Provas bijetivas e funções geradoras no estudo de partições de inteiros

Igor Vallis Christ * ivcchrist@hotmail.com
Universidade Federal do Espírito Santo, Alegre, ES, Brazil

Victor do Nascimento Martins victor.n.martins@ufes.br
Universidade Federal do Espírito Santo, Alegre, ES, Brazil

Resumo

Encontrar maneiras de se escrever um número inteiro positivo como soma de inteiros positivos pode parecer trivial e nada motivador. Porém, quando olhamos um pouco para a história da matemática e nos deparamos com nomes como os dos matemáticos Euler, Hardy e Ramanujan tendo dedicado vários anos pesquisando o assunto, nos leva a reavaliar nossa primeira impressão sobre o tema. Estamos falando da teoria das partições de inteiros, subtópico da teoria aditiva dos números. A busca por fórmulas para contar o número de partições de um inteiro foi, sem dúvida, o que mais movimentou a teoria. Entretanto, as identidades em partições geram problemas motivadores e que desafiam o mundo matemático. As técnicas de demonstrações mais utilizadas na teoria: provas bijetivas e uso de funções geradoras, tornam seu estudo ainda mais elegante e intrigante. Nosso objetivo é introduzir a teoria, dando ênfase nessas duas técnicas. Além disso, apresentaremos alguns dos principais resultados da teoria como os teoremas de Euler e dos números pentagonais. Iremos mostrar que o número de partições de um dado inteiro é limitado por um número de Fibonacci.

Palavras-chave

Partições de inteiros, Identidades em partições, Provas bijetivas, Funções geradoras.

1 Introdução

O conceito básico da teoria que apresentaremos é tão simples, que, equivocadamente, pode parecer desestimulante estudar tal assunto: uma *partição* de um inteiro positivo é uma forma de decompor este número na soma de inteiros positivos. Por exemplo, imagine que você tenha 6 peças de roupas e quer guardá-las em gavetas de uma cômoda com 6 gavetas. Você pode, por exemplo, separá-las em grupos menores e guardar 3 peças em uma gaveta, 1 em outra e 2 em outra. Ou poderia simplesmente, colocar uma em cada gaveta ou até mesmo todas na

* I. V. C. desenvolveu o trabalho durante o projeto de PIIC 2019/2020 da Universidade Federal do Espírito Santo sob orientação de V.M. e agradece a UFES pelo suporte financeiro.

mesma gaveta. Basicamente, estamos separando as peças em subconjuntos. E, no caso das partições, não importam as gavetas. Por exemplo, as partições de 3 são: $3, 2 + 1, 1 + 1 + 1$. Uma pergunta natural a se fazer é: dado um número inteiro positivo n, quantas partições de n existem? A busca por uma fórmula precisa que respondesse essa pergunta, foi um fator relevante e impulsionador no desenvolvimento da pesquisa em teoria de partições, uma vez que quanto maior o valor de n, o número de partições de n não parecia ter nenhum controle ou padrão de crescimento.

A teoria teve início no século XVIII com o Tratado de Euler, onde foi introduzido partições de inteiros como nós conhecemos. Euler provou significativos teoremas sobre o assunto, como o Teorema dos Números Pentagonais e o Teorema de Euler, que serão apresentados mais adiante. Como área de pesquisa, a teoria das partições começou como uma parte da análise, mas não demorou muito e se tornou parte da teoria dos números. Posteriormente foi considerada como parte da análise combinatória. Mais recentemente, o tema ganhou seu próprio valor.

Muitos matemáticos, como Hardy, Schur, Sylvester e Ramanujan ajudaram a desenvolver a teoria. Srinivasa Ramanujan, matemático indiano, que em 2015 teve sua trajetória contada no filme *"The man who knew infinity"*, enviou uma carta a Hardy onde demonstrava 120 teoremas que muitos sonhavam em demonstrar. Mais tarde, em Londres, em sua parceria com Hardy, demonstrou vários resultados da teoria dos números. E antes de morrer, Ramanujan ainda enunciou outros importantes resultados que posteriormente foram demonstrados por outros matemáticos. Os resultados, identidades e enunciados de Ramanujan impulsionaram consideravelmente a teoria das partições, tornando objeto de estudo de muitos matemáticos.

Formalmente, para cada inteiro positivo n, $p(n)$ é o número de maneiras de se representar n como soma de inteiros positivos, chamados partes, na qual a ordem dessas partes não importa. Cada uma dessas somas é o que chamamos de **partição** de n.

Durante um século e meio uma fórmula recursiva para calcular partições através de funções geradoras obtida por Euler foi o único meio para se calcular $p(n)$. Mais tarde, Hardy e Ramanujan encontraram uma fórmula para o comportamento de $p(n)$, mostrando que era exponencial. Era uma fórmula exata, porém não muito útil, já que consistia numa soma de uma série infinita para calcular um inteiro. Mais adiante, no início do século XX, Ramanujan apresentou suas identidades que até hoje impulsionam diversas pesquisas na área. Essas identidades intrigaram bastante o mundo matemático, pois eram resultados relacionados aos primos 5, 7 e 11, mas que porém não possuíam resultados análogos para outros primos. Em 2011, Ken Ono, um matemático especialista em teoria dos números e combinatória, deu um grande impulso na teoria de partições demonstrando dois resultados de maneira surpreendente. Ele utilizou conceitos de natureza fractal em suas demonstrações. Os mesmos fractais que nos anos 2000 ganharam adeptos por todo lado após as descobertas da nova abordagem à geometria feita por Mandelbrot e conhecida como sistemas dinâmicos. Ono finalizou com problemas que já tinham séculos e cujas abordagens habituais não garantiam avanços. Ele percebeu que não há nada de especial com os primos 5, 7 e 11 das identidades de Ramanujan, porém só uma análise fractal aos inteiros o permitiu ver isso. Além disso, ainda em 2011, Ono e Bruinier [2], descobriram uma fórmula algébrica e finita para a função $p(n)$. E segundo Ono, os resultados obtidos por ele, já deixam claro que não há possibilidade de utilizar partições para encriptar dados de computador, uma vez que as partições não são aleatórias e sim previsíveis, tornando assim nada seguro criptografias com partições.

Como exemplo, seguem listadas abaixo as partições de 3, 4, 5 e 6.

			6
			$5+1$
		5	$4+2$
	4	$4+1$	$4+1+1$
3	$3+1$	$3+2$	$3+3$
$2+1$	$2+2$	$3+1+1$	$3+2+1$
$1+1+1$	$2+1+1$	$2+2+1$	$3+1+1+1$
	$1+1+1+1$	$2+1+1+1$	$2+2+2$
		$1+1+1+1+1$	$2+2+1+1$
			$2+1+1+1+1$
			$1+1+1+1+1+1$

Do exemplo acima vemos que $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ e $p(6) = 11$. Para termos uma noção de quão rápido é o crescimento de $p(n)$ listamos a seguir alguns valores: $p(20) = 627$, $p(100) = 190569292$, $p(200) = 3972999029388$. Note que, pela definição, em uma partição de n nenhuma parte supera n, além disso, a ordem das partes não está sendo considerada.

A partir de uma breve revisão de conceitos básicos da teoria dos números, nos guiando por [3] e [7], onde revisitamos a tão conhecida sequência de Fibonacci, a fim de relacionarmos a mesma com nossos estudos, procuramos neste trabalho fazer uma breve introdução à teoria das partições, assim como sugerido em [4]. Além de apresentarmos as duas principais técnicas de demonstrações dentro da teoria, provas bijetivas e funções geradoras, optamos por apresentar resultados onde utilizamos essas técnicas e finalmente concluimos nosso trabalho com dois teoremas clássicos sobre números poligonais: o Teorema dos Números Pentagonais de Euler e um teorema sobre os números triangulares.

2 A função $p(n)$ e a sequência de Fibonacci

A busca por uma fórmula para a função $p(n)$ foi um fator relevante no desenvolvimento da pesquisa em teoria de partições, porém neste trabalho, não temos como foco apresentar resultados relacionados a essa busca por fórmulas, para isso sugerimos [2]. Porém, achamos interessante falar sobre um limitante para a função $p(n)$ dado pelos números de Fibonacci.

