação (28), tem-se que

$$S_{n+1}^1 = \sigma\gamma p_n. \tag{30}$$

Desse modo, a variável S_n^1 da Equação (27) se escreve como

$$S_n^1 = \sigma\gamma p_{n-1}. \tag{31}$$

3) $s^1_{n+1}-$ O número de sementes de um ano de idade no instante $n+1$ que restaram após algumas germinarem $-$ é determinado multiplicando-se a fração de sementes que não germinaram (a constante $1-\alpha$) pelo número de sementes de um ano de idade no instante $n+1$ (a variável S^1_{n+1}):

$$s^1_{n+1} = (1-\alpha)S^1_{n+1}. \tag{32}$$

Note que $S^0_{n+1} = \gamma p_{n+1}$.

4) $S^2_{n+2}-$ O número de sementes de dois anos de idade no instante $n+2$ $-$ é determinado multiplicando-se a fração de sementes que sobreviveram ao último inverno (a constante σ) pelo número de sementes que restaram após algumas germinarem no instante $n+1$ (a variável s^1_{n+1}):

$$S^2_{n+2} = \sigma s^1_{n+1}. \tag{33}$$

Assim, substituindo o valor de s^1_{n+1} dado pela Equação (32), obtém-se

$$S^2_{n+2} = \sigma(1-\alpha)S^1_{n+1}. \tag{34}$$

Daí, visto que o valor de S^1_{n+1} é dado pela Equação (30), conclui-se que

$$S^2_{n+2} = \sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p_n.$$

Ou seja,

$$S^2_{n+2} = \sigma^2(1-\alpha)\gamma p_n. \tag{35}$$

De modo que a variável S^2_n da Equação (27) se escreve como

$$S^2_n = \sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2}. \tag{36}$$

Logo, substituindo os resultados das Equações (31) e (36) na Equação (27), vê-se que

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1} + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p_{n-2}. \tag{37}$$

Desta forma, chegamos a uma equação de diferenças que imaginamos modelar o problema. Note que a Equação (37) é linear, homogênea e de segunda ordem com coeficientes constantes e, deste modo, aplica-se a teoria estudada na Subseção 2.5.

Agora façamos uma leitura da Equação (37), interpretando seus termos de acordo com as definições e suposições da Etapa 2, com o objetivo de assegurar que o modelo obtido é condizente com o problema declarado na Etapa 1. Para tal, considere a Equação (37) escrita de modo que sejam evidenciados os termos que nela se apresentam. Desta forma, relacionaremos esses termos com a situação descrita no problema referente à determinação da população de plantas em um dado instante (veja Figura 3.2, figura construída utilizando-se o software Paint).

$$p_n = \underbrace{\alpha\,\underbrace{\sigma\,\underbrace{\gamma p_{n-1}}_{(6)}}_{(7)}}_{(8)} + \underbrace{\beta\,\underbrace{\sigma\,\underbrace{(1-\alpha)\,\underbrace{\sigma\,\underbrace{\gamma p_{n-2}}_{(1)}}_{(2)}}_{(3)}}_{(4)}}_{(5)}$$

Figura 3.2: Equação-modelo da propagação das plantas anuais.
Fonte: os autores.

A interpretação da Figura 3.2 é:

(1) sementes produzidas há dois anos;

(2) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno;

(3) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, mas não germinaram no primeiro ano;

(4) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, não germinaram no primeiro ano e sobreviveram ao segundo inverno;

(5) sementes produzidas há dois anos que sobreviveram ao primeiro inverno, não germinaram no primeiro ano, sobreviveram ao segundo inverno e germinaram no segundo ano;

(6) sementes produzidas há um ano;

(7) sementes produzidas há um ano que sobreviveram ao primeiro inverno;

(8) sementes produzidas há um ano que sobreviveram ao primeiro inverno e germinaram no primeiro ano.

3.2 Sobrevivência da espécie: o parâmetro γ

Visto que a equação obtida para o modelo é descrita por vários parâmetros, façamos $a = \alpha\sigma\gamma$ e $b = \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma$ obtendo a equação

$$p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2}. \tag{38}$$

Deste modo o polinômio característico associado à Equação (38) é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b. \tag{39}$$

É razoável pensar que o número de sementes produzidas por planta, bem como a fração de sementes que sobrevivem ao inverno, são maiores que zero (isto é, $\gamma > 0$ e $\sigma > 0$), pois, caso contrário, estaremos certos da extinção da espécie.

Se $\beta = 0$, então a Equação (37) deixa de ser uma equação de segunda ordem e a sobrevivência da espécie fica determinada pela constante α, com $\alpha > 0$. Desta forma, o modelo não se refere ao problema proposto, no qual considera-se a possibilidade da germinação das sementes tanto no primeiro quanto no segundo ano. Neste caso, estaríamos modelando um problema similar, no qual sementes que não germinam no primeiro ano são negligenciadas de modo que a equação que modela esse novo problema seria

$$p_n = \alpha\sigma\gamma p_{n-1}.$$

Desta forma, devemos ter $\beta > 0$.

As raízes do polinômio característico, ou seja, da Equação (39), são

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = \frac{a - \sqrt{a^2\left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)}}{2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2} = \frac{a + \sqrt{a^2\left(1 + \frac{4b}{a^2}\right)}}{2} = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right).$$

De modo que podemos escrever

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 - \sqrt{1+\delta}\right) \quad e \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\sigma\gamma}{2}\left(1 + \sqrt{1+\delta}\right), \tag{40}$$

em que

$$\delta = \frac{4b}{a^2} = \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\alpha\sigma\gamma)^2} = \frac{4\beta(1-\alpha)}{\alpha^2\gamma} = \frac{4}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right). \tag{41}$$

Também parece razoável pensar em $\alpha \neq 1$, pois $\alpha = 1$ significaria que todas as sementes de um ano de idade germinam. Deste modo, $0 < \alpha < 1$ e analisando a Equação (41), conclui-se que

$$\delta > 0.$$

Das Equações (40) e (41), nota-se que os valores λ_1 e λ_2 são determinados através do conhecimento dos parâmetros α, β, σ e γ e assim, a expressão que nos possibilita determinar esses valores, isto é, a Equação (40), se apresenta um pouco carregada de informações.

Objetivamos determinar uma condição que possibilite garantir a sobrevivência da espécie e, sendo as raízes λ_1 e λ_2 reais distintas, a solução geral da equação (38) é

$$p_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n.$$

Visto que $\lambda_2 > 0$, tem-se que

$$p_n = (\lambda_2)^n \left[c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + c_2\right]. \tag{42}$$

Também nota-se que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, quaisquer que sejam os valores dessas raízes. De fato, da Equação (40) conclui-se que λ_1 é sempre negativo, de modo que

$$|\lambda_1| = -\lambda_1 = \frac{\sqrt{a^2+4b}-a}{2} < \frac{\sqrt{a^2+4b}+a}{2} = \lambda_2 = |\lambda_2|.$$

Assim, analisando a Equação (42) vemos que $c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Deste modo, a condição que desejamos encontrar depende unicamente da raiz λ_2 e tal condição será evidenciada pela proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Se* $\gamma > \vartheta = \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$, *então* $\lambda_2 > 1$.

Prova. Considerando as proposições $p : \gamma > \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$ e $q : \lambda_2 > 1$, mostremos que $\sim q \Rightarrow \sim p$.

De fato, supondo $\lambda_2 \leq 1$ (na realidade $0 < \lambda_2 \leq 1$), tem-se

$$\lambda_2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sigma\gamma\alpha}{2}(1+\sqrt{1+\delta}) \leq 1 \Leftrightarrow (1+\sqrt{1+\delta}) \leq \frac{2}{\sigma\gamma\alpha} \Leftrightarrow \sqrt{1+\delta} \leq \frac{2}{\sigma\gamma\alpha} - 1.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da última inequação, e observando-se que

$$\delta = \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\sigma\gamma\alpha)^2},$$

conclui-se que

$$1+\delta \leq \frac{4}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2} - \frac{4}{\sigma\gamma\alpha} + 1 \Leftrightarrow \delta \leq \frac{4-4\sigma\gamma\alpha}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{4\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma}{(\sigma\gamma\alpha)^2} \leq \frac{4-4\sigma\gamma\alpha}{\sigma^2\gamma^2\alpha^2}.$$

Assim

$$\beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma \leq 1-\sigma\gamma\alpha \Leftrightarrow [\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha]\gamma \leq 1 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{1}{\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha}.$$

O que é a negação da proposição q e prova a proposição.

□

Observação 3.4. *A última equivalência acima é válida por ser* $\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha > 0$, *pois, supondo* $\beta\sigma^2(1-\alpha)+\sigma\alpha \leq 0$ *e multiplicando-se ambos os membros dessa desigualdade por* $\frac{1}{\sigma\alpha}$ *tem-se que*

$$\beta\sigma\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) \leq -1.$$

Como $\beta\sigma > 0$, *a inequação acima será satisfeita apenas se,*

$$\frac{1}{\alpha}-1 < 0,$$

de modo que $\alpha > 1$, *que é um absurdo.*

□

Portanto se $\gamma > \vartheta$ temos por (42) o crescimento da população das plantas e, caso contrário, a espécie tende a se extinguir.