A **sequência de Fibonacci** é uma sequência numérica proposta pelo matemático Leonardo Pisa (1170 - 1250), mais conhecido como Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ Foi a partir de um problema criado por ele que o mesmo detectou a existência de uma regularidade matemática. Trata-se do exemplo clássico dos coelhos, em que Fibonacci descreve o crescimento de uma população desses animais. A sequência de Fibonacci é definida por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

A fim de obtermos uma fórmula explícita para F_n em função de n, procuraremos progressões geométricas que satisfazem a mesma recorrência de F_n, ou seja,

$$x_n = aq^n, \quad a, q \neq 0$$

satisfaz

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

o que implica que

$$aq^{n+2} = aq^{n+1} + aq^n = aq^n(q+1),$$

em que $q + 1 = q^2$. Teremos assim dois valores possíveis para q, as duas raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$, que são $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Logo, sequências da forma $a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $b\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ satisfazem a recorrência acima, consequentemente as sequências da forma $y_n = a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ também satisfazem a recorrência.

Basta agora encontrarmos valores de a e b tais que $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ para que tenhamos $y_n = F_n$ para todo n (de fato, teríamos $y_0 = F_0, y_1 = F_1$, e por indução, se $k \geq 2$ e $y_n = F_n$ para todo $n < k$, temos $y_k = y_{k-1} + y_{k-2} = F_{k-1} + F_{k-2} = F_k$). Para isso, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

e portanto $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $b = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Mostramos assim que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Veremos agora que a função $p(n)$ é limitada pelos números de Fibonacci. Primeiro mostraremos na proposição a seguir que $p(n)$ é uma função crescente. Durante todo texto, utilizaremos a notação $p(n|*)$ quando estivermos falando do número de partições de n satisfazendo a condição $*$.

Proposição 2.1. *Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ temos*

$$p(n) > p(n-1).$$

Demonstração. De fato, observe que de cada partição de $n-1$ obtém-se uma partição de n se adicionarmos uma parte 1. Note também que cada partição de n possuindo uma parte 1, torna-se uma partição de $n-1$ se retirarmos esta parte. Assim temos,

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{não há parte igual a } 1) > p(n-1), \quad \forall n \geq 2 \qquad (1)$$

e portanto, $p(n)$ é uma função crescente. □

Observemos agora que

$$p(n-2) = p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2). \qquad (2)$$

De fato, acrescentando uma parte 2 em qualquer partição de $n-2$, obtemos partições de n com ao menos uma parte 2. E, inversamente, se removermos uma parte 2 das partições enumeradas por $p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2)$ obtemos partições de $n-2$.

Proposição 2.2. *Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ temos*

$$p(n \mid \textit{não há parte igual a } 1) \leq p(n \mid \textit{existe ao menos uma parte } 2).$$

Demonstração. Dada uma partição contada em $p(n \mid \text{não há parte igual a } 1)$, é claro que as partes dessa partição são maiores que 1. Podemos transformar cada partição com partes maiores que 1 em uma única partição com pelo menos uma parte 2, bastando dividir a menor parte λ (que é maior do que 1) em uma parte 2 e $\lambda - 2$ partes iguais a 1. E portanto, temos provado o resultado. □

Combinando (1) e a Proposição 2.2 temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n \mid \text{existe ao menos uma parte } 2), \quad \forall n \geq 2 \tag{3}$$

Daí, de (3) e (2) temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \quad \forall n \geq 2 \tag{4}$$

Mostraremos agora que os números de Fibonacci controlam o crescimento de $p(n)$.

Teorema 2.1. *Para todo inteiro positivo n, temos que $p(n) \leq F_{n+1}$, em que F_{n+1} é o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração. Vamos provar o teorema fazendo indução sobre n. Primeiro note que

$$p(0) = 1 = F_1 \quad \text{e} \quad p(1) = F_1 = F_2 = 1,$$

ou seja, o resultado é válido para $n = 1$. Suponha agora, por hipótese de indução, que o resultado seja verdadeiro para todo $k < n$, com $k \geq 2$. De (4) temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2).$$

Aplicando a hipótese de indução e a definição dos números de Fibonacci temos

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \leq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo inteiro $n > 0$. □

3 Identidades em partições

Na teoria de partições, afirmações como “o número de partições de n do tipo A é igual o número de partições de n do tipo B"são chamadas de **identidades em partições**. Trata-se de um tópico amplamente estudado e com diversos resultados, que motivam diversos pesquisadores na teoria. No início do século XX, Ramanujan apresentou suas identidades, que até hoje impulsionam diversas pesquisas na área.

Essas identidades intrigaram bastante o mundo matemático, pois eram resultados relacionados aos primos 5, 7 e 11, mas que porém não possuíam resultados análogos para outros primos.

Muitas das identidades que veremos neste trabalho tem a forma

$$p(n \mid [\text{alguma condição}]) = p(n \mid \text{partes em N}), \forall n > 0. \tag{5}$$

Nas próximas seções discutiremos e apresentaremos demonstrações para essas partições, porém iniciaremos a discussão apresentando, ainda que superficialmente, alguns exemplos de identidades famosas dentro da teoria.

A chamada **primeira identidade de Rogers-Ramanujan** refere-se a partições de um inteiro positivo n cujas partes deixam resto 1 ou 4 quando divididas por 5 e pode ser enunciada como

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 4 \mod 5) = p(n \mid \text{partes são} \quad \text{2-distintas}),$$

onde, dizemos que uma partição tem partes d**-distintas** se a diferença entre estas partes é de pelo menos d. A **segunda identidade de Rogers-Ramanujan** é

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \quad \text{ou} \quad 3 \mod 5) = p(n \mid \text{partes são} \quad \text{2-distintas e } > 1).$$

Mesmo sem apresentarmos a prova analítica para esta identidade, vamos fazer uma construção, com base em alguns poucos exemplos, que nos dão evidências de sua veracidade. Para começar, construimos uma tabela com todas as partições com partes 2-distintas e > 1 para $n = 1, 2, ...12$.

Utilizando os dados da Tabela 1, vamos procurar um conjunto M tal que as partes das partições de n pertençam a M e satisfaçam a seguinte identidade:

$$p(n|\text{partes sejam 2-distintas e } > 1) = p(n|\text{partes em} \quad M).$$

Inicialmente consideramos o conjunto $\emptyset$ e vamos construindo o conjunto M:

- Para $n = 1$, não há partição em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(1 \mid$ partes

n	Quantidade	Partições em partes 2-distintas e > 1
1	0	
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	1	5
6	2	6, 4+2
7	2	7, 5+2
8	3	8, 6+2, 5+3
9	3	9, 7+2, 6+3
10	4	10, 8+2, 7+3, 6+4
11	4	11, 9+2, 8+3, 7+4
12	6	12, 10+2, 9+3, 8+4, 7+5, 6+4+2

Tabela 1: Partições em partes 2-distintas e > 1

em $M)$ deve ser zero. Portanto, o número 1 não pertence a M.

- Para $n = 2$, há uma partição em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(2 \mid$ partes em $M)$ deve ser um. Portanto, o número 2 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2\}$.

- Para $n = 3$, há uma partição em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(3 \mid$ partes em $M)$ deve ser um. Portanto, o número 3 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3\}$.

- Para $n = 4$, há uma partição em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(4 \mid$ partes em $M)$ deve ser um. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $2 + 2$. Portanto, o número 4 não pertence a M.

- Para $n = 5$, há uma partição em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(5 \mid$ partes em $M)$ deve ser um. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $2 + 3$. Portanto, o número 5 não pertence a M.

- Para $n = 6$, há duas partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(6 \mid$ partes em $M)$ deve ser dois. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos as partições $3 + 3$ e $2 + 2 + 2$. Portanto, o número 6 não pertence a M.

- Para $n = 7$, há duas partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(7 \mid$ partes em $M)$ deve ser dois. Como $M \supseteq \{2, 3\}$, temos a partição $3 + 2 + 2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 7 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7\}$.

- Para $n = 8$, há três partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(8 \mid \text{partes em } M)$ deve ser três. Como $M \supseteq \{2, 3, 7\}$, temos as partições $3 + 3 + 2$ e $2 + 2 + 2 + 2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 8 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$.