A seguir apresentaremos duas simulações desse problema nas quais utilizamos o software Excel para visualizarmos a evolução da população das plantas. Em ambas as situações, consideraremos a introdução de uma população constituída de 100 plantas no ambiente e exatamente este momento será determinado como o instante inicial para se analisar a propagação da espécie, ou seja, este instante se refere à geração no tempo zero.

Nas planilhas descritas abaixo, a entrada dos dados do problema (ou seja, os valores dos parâmetros α, β, σ e γ) é feita pelo usuário de forma auto-instrutiva. Selecionamos também uma célula na qual será calculado o valor da quantidade $\vartheta = \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$ para que possamos compará-la ao parâmetro γ e assim concluir a evolução da população das plantas através da Proposição 3.1 e também "inserimos" as colunas abaixo descritas:

Geração - O instante temporal, ou seja, o ano i, $i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Plantas - Número de plantas presentes naquela geração.

Novas Sementes - Número de novas sementes naquela geração.

S1 - Número de sementes com um ano de idade naquela geração.

S1, Ger. - Número de sementes com um ano de idade que germinaram naquela geração.

S1, Rest. - Número de sementes com um ano de idade que restaram, após algumas germinarem, naquela geração.

S2 - Número de sementes com dois anos de idade naquela geração.

S2, Ger. - Número de sementes com dois anos de idade que germinaram naquela geração.

S2, Negl. - Número de sementes com dois anos de idade que restaram, após algumas germinarem, naquela geração (sementes a serem negligenciadas).

Ao fim de cada simulação mostra-se um ajuste gráfico para melhor visualização da evolução da população.

Simulação 1. Considerando os parâmetros $\alpha = 0,6; \beta = 0,3; \sigma = 0,8$ e $\gamma = 2$ obtemos os dados exibidos na planilha abaixo (veja Figura 3.3).

Geração	Plantas	Novas Sementes	S1	S1, Ger.	S1, Rest.	S2	S2, Ger.	S2, Negl.
0	100,0	200,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	96,0	192,0	160,0	96,0	64,0	0,0	0,0	0,0
2	107,5	215,0	153,6	92,2	61,4	51,2	15,4	35,8
3	118,0	235,9	172,0	103,2	68,8	49,2	14,7	34,4
4	129,8	259,5	188,7	113,2	75,5	55,1	16,5	38,5
5	142,7	285,4	207,6	124,6	83,0	60,4	18,1	42,3
6	156,9	313,8	228,3	137,0	91,3	66,4	19,9	46,5
7	172,6	345,1	251,1	150,6	100,4	73,1	21,9	51,1
8	189,8	379,5	276,1	165,7	110,4	80,3	24,1	56,2
9	208,7	417,3	303,6	182,2	121,4	88,3	26,5	61,8
10	229,5	458,9	333,9	200,3	133,5	97,2	29,1	68,0
11	252,3	504,7	367,1	220,3	146,9	106,8	32,1	74,8
12	277,5	555,0	403,7	242,2	161,5	117,5	35,2	82,2
13	305,2	610,3	444,0	266,4	177,6	129,2	38,8	90,4
14	335,6	671,1	488,2	292,9	195,3	142,1	42,6	99,5
15	369,0	738,0	536,9	322,1	214,8	156,2	46,9	109,4
16	405,8	811,6	590,4	354,3	236,2	171,8	51,5	120,3
17	446,3	892,5	649,3	389,6	259,7	188,9	56,7	132,3
18	490,7	981,5	714,0	428,4	285,6	207,8	62,3	145,4
19	539,6	1079,3	785,2	471,1	314,1	228,5	68,5	159,9
20	593,4	1186,9	863,4	518,1	345,4	251,3	75,4	175,9

$\alpha =$	0,6
$\beta =$	0,3
$\sigma =$	0,8

$\gamma =$ 2

$\vartheta = \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$ = 1,795977011

Figura 3.3: Propagação das plantas anuais - Evolução da espécie.
Fonte: os autores.

Nessa situação nota-se que haverá evolução da população de plantas. Comparando a quantidade ϑ com o parâmetro γ percebe-se que $\gamma > \vartheta$ e, portanto, pela proposição 3.1 o autovalor λ_2 da Equação (39) é tal que $\lambda_2 > 1$ implicando no crescimento da população. A seguir, na Figura 3.4, mostra-se o ajuste gráfico referente a essa simulação.

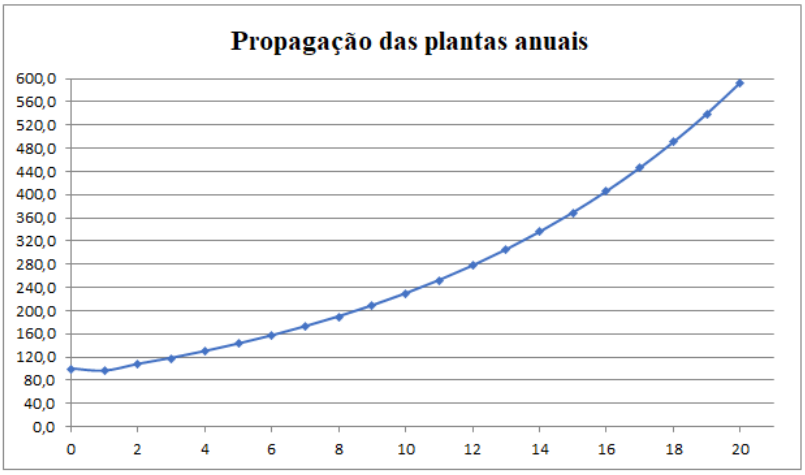


Figura 3.4: Gráfico - Evolução da espécie.
Fonte: os autores.

Simulação 2. Considerando os parâmetros $\alpha = 0,5; \beta = 0,25; \sigma = 0,8$ e $\gamma = 2$ podemos observar a propagação da espécie analisando os dados exibidos na Figura 3.5.

Geração	Plantas	Novas Sementes	S1	S1, Ger.	S1, Rest.	S2	S2, Ger.	S2, Negl.
0	100,0	200,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1	80,0	160,0	160,0	80,0	80,0	0,0	0,0	0,0
2	80,0	160,0	128,0	64,0	64,0	64,0	16,0	48,0
3	76,8	153,6	128,0	64,0	64,0	51,2	12,8	38,4
4	74,2	148,5	122,9	61,4	61,4	51,2	12,8	38,4
5	71,7	143,4	118,8	59,4	59,4	49,2	12,3	36,9
6	69,2	138,4	114,7	57,3	57,3	47,5	11,9	35,6
7	66,8	133,7	110,8	55,4	55,4	45,9	11,5	34,4
8	64,6	129,1	107,0	53,5	53,5	44,3	11,1	33,2
9	62,3	124,7	103,3	51,6	51,6	42,8	10,7	32,1
10	60,2	120,4	99,7	49,9	49,9	41,3	10,3	31,0
11	58,1	116,3	96,3	48,2	48,2	39,9	10,0	29,9
12	56,1	112,3	93,0	46,5	46,5	38,5	9,6	28,9
13	54,2	108,4	89,8	44,9	44,9	37,2	9,3	27,9
14	52,4	104,7	86,7	43,4	43,4	35,9	9,0	26,9
15	50,6	101,1	83,8	41,9	41,9	34,7	8,7	26,0
16	48,8	97,6	80,9	40,4	40,4	33,5	8,4	25,1
17	47,1	94,3	78,1	39,1	39,1	32,4	8,1	24,3
18	45,5	91,1	75,4	37,7	37,7	31,2	7,8	23,4
19	44,0	87,9	72,8	36,4	36,4	30,2	7,5	22,6
20	42,5	84,9	70,3	35,2	35,2	29,1	7,3	21,9

$\alpha =$	0,5
$\beta =$	0,25
$\sigma =$	0,8

$\gamma =$ 2

$\vartheta = \dfrac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}$ = 2,083333333

Figura 3.5: Propagação das plantas anuais - Extinção da espécie.
Fonte: os autores.

Nesse caso pode-se notar que a população tende a uma extinção. Também, comparando a quantidade ϑ com o parâmetro γ nota-se que $\gamma < \vartheta$ de modo que $\lambda_2 \leq 1$. Na Figura 3.6 apresenta-se o ajuste gráfico para essa simulação.