- Para $n = 9$, há três partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(9 \mid \text{partes em } M)$ deve ser três. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $7 + 2, 3 + 3 + 3$ e $3 + 2 + 2 + 2$. Portanto, o número 9 não pertence a M.

- Para $n = 10$, há quatro partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(10 \mid \text{partes em } M)$ deve ser quatro. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$ temos as partições $8 + 2, 7 + 3, 3 + 3 + 2 + 2$ e $2 + 2 + 2 + 2 + 2$. Portanto, o número 10 não pertence a M.

- Para $n = 11$, há quatro partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(11 \mid \text{partes em } M)$ deve ser quatro. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $8 + 3, 7 + 2 + 2, 3 + 3 + 3 + 2$ e $3 + 2 + 2 + 2 + 2$. Portanto, o número 11 não pertence a M.

- Para $n = 12$, há seis partições em partes 2-distintas e > 1. Assim, $p(12 \mid \text{partes em } M)$ deve ser seis. Como $M \supseteq \{2, 3, 7, 8\}$, temos as partições $8+2+2, 7+3+2, 3+3+3+3, 3+3+2+2+2$ e $2+2+2+2+2+2$. Logo, precisamos de mais uma partição. Portanto, o número 12 pertence a M. Agora $M \supseteq \{2, 3, 7, 8, 12\}$.

Assim, $M \supseteq \{2, 3, 7, 8, 12\}$ e se continuarmos com o mesmo argumento, podemos verificar que M contém $\{13, 17, 18, 22, 23, 27, 28, \ldots\}$. Note que obtemos os dois próximos números do conjunto M adicionando 5 nos dois últimos números da sequência. Este conjunto de números pode ser descrito como o conjunto dos inteiros positivos que, quando divididos por 5, deixam restos iguais a 2 ou 3. Portanto,

$$p(n \mid \text{partes} \equiv 2 \quad \text{ou} \quad 3 \mod 5) = p(n \mid \text{partes são} \quad \text{2-distintas e } > 1).$$

O argumento acima não prova a identidade para todo n, apenas verifica que é verdadeira para alguns valores de n e encaminha a construção de M.

Utilizaremos o método utilizado para redescobrir a segunda identidade de Rogers-Ramanujan, para descobrir uma outra identidade conhecida na teoria das partições, a **identidade de Schur**. Trata-se de uma identidade sobre partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3. Primeiro faremos uma tabela na qual listaremos todas as partições, para $n = 1, 2, 3, \dots, 13$, com partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3:

n	Quantidade	Partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
5	2	5, 4+1
6	2	6, 5+1
7	3	7, 6+1, 5+2
8	3	8, 7+1, 6+2
9	3	9, 8+1, 7+2
10	4	10, 9+1, 8+2, 7+3
11	5	11, 10+1, 9+2, 8+3, 7+4
12	6	12, 11+1, 10+2, 9+3, 8+4, 7+4+1
13	7	13, 12+1, 11+2, 10+3, 9+4, 8+5, 8+4+1

Tabela 2: Partições em partes 3-distintas e não possuindo partes consecutivas divisíveis por 3

Agora, com base na tabela acima, vamos construir um conjunto S tal que $p(n \mid \text{partes em } S) = p(n \mid \text{partes 3-distintas e não possui partes consecutivas divisíveis por } 3)$. Começaremos com $N = \emptyset$ e então:

- Deve existir uma partição de 1. Com partes em $S = \emptyset$ não teremos uma partição de 1, logo, devemos ter $1 \in S$.
- Deve existir uma partição de 2. Como temos uma partição de 2 em $S = \{1\}, 1 + 1$, segue que $2 \notin S$.

- Deve existir uma partição de 3. Como temos uma partição de 3 em $S = \{1\}$, $1+1+1$, segue que $3 \notin S$.

- Deve existir uma partição de 4. Como temos uma partição de 4 em $S = \{1\}$, $1+1+1+1$, segue que $4 \notin S$.

- Devem existir duas partições de 5. Com partes em $S = \{1\}$, temos apenas uma partição de $5: 1+1+1+1+1$. Assim devemos ter $5 \in S$.

- Devem existir duas partições de 6. Como temos duas partição de 6 em $S = \{1, 5\}$, $1+1+1+1+1+1$ e $5+1$, segue que $6 \notin S$.

- Devem existir três partições de 7. Com partes em $S = \{1, 5\}$, temos apenas duas partições de $7: 1+1+1+1+1+1+1$ e $5+1+1$. Assim devemos ter $7 \in S$.

- Devem existir três partições de 8. Como temos três partições de 8 em $S = \{1, 5, 7\}$, $1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1$ e $5+1+1+1$, segue que $8 \notin S$.

- Devem existir três partições de 9. Como temos três partições de 9 em $S = \{1, 5, 7\}$, $1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1$ e $5+1+1+1+1$, segue que $9 \notin S$.

- Devem existir quatro partições de 10. Como temos quatro partições de 10 em $S = \{1, 5, 7\}$, $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1, 5+5$ e $5+1+1+1+1+1$, segue que $10 \notin S$.

- Devem existir cinco partições de 11. Com partes em $S = \{1, 5, 7\}$, temos apenas quatro partições de $11: 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1+1, 5+5+1$ e $5+1+1+1+1+1+1$. Assim devemos ter $11 \in S$.

- Devem existir seis partições de 12. Com partes em $S = \{1, 5, 7, 11\}$, temos seis partições de $12: 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1+1+1, 5+5+1+1, 5+1+1+1+1+1+1+1, 11+1$ e $7+5$. Assim devemos ter $12 \notin S$.

- Devem existir sete partições de 13. Com partes em $S = \{1, 5, 7, 11\}$, temos apenas quatro partições de $13 :$ $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1, 7+1+1+1+1+1+1, 5+5+1+1+1, 5+1+1+1+1+1+1+1+1$, $11 + 1 + 1$ e $7 + 5 + 1$. Assim devemos ter $13 \in S$.

Até aqui obtivemos $S = \{1, 5, 7, 11, 13\}$. Prosseguindo com a argumentação acima, pode-se verificar que $S = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, \ldots\}$. Observe que os inteiros em S são congruentes a ± 1 mod 6 e com isso podemos conjecturar que:

$$p(n \mid \text{partes} \equiv \pm 1 \bmod 6) = p(n \mid \text{partes 3-distintas e sem partes múltiplas consecutivas de} \quad 3),$$

que é conhecida como a identidade de Schur.

3.1 Provas bijetivas

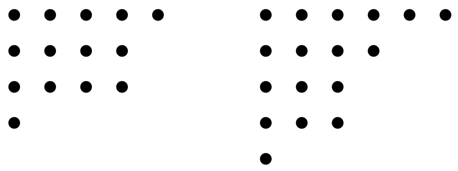
Basicamente se queremos verificar que o número de objetos de um tipo A é igual ao número de objetos de um tipo B não precisamos contar esses elementos. É suficiente fazer pares com um objeto de cada conjunto, mostrando que cada objeto do tipo A faz par com um objeto do tipo B e vice-versa. Essa construção é o que chamamos de bijeção entre os conjuntos A e B.

Uma **prova bijetiva** para uma identidade em partições consiste em se obter uma bijeção entre o conjunto de partições do tipo A e o conjunto de partições do tipo B. É importante mencionar também que, até hoje não se obteve uma prova bijetiva simples e direta para as identidades de Rogers-Ramanujan anteriormente citadas. Nesta seção veremos mais detalhadamente a importância e utilidade de tais provas.

Para facilitar a compreensão da maioria das demonstrações que serão apresentadas, introduziremos uma representações gráfica das partições. Graficamente, podemos representar uma partição de um inteiro n positivo por meio de um arranjo de n pontos no plano, constituído de s linhas em ordem não crescente. Em cada linha deste arranjo colocamos um número de pontos igual a cada uma de suas partes. Chamamos essa representação de **gráfico de Ferrers** da partição.

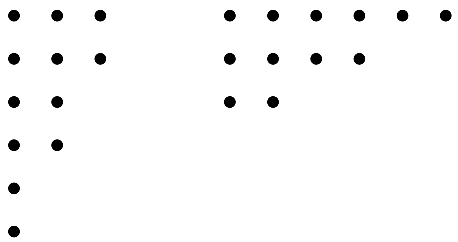
Exemplo 3.1. *Os gráficos de Ferrers das partições* $5+4+4+1$ *e* $6+4+3+3+1$

são, respectivamente



Se no gráfico de Ferrers de uma partição de n trocarmos as linhas pelas colunas, obtemos o gráfico de Ferrers de uma outra partição de n, que chamaremos de **partição conjugada** da partição considerada.

Exemplo 3.2. *Os gráficos de Ferrers das partições* $3+3+2+2+1+1$ *e sua respectiva conjugada* $6+4+2$ *são*



Na maioria dos resultados que seguem, utilizaremos a representação gráfica de uma partição para auxiliar as provas bijetivas que serão apresentadas para algumas identidades. A partir de agora, iremos associar uma partição a sua representação em um gráfico de Ferrers, de modo que quando falarmos da conjugação de uma partição, por exemplo, estaremos nos referindo a conjugação de seu gráfico de Ferrers.

Teorema 3.1. *Seja* $q_k(n)$ *o número de partições de* n *tendo exatamente* k *partes. O número* $p_k(n)$ *de partições de* n *tendo* k *como a maior parte é igual ao número* $q_k(n)$.

Demonstração. Usando a operação “conjugação"definida no conjunto das partições de n, teremos que toda partição de n tendo k como maior parte é transformada em uma partição possuindo exatamente k partes e vice-versa. $\square$

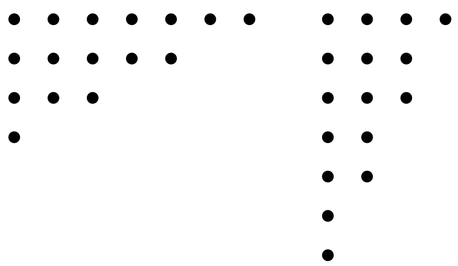
Corolário 3.1. *Seja* n *um inteiro positivo. O número de partições de* n *com partes menores ou iguais a* k *é igual ao número de partições de* n *com no máximo* k *partes.*

Proposição 3.1.

$$p(n \mid \textit{partes são distintas}) = p(n \mid \textit{todo inteiro entre 1 e a maior parte é parte}).$$

Observe que, quando fazemos a operação conjugação em uma partição de n qualquer que tenha todas as partes distintas, teremos sempre o 1 como parte, já que a maior linha se tornará a maior coluna do diagrama de Ferrers da partição conjugada. Se a partição de n tiver apenas uma parte, não há mais o que se fazer, caso contrário, da mesma forma, a segunda linha da partição de n será a segunda coluna do diagrama de Ferrers da partição conjugada e a única com este tamanho, logo, nesta nova partição teremos ao menos uma parte 2. Pelo mesmo argumento anterior sempre teremos uma nova coluna menor que a anterior e consequentemente ao menos uma parte uma unidade maior do que a que tínhamos até então no diagrama de Ferrers da partição conjugada. Caso não tenhamos mais outra linha a conjugar da partição, a demonstração termina aqui. Caso contrário, repetiremos o mesmo processo. Feito o processo até que se termine de conjugar todas as linhas da partição de n teremos assim, uma nova partição em que todo inteiro entre 1 e a maior parte aparece como parte.

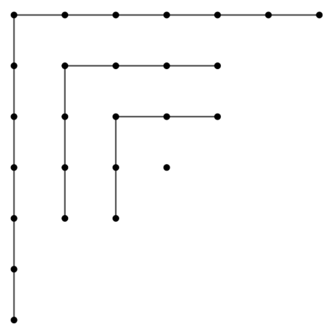
Como exemplo vejamos o gráfico de Ferrers das partições $7 + 5 + 3 + 1$ e sua conjugada $4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ de 16 como forma de tornar mais clara a argumentação acima:



Dizemos que uma partição é **autoconjugada** se ela for igual a sua partição conjugada. Por exemplo, é fácil ver que $3 + 2 + 1$ e $5 + 3 + 3 + 1 + 1$ são autoconjugadas, tal verificação pode ser feita através de seus respectivos gráficos de Ferrers.

Teorema 3.2. *Seja n um inteiro positivo. Então, o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.*

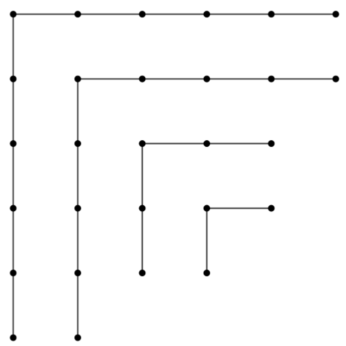
Para termos uma ideia da prova deste teorema e ilustrar tal transformação usaremos como exemplo a partição $7 + 5 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1$ de 26. Vemos que, o número de pontos em cada uma das “linhas"em formato de L é ímpar e estes números são necessariamente distintos.



Neste caso, considerando cada parte pelo número de pontos sobre cada “linha"teremos a partição $13 + 7 + 5 + 1$ de 26.

Da mesma forma dando-nos uma partição contendo apenas números ímpares distintos, podemos colocá-los em formato L como mostrado acima e desta forma obtemos o gráfico de Ferrers de uma partição autoconjugada.

Como exemplo usaremos a partição $11 + 9 + 5 + 3$ de 28.



Note que, esta partição é claramente autoconjugada.

Corolário 3.2. *$p(n)$ é ímpar se, e somente se, o número de partições de n cujas partes são ímpares e distintas é ímpar.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 o número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas, daí podemos mostrar então que

$$p(n) \text{ é impar} \Leftrightarrow \text{número de partições de } n \text{ autoconjugadas é ímpar.}$$

Note que,

$$p(n) = \text{partições autoconjugadas + partições que não são autoconjugadas} \quad (6)$$

Observe que o número de partições de n que não são autoconjugadas é par, já que, quando conjugamos uma dada partição A, teremos como resultado uma nova partição B que é diferente de A e se conjugarmos B resultaremos novamente em A, ou seja, cada partição que não é autoconjugada está associada a uma outra partição. A partir disso e de (6) temos que $p(n)$ é ímpar se, e somente se, o número de partições de n autoconjugadas é ímpar. □

Euler, que tem seu nome marcado em diversas áreas da matemática, também tem participação no desenvolvimento da teoria das partições. Vejamos uma de suas contribuições no teorema a seguir, onde aproveitaremos para descrever duas operações que utilizaremos em outras provas bijetivas.

Teorema 3.3 (Euler)**.** *Para qualquer inteiro positivo n,*

$$p(n \mid \textit{partes são ímpares}) = p(n \mid \textit{partes são distintas}).$$

Demonstração. Operação 1 - De partes ímpares para partes distintas: dada uma partição de n em partes ímpares, se a partição não possuir partes iguais, não há o que fazer, caso contrário, se tal partição possuir ao menos duas partes iguais, somaremos duas a duas essas partes iguais e repetiremos esse procedimento até que todas as partes sejam distintas, ou até que sobre apenas uma parte.

Operação 2 - De partes distintas para partes ímpares: dada uma partição de n em partes distintas, caso todas as partes distintas sejam ímpares não temos nada a fazer, caso contrário, pegaremos cada parte par e a dividiremos por dois, originando duas novas partes iguais e repetiremos esse procedimento até que todas as partes restantes sejam ímpares.

Denotando por A e B os conjuntos formados pelas partições de n em partes ímpares e partes distintas, respectivamente, temos que $f : A \longrightarrow B$ definida por $f(\lambda) = \mu$, em que μ é a partição obtida a partir de $\lambda \in A$ pela operação 1, é uma bijeção, e devido a Operação 2, $f^{-1}(\mu) = \lambda$. Com isso temos a prova bijetiva do teorema. $\square$

Observação 3.1. *Quando usarmos no texto a expressão "somar"estaremos nos referindo a Operação 1 da demonstração do Teorema de Euler e quando utilizarmos a expressão "dividir"estaremos nos referindo a Operação 2 desta mesma demonstração.*

Teorema 3.4. *Seja n um inteiro positivo. Então,*

$$p(n \mid \textit{partes} \in \{1\}) = p(n \mid \textit{partes são potências distintas de } 2)$$

Demonstração. É claro que $p(n \mid \text{partes} \in \{1\}) = 1$, já que existe apenas uma partição de n formada somente por partes iguais a 1. Usando a operação "somar", transformamos pares de números 1 em partes 2, na sequência os pares de 2 em partes 4 e assim sucessivamente, logo o conjunto de partições obtidas tem partes distintas e estas partes estão no conjunto formado pelas potências de 2, ou seja, o conjunto $\{1, 2, 4, ...\}$. Reciprocamente, cada potência de 2, digamos 2^k, é dividida em um par de potências de 2, $2^{k-1} + 2^{k-1}$. Como a única potência de 2 que é ímpar é $2^0 = 1$, a operação "dividir"será executada em cada potência de 2 até restarem apenas partes iguais a 1. Com isso, temos que a igualdade do enunciado é de fato verdadeira. $\square$

Os conjuntos para os quais é possível obter uma bijeção através das operações "somar"e "dividir"são chamados de **pares de Euler**.

Teorema 3.5.

$$p(n \mid \textit{a maior parte é} \quad r) = p(n-r \mid \textit{cada parte é} \leq r),$$

em que n *e* r *são inteiros positivos, com* $n \geq r$.

Demonstração. Dada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ de n, com $r = \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_s$, ao removermos a maior parte, λ_1, ficaremos com uma partição $\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_s$ de $n-r$ tal que cada parte é menor do que ou igual a r. Claramente este processo é invertível bastando acrescentar uma parte r a qualquer partição de $n-r$ com partes menores do que ou iguais a r. Com isso temos estabelecido uma prova bijetiva. □

Vamos denotar por $A_k(n)$ o número de partições de n em partes ímpares, não necessariamente distintas, possuindo exatamente k partes diferentes.

Exemplo 3.3. $A_3(14) = 7$*, pois as partições contadas por* $A_3(14)$ *são*

$$\begin{aligned}
&9+3+1+1\\
&7+5+1+1\\
&7+3+3+1\\
&7+3+1+1+1+1\\
&5+5+3+1\\
&5+3+3+1+1+1\\
&5+3+1+1+1+1+1+1.
\end{aligned}$$

Vamos denotar por $B_k(n)$ o número de partições de n nas quais cada partição é formada por k sequências de um ou mais inteiros consecutivos, tais que essas sequências não podem ser consecutivas.

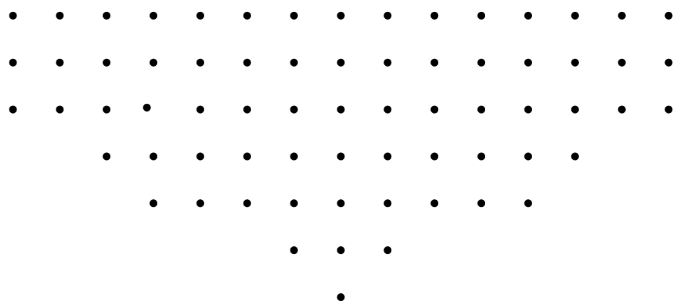
Exemplo 3.4. $B_3(14) = 7$*, pois as partições contadas por* $B_3(14)$ *são*

$$10+3+1, 9+4+1, 8+4+2, 8+5+1, 7+5+2, 7+4+2+1 \quad \textit{e} \quad 6+4+3+1.$$

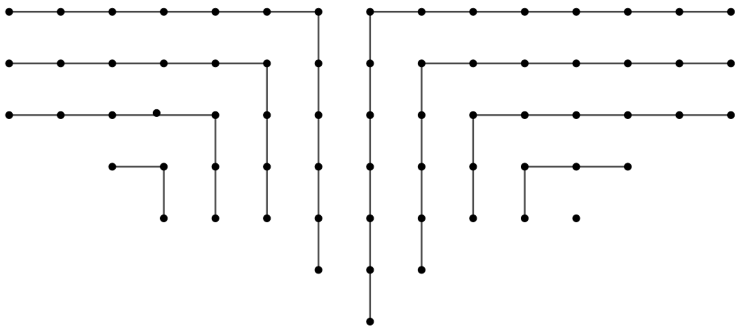
Observe, por exemplo, que a partição $8+3+2+1$ *apesar de ser formada por 3 sequências de inteiros, não é contada em* $B_3(14)$*, pois as segunda e terceira* *sequências são consecutivas.*

Teorema 3.6 (Sylvester)**.** *$A_k(n) = B_k(n)$, para quaisquer inteiros positivos k e n.*

Para este teorema, iremos apenas ilustrar a demonstração através de um exemplo. Para obtermos uma bijeção iremos fazer uma variação no gráfico de Ferrers das partições em partes ímpares. Na representação gráfica de uma partição as linhas são alinhadas a esquerda, o que iremos fazer agora será alinhá-las ao centro. Como exemplo, podemos representar a partição $15 + 15 + 15 + 11 + 9 + 3 + 1$, uma das partições contadas em $A_5(69)$ por:



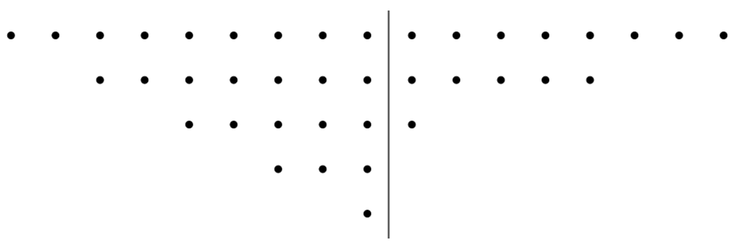
Agora, neste novo diagrama, conectamos os pontos em L da seguinte maneira:



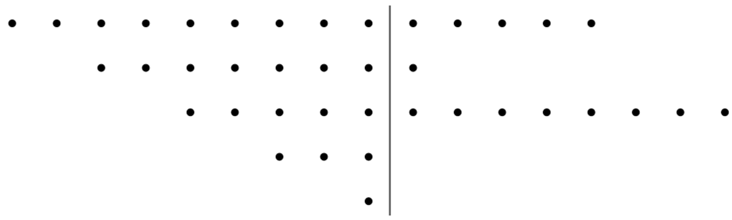
Cada parte da nova partição será obtida contando o número de pontos sobre cada linha em L, o que resulta na partição $14+12+11+9+8+7+4+3+1$. Observe que esta nova partição possui partes distintas e exatamente cinco sequências separadas: $14, 12+11, 9+8+7, 4+3$ e 1, isto é, trata-se de uma partição contada em $B_5(69)$.

Teorema 3.7. *O número de partições de um inteiro positivo n cuja diferença entre quaisquer duas partes é ≥ 2 é igual ao número de partições de n em partes distintas, onde cada parte par é maior que duas vezes o número de partes ímpares.*

Vamos descrever brevemente o processo para demonstrar este teorema através de um exemplo. Considere o gráfico de Ferrers de uma partição contada por $p(n \mid \text{diferença entre quaisquer duas partes é} \geq 2)$. Ajustaremos as linhas deste gráfico da seguinte maneira: deslocaremos a segunda linha para a direita de forma que o primeiro ponto desta linha fique na mesma direção do terceiro ponto da primeira linha e faremos este mesmo processo sucessivamente para todas as outras linhas de forma que o primeiro ponto de cada linha coincida sempre com o terceiro ponto da linha anterior. Traçaremos agora um linha vertical neste diagrama de forma que fique apenas um ponto na última linha à esquerda desta linha vertical. Por exemplo, para $17 + 12 + 6 + 3 + 1$, o diagrama modificado é:



À direita da linha vertical no diagrama acima temos um gráfico de Ferrers de uma partição e agora vamos reordenar suas linhas colocando as partes ímpares em ordem não-crescente e, depois, as partes pares em ordem não-crescente:



Agora, ignorando a linha vertical no meio do diagrama e considerando cada linha como uma parte da nova partição, temos que $14 + 8 + 13 + 3 + 1$ será esta nova partição em partes distintas e tal que cada parte par é maior do que duas vezes o número de partes ímpares. Este procedimento fornece uma prova bijetiva para o teorema.

Relembremos do Teorema 3.1 que $q_k(n)$ é o número de partições de n tendo exatamente k partes se $0 < k \leq n$. Vamos agora, por meio de bijeções, provar uma relação de recorrência para $q_k(n)$.

Proposição 3.2. *Sejam n, k inteiros positivos tais que $0 < k \leq n$, então*

$$q_k(n) = q_{k-1}(n-1) + q_k(n-k).$$

Demonstração. Seja $Q_j(i)$ o conjunto formado pelas partições de i com exatamente j partes. Então, o número de elementos de $Q_j(i)$ é $|Q_j(i)| = q_j(i)$. Temos que o conjunto $Q_k(n)$ é a união disjunta dos seguintes conjuntos

$$S = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in Q_k(n) | \lambda_k = 1\},$$

$$T = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in Q_k(n) | \lambda_k > 1\}.$$

A função $f : S \longrightarrow Q_{k-1}(n-1)$, dada por

$$f((\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}),$$

é uma bijeção cuja inversa satisfaz $f^{-1}((\mu_1, \ldots, \mu_{k-1})) = (\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, 1)$. Logo, $|S| = |Q_{k-1}(n-1)| = q_{k-1}(n-1)$. Por outro lado, a função $g : T \longrightarrow Q_k(n-k)$, dada por

$$g((\lambda_1, \ldots, \lambda_k)) = (\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_k - 1),$$

é uma bijeção cuja inversa satisfaz $g^{-1}((\mu_1,\ldots,\mu_k)) = (\mu_1+1,\ldots,\mu_k+1)$. Logo, $|T| = |Q_k(n-k)| = q_k(n-k)$. Portanto,

$$q_k(n) = |Q_k(n)| = |S| + |T| = q_{k-1}(n-1) + q_k(n-k).$$

$\square$

3.2 Funções geradoras

As funções geradoras estão entre as principais ferramentas utilizadas na solução de problemas de contagem. Quem começou a empregar essa técnica na teoria aditiva dos números foi Euler, porém ela teve origem em trabalhos de A. De Moivre (1667 - 1754). Uma **série de potências** é uma soma infinita da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, em que a_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots$, são números reais e x é uma variável. Dada uma sequência $(a_r)_{r\in\mathbb{N}}$, a **função geradora ordinária** para esta sequência é definida como a série de potências

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots .$$

Exemplo 3.5. *Pela definição de função geradora ordinária acima, vemos que a função dada por*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots,$$

é a função geradora para a sequência $a_r = 1$, para $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Sabemos que, para $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Quando consideramos expressões como $f(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$, sabemos do cálculo que estamos interessados na função definida por esta expressão e, portanto, nos importa o problema de sua convergência, isto é, quando $f(x)$ é finito. Desta forma não nos interessará os valores de x com $|x| \geq 1$. No nosso contexto de funções geradoras estamos interessados nos coeficientes e raramente *iremos atribuir valores para x, sendo assim vamos manipular essas séries sem nos preocuparmos com convergência. Implicitamente, estaremos sempre considerando* $|x| < 1$.

Conheceremos, a seguir, uma série de exemplos de funções geradoras para contar alguns exemplos de partições restritas, isto é, aquelas em que as partes possuem alguma propriedade especial, e partições irrestritas.

3.2.1 Função geradora para as partições de n em partes ímpares e distintas

Tomando o produto $(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)(1 + x^7) \cdots (1 + x^{2k+1}) \cdots$, podemos ver que o coeficiente de x^6 é igual a 1, que é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos. É fácil ver que a potência x^6 aparece como o produto de $x^5 \cdot x^1$. Note também que 11 só pode ser escrito como soma de ímpares distintos através do próprio número 11 e da soma $7 + 3 + 1$, por isso o coeficiente de x^{11} no produto acima é 2. Já o coeficiente de x^{14} é 3, pois obteremos x^{14} apenas quando se multiplica $x \cdot x^{13}$, $x^3 \cdot x^{11}$ e $x^5 \cdot x^9$. Desta forma vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} d_i(n)x^n,$$

em que $d_i(n)$ é o número de partições de n em partes ímpares distintas, ou seja,

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2k+1})$$

é a função geradora para $d_i(n)$.

3.2.2 Função geradora para partições de n em partes distintas

Tome o produto

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4) \cdots (1 + x^n) \cdots .$$

Tome agora como exemplo um número inteiro positivo que seja menor ou igual a 5. É claro que nenhuma parte deste número pode ser maior ou igual a 5 e se

tomarmos então o produto $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$ e considerarmos apenas as potências de $x \leq 5$ temos a função geradora para as partições de todos os números menores do que ou iguais a 5 em partes distintas. Como o produto acima é igual a $1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+\cdots$ podemos observar, por exemplo, que, como 3 é o coeficiente da potência x^5, existem 3 partições de 5 em partes distintas, que são: $5, 4+1, 3+2$. É fácil ver que os termos do tipo $(1+x^{n+1}), (1+x^{n+2}), \cdots$ não contribuem para as partições de n, com isso, para se encontrar o total de partições de n em partes distintas, basta considerarmos o produto finito $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)$.
Pela argumentação acima, podemos concluir que a função geradora para as partições de n em partes distintas é dada pelo produto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k). \tag{7}$$

3.2.3 Função geradora para partições de n em partes pares e distintas

Se estivermos interessados na função geradora das partições de n em partes pares e distintas devemos tomar o produto $(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1+x^{10})\cdots(1+x^{2k})\cdots$. Como na partição de um número menor do que ou igual a oito nunca teremos partes maiores do que 8, se tomarmos o produto

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)$$

e considerarmos apenas as potências de $x \leq 8$ teremos a função geradora para a partição de todos os números menores do que ou iguais a 8 em partes pares e distintas. É fácil ver que o produto acima é igual a

$$1+x^2+x^4+2x^6+2x^8+\cdots$$

e como exemplo podemos observar que o coeficiente de x^6 é 2 que representa a quantidade de partições de 6 em partes pares e distintas que são: 6 e $4+2$.

A partir desta argumentação e da função geradora (7) é fácil ver que a função geradora para partições de n em partes pares e distintas é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}).$$

3.2.4 Função geradora para partições de n em partes que são quadrados distintos

Se estivermos interessados na função geradora das partições de n em quadrados distintos devemos tomar o produto

$$(1+x)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ldots = 1+x+x^4+x^5+x^9+x^{10}+x^{13}+x^{14}+x^{16}+\ldots.$$

Desta forma por exemplo, podemos ver que entre os números de 1 a 16, somente oito possuem partições cujas partes são quadrados perfeitos.

A partir da mesma argumentação para a função geradora (7) e no que foi dito acima, vemos que, a função geradora para partições de n em partes que são quadrados distintos é

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{k^2}).$$

3.2.5 Função geradora para $p(n)$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots \\
&\vdots \\
\frac{1}{1-x^m} &= 1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+x^{4m}+\cdots,
\end{aligned}$$

daí,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots,$$

e com isso concluimos que as contribuições para os coeficientes de x^n vêm de um termo x^{a_1} da primeira série, de x^{2a_2} da segunda série, de x^{3a_3} da terceira, ..., de x^{ma_m} da m-ésima série, em que $a_i \geq 0$, para todo i. Como o produto destes termos resulta em x^n, temos que

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + ma_m = n.$$

Cada a_i deve ser representado como a soma de is que aparecem na partição de n, isto é, podemos expressar n da seguinte forma

$$n = 1 + \cdots + 1 + 2 + \cdots + 2 + \cdots + m + \cdots + m,$$

em que o número 1 aparece a_1 vezes, o número 2 aparece a_2 vezes e assim sucessivamente. Desta forma, cada partição de n vai contribuir com uma unidade para o coeficiente de x^n nesta expansão.

Como exemplo do que acabamos de expor, suponha que em cada uma das quatro primeiras séries, tenhamos tomado, respectivamente as seguintes potências de $x : x^4, x^6, x^6, x^{12}$.
Escrevamos estas potências da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^4 &= x^{1+1+1+1} \\ x^6 &= x^{2+2+2} \\ x^6 &= x^{3+3} \\ x^{12} &= x^{4+4+4}. \end{aligned}$$

Note que o produto das potências x acima resultam em x^{28} e com isso temos a seguite partição de 28 :

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Observe que o termo x^6 representa três 2 na segunda série e dois 3 na terceira série.

Assim, as séries acima estão sendo vistas como

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}=(1+x^1+x^{1+1}+\ldots)(1+x^2+x^{2+2}+\ldots)(1+x^3+x^{3+3}+\ldots)\ldots$$

A função $\dfrac{1}{1-x}$ “controla", portanto, a presença de partes 1, $\dfrac{1}{1-x^2}$ a presença de partes 2, $\dfrac{1}{1-x^3}$ a presença de partes 3,$\ldots$, $\dfrac{1}{1-x^m}$ a presença de partes $m.$ Isto prova, portanto, que

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^k}$$

é a função geradora para partições irrestritas. Se estivermos interessados na função geradora para as partições de n em que nenhuma parte supera m, basta tomarmos:

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-x^k}.$$

3.2.6 Função geradora de partições de n em partes ímpares

Mostraremos a seguir que a função geradora de partições de n em partes ímpares é dada por:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$$

Primeiro note que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

Substituindo x por x^3 e posteriormente por x^5 na equação acima temos, respectivamente,

$$\frac{1}{1-x^3}=1+x^3+x^6+x^9+\cdots$$
$$\frac{1}{1-x^5}=1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots.$$

A partir disto podemos escrever

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots.$$

Sabemos que o expoente n de x será obtido a partir da soma de um expoente da primeira série, outro da segunda e assim sucessivamente, sendo que na primeira série o expoente será um múltiplo de 1, na segunda um múltiplo de 3, na terceira um múltiplo de 5 e assim sucessivamente, daí

$$a_1+3a_2+5a_3+7a_4+\cdots+(2m-1)a_m=n,$$

que por sua vez podemos escrever

$$n=\underbrace{1+\cdots+1}_{a_1}+\underbrace{3+\cdots+3}_{a_2}+\cdots+\underbrace{2m-1+\cdots+2m-1}_{a_m}.$$

Assim, a série $\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$ está sendo vista da seguinte maneira

$$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}=(1+x+x^{1+1}+\cdots)(1+x^3+x^{3+3}+\cdots)(1+x^5+x^{5+5}+\cdots)\cdots$$

em que a função $\dfrac{1}{1-x}$ “controla", portanto, a presença de partes 1, $\dfrac{1}{1-x^3}$ a presença de partes 3, $\dfrac{1}{1-x^5}$ a presença de partes 5, ... , $\dfrac{1}{1-x^m}$ a presença de partes m, sendo m um número ímpar.

Portanto, a partição de n será dada a partir apenas de partes ímpares, já que o produto de x que resultará em x^n será formado apenas por potências de x com expoentes que são múltiplos de ímpares.

3.2.7 Função geradora de partições de n em partes pares

Mostraremos a seguir que a função geradora de partições de n em partes pares é dada por:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$$

Primeiro note que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Substituindo x por x^2, depois por x^4 e posteriormente por x^6 na equação acima temos, respectivamente,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x^6} = 1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + \cdots$$

A partir disto, podemos escrever

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2k}} = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots)(1 + x^6 + x^{12} + \cdots)\cdots.$$

Sabemos que o expoente n de x será obtido a partir da soma de um expoente da primeira série, outro da segunda e assim sucessivamente, sendo que na primeira série o expoente será um múltiplo de 2, na segunda um múltiplo de 4, na terceira um múltiplo de 6 e assim sucessivamente, daí

$$2a_1 + 4a_2 + 6a_3 + \cdots + (2m)a_m = n$$

que por sua vez escrevemos

$$n = \underbrace{2 + \cdots + 2}_{a_1} + \underbrace{4 + \cdots + 4}_{a_2} + \cdots + \underbrace{2m + \cdots + 2m}_{a_m}.$$

Assim, a série $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$ está sendo vista da seguinte maneira

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}} = (1+x^2+x^{2+2}+\cdots)(1+x^4+x^{4+4}+\cdots)(1+x^6+x^{6+6}+\cdots)\cdots$$

em que a função $\frac{1}{1-x^2}$ “controla", portanto, a presença de partes 2, $\frac{1}{1-x^4}$ a presença de partes 4, $\frac{1}{1-x^6}$ a presença de partes 6, $\dots$, $\frac{1}{1-x^m}$ a presença de partes m, sendo m um número par.

Portanto, a partição de n será dada apenas por partes pares, já que o produto de x que resultará em x^n será formado apenas por potências de x com expoentes múltiplos de pares.

Enquanto na Seção 3.1 utilizamos bijeções para mostrar que o número de partições de uma dada característica A era igual ao número de partições de uma dada característica B, aqui a nossa ferramenta será mostrar que as funções geradoras dos dois tipos de partições que estaremos comparando são iguais e consequentemente a quantidade dessas partições coincidirão. Na Seção 3.1 enunciamos e provamos uma das várias contribuições de Euler para a teoria das partições, o Teorema 3.3. Nossa demonstração foi através de bijeção. Apresentaremos agora o mesmo teorema, porém com uma demonstração utilizando funções geradoras.

Teorema 3.8. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Sabemos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares é igual a

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Daí, basta que mostremos que ambas as expressões são idênticas. Temos,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x^k)(1-x^k)}{1-x^k} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{2k}}{1-x^k} \\
&= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} \\
&= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\cdots} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.
\end{aligned}$$

□

Outro resultado que já apresentamos uma prova bijetiva, é o que segue no exemplo abaixo de mais uma utilização das funções geradoras.

Exemplo 3.6. *Todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências distintas de* 2*.*

De fato, pelos argumentos apresentados nesta seção, a função geradora para partições de n *em potências distintas de* 2 *é dada por*

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$$

e o coeficiente de x^n *da expanção deste produto nos fornece o número de maneiras de escrever* n *como soma de potências distintas de* 2*. Logo basta mostrarmos que o coeficiente de* x^n *é igual a* 1 *para todo* n*.*

Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^{+}x^{3} + x^{4} + \cdots$$

logo nos resta provar que

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^{2})(1+x^{4})(1+x^{8})\cdots(1+x^{2^{k}})\cdots .$$

Temos,

$$\begin{aligned}
(1-x)(1+x)(1+x^{2})(1+x^{4})\cdots &= (1-x^{2})(1+x^{2})(1+x^{4})\cdots \\
&= (1-x^{4})(1+x^{4})(1+x^{8})\cdots \\
&= (1-x^{8})(1+x^{8})(1+x^{16})\cdots \\
&= (1-x^{16})(1+x^{16})(1+x^{32})\cdots \\
&= 1,
\end{aligned}$$

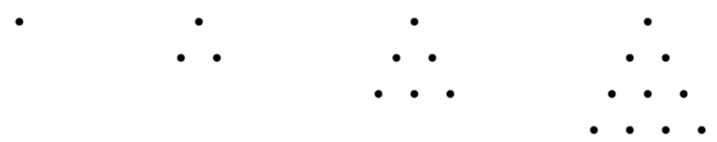
já que $|x| < 1$ *e conforme o exponente de* x *cresce seu valor se aproxima de* 0.

Uma prova bijetiva para o exemplo acima foi apresentada no Teorema 3.4.

4 Teoremas sobre números poligonais

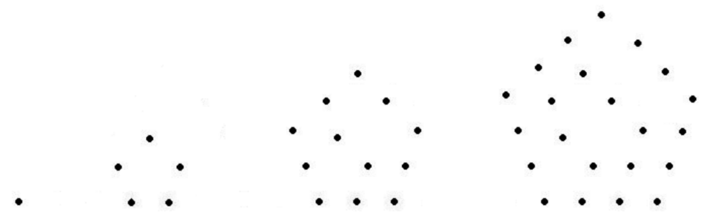
Elaborados pelos pitagóricos, os *números figurados* são números expressos como reunião de pontos numa determinada configuração geométrica, ou seja, um número é representado por uma quantidade de pontos que são agrupados em formas sugestivas. Deste números, os mais estudados têm sido os números poligonais, dos quais destacamos os triangulares e os pentagonais. A seguir, apresentamos dois importantes teoremas da teoria de partições de inteiros que envolvem estes números.

Definição 4.1. *Os* ***números triangulares*** *são* $1, 3, 6, 10, \ldots$, *referentes ao número de pontos nos triângulos em ordem crescente:*

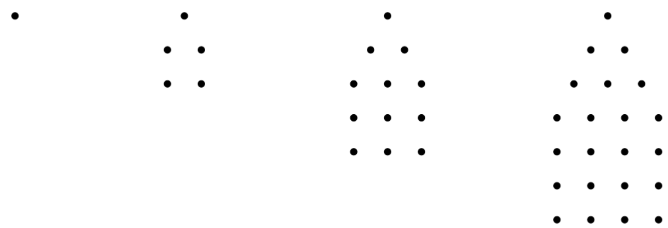


O j-ésimo número triangular é dado por $1 + 2 + 3 + \cdots + j = \dfrac{j(j+1)}{2}$. De maneira análoga, podemos definir os números pentagonais.

Definição 4.2. *Os números pentagonais são* $1, 5, 12, 22, \ldots$, *referentes ao número de pontos nos pentágonos abaixo:*



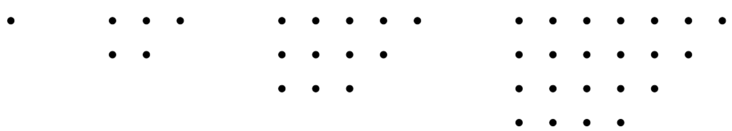
Vamos agora representar os números pentagonais da seguinte forma:



Desta forma, vemos que o j-ésimo número pentagonal consiste em um triângulo equilátero de lado j sobre um retângulo de lados j e $j - 1$, com isso, o j-ésimo número pentagonal é

$$\frac{j(j+1)}{2} + j(j-1) = \frac{j(3j-1)}{2}.$$

A partir da representação gráfica dos números pentagonais acima podemos obter gráficos de Ferrers de partições rotacionando os diagramas e alinhando suas linhas à esquerda:



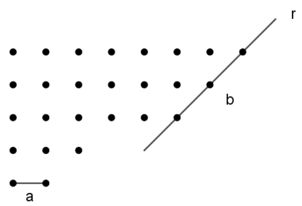
Teorema 4.1 (Teorema dos Números Pentagonais de Euler)**.**

$$p(n \mid \textit{número par de partes distintas}) = p(n \mid \textit{número ímpar de partes distintas}) + e(n),$$

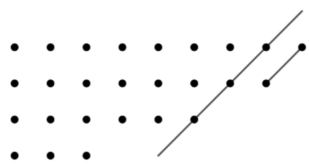
em que

$$e(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \textit{se} \quad n = \dfrac{j(3j \pm 1)}{2} \\ 0, & \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

Demonstração. Iremos agora construir uma bijeção entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas. Considere um Gráfico de Ferrers de uma partição de n em partes distintas. Vamos chamar de a a menor parte e de b, o número de pontos sobre a linha r mostrada na figura a seguir:

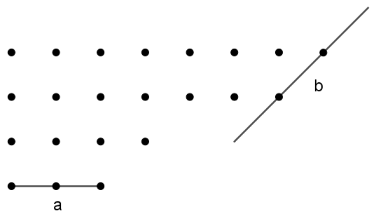


Se $a \leq b$, como na figura acima, removeremos os a pontos e os colocaremos paralelos a reta r de forma que ocupem as primeiras linhas do gráfico de Ferrers:

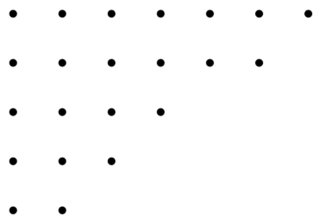


Feita tal mudança podemos observar que temos uma nova partição de n, possuindo partes distintas e representadas em ordem decrescente e com paridade diferente da anterior, ou seja, se o total de partes era par, agora é ímpar e se era ímpar, agora é par. Note também que, ainda que tivéssemos $a = b$ a mudança acima ainda teria sido possível.

Vejamos agora, um caso em que $a > b$. Considere o gráfico de Ferrers abaixo:

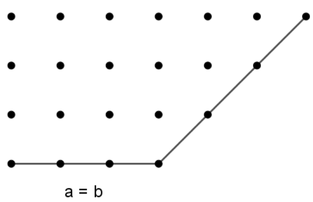


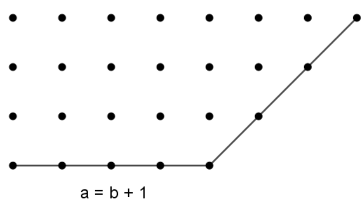
Neste caso podemos tomar os b pontos da linha r e colocá-los abaixo da parte de tamanho a, desta forma teremos uma nova partição com diferente pariedade. Feita tal alteração na partição continuaremos com uma partição em partes distintas e colocadas em ordem decrescente em seu gráfico de Ferrers.



Vemos que quando uma das transformações acima puder ser feita, teremos uma correspondência entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas. Porém, as duas transformações mostradas acima nem sempre podem ser feitas. Existem dois casos em que a linha r passa do último ponto da menor parte. Isso ocorre quando $a = b$ ou $a = b + 1$.

Com ajuda dos gráficos abaixo fica fácil ver que não podemos fazer nenhuma das transformações descritas até então, já que sempre que executada uma destas transformações, devemos ter partes distintas e dispostas em ordem decrescente.





Nas figuras acima temos

$$n = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a + (b-1)) = \frac{b(2a+b-1)}{2}.$$

Daí, no caso $a = b+1$ temos $n = \dfrac{b(3b+1)}{2}$, logo, se b que é o número de partes, for par, teremos

$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = 1$

e se b for ímpar

$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = -1,$

ou seja, teremos exatamente uma partição contendo um número par (ímpar) de partes distintas excedendo aquelas com um número ímpar (par) de partes distintas.

No caso em que $a = b$, teremos

$$n = \frac{b(3b-1)}{2}$$

e a mesma análise acima pode ser feita, ou seja,

$p(n \mid \text{número par de partes distintas}) - p(n \mid \text{número ímpar de partes distintas}) = (-1)^b,$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Vejamos agora um teorema envolvendo a função geradora para os números triangulares, que possui uma prova bijetiva semelhante à do Teorema dos Números Pentagonais apresentada acima e dada por F. Flanklin em 1881.

Teorema 4.2. *Para* $|q| < 1$

$$1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \qquad (8)$$

Observe que, a soma do lado esquerdo da equação acima gera partições em que as partes são maiores do que 1, as partes pares são distintas, a maior parte é ímpar e tendo um peso associado dado por $(-1)^m$ em que m é o número de partes pares. Além disso, é facil ver que os expoentes do lado direito da equação acima são os números triangulares. Note que a equação abaixo é equivalente a Equação (8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{9}$$

Temos como objetivo para provarmos a equação acima, mostrar que os coeficientes de q^n do lado esquerdo são iguais a 1 se n é um número triangular e 0, caso contrário. Em outras palavras, é equivalente mostrar que, se $p_e(n)$ denota o número de partições de n geradas pelo lado esquerdo de (9) tendo um número par de partes pares e $p_o(n)$ denota o número de partições de n geradas pelo lado esquerdo de (9) tendo um número ímpar de partes pares, então devemos mostrar que

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} 1, \text{se} \quad n \quad \text{é um número triangular} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{10}$$

De fato, se $P(n)$ denota o conjunto das partições de n em partes maiores do que 1, tendo todas as partes pares distintas e a maior parte ímpar, então

$$|P(n)| = p_e(n) + p_o(n).$$

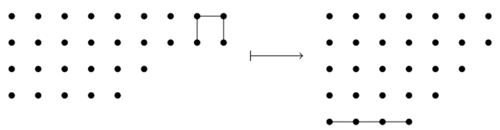
A ideia utilizada na demonstração a seguir é mostrar que, dada uma partição de n contada em $p_e(n)$ obtemos uma correspondente contada em $p_o(n)$ e vice-versa, para todos os valores de n exceto se n for um número triangular.

Se n não é um número triangular, existe