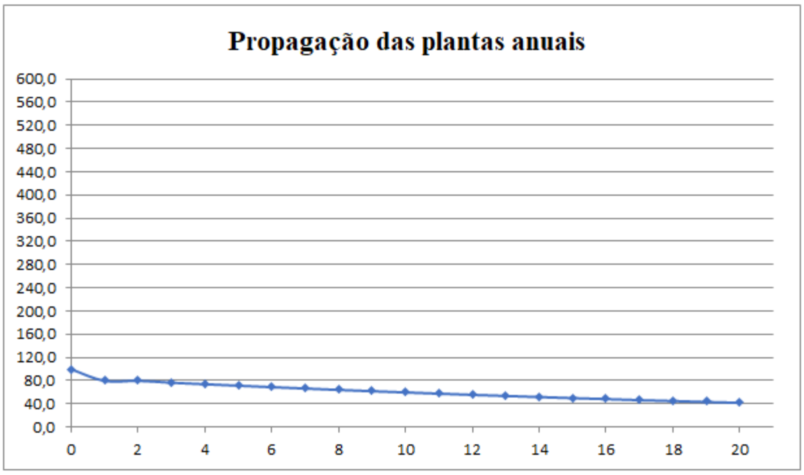


Figura 3.6: Gráfico - Extinção da espécie.

Fonte: os autores.

4 Conclusão

Apesar de o tema equações de diferenças transmitir uma ideia de um conteúdo da Matemática estudado exclusivamente em níveis superiores, nota-se que essas estruturas Matemáticas são, geralmente, abordadas no Ensino Médio ao iniciar-se o estudo das progressões aritméticas e geométricas, que são casos particulares de equações de diferenças. A Subseção 2.1 foi desenvolvida justamente com o propósito de ser um texto acessível para alunos do Ensino Médio, pois apresentamos o conceito através de um problema de Geometria Plana. A ideia foi direcionar os alunos a uma melhor compreensão do que são as equações de diferenças e, em seguida, foi desenvolvida uma formalização do conceito e as classificações dessas estruturas.

A Subseção 2.4, bem como uma seleção e adequação menos rigorosa de conteúdos da Subseção 2.5 e da Seção 3, podem ser trabalhados com alunos do Ensino Médio.

Mais especificamente, com relação à Seção 3, objetivando trabalhar a interdisciplinaridade como proposto em [1], pode-se formar uma equipe de trabalho com os professores de Biologia para que o problema de propagação de plantas anuais não seja apenas apresentado de forma superficial, pelo professor de Matemática, mas sim estudado mais detalhadamente. O mesmo problema também evidencia a possibilidade de se abordar outros conteúdos. Note que o simples questionamento sobre fatores favoráveis à ocorrência das plantas anuais possibilita trabalhar com a Geografia no estudo de condições climáticas, tipo de relevo em que mais ocorre tal espécie de plantas, pluviosidade adequada à ocorrência da espécie, entre outros. Também, pode-se trabalhar com as simulações desse problema através da implementação de uma planilha eletrônica, o que exige apenas uma total compreensão das suposições para que sejam construídas as funções que integrarão a planilha e destaca-se que tal implementação possibilitará a visualização de diversos cenários para o problema (tomando-se o cuidado de não cair no rigor da dedução das equações).

Finalmente, apesar de o estudo desenvolvido no presente trabalho se referir às equações de diferenças lineares de segunda ordem com coeficientes reais e constantes, enfatizamos que um estudo similar pode ser realizado considerando-se equações de diferenças lineares de ordens superiores. Entretanto, a manipulação algébrica, ao considerarmos uma equação de ordem m, com $m = 3$ ou $m = 4$, torna-se bem mais trabalhosa. No caso $m \geq 5$, obtém-se como polinômio característico uma equação que não possui uma "fórmula fechada" para se determinar as suas raízes, o que torna a abordagem apresentada aqui inviável. Ainda com relação a esse comentário, na seção 3 abordamos o problema referente à propagação de plantas anuais, considerando-se que as sementes com mais de dois anos de idade eram negligenciadas (pois não mais poderiam germinar). Desta forma, podemos observar que um problema similar poderia ser modelado, considerando-se a possibilidade de germinação de uma semente até m anos de idade, $m \geq 3$ e, deste modo, obteríamos uma equação-modelo de ordem m (o que tornaria o algebrismo matemático um pouco mais complicado).

5 Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao PROFMAT-UFOP.

Referências

[1] Rodney Carlos Bassanezi. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 3^a edição, 2013.

[2] Abramo Hefez e Cecília S. Fernadez. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, 1^a edição, 2012.

[3] João Bicho; Nelson Torres e Susana Cruz. *Plantas Anuais e Bienais (Material Vegetal)*. Instituto Politécnico de Viana de Castelo, 2008.

[4] Leah Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. New York: McGraw-Hill, 1^a edição, 2005.

[5] IMPA. Luciano Monteiro de Castro. *Canal do Instituto de Matemática Pura e Aplicada. PAPMEM: Recorrência*. <disponível em: www.youtube.com/watch?v=nEXLM5U0DiL>, acessado em 2 de junho de 2017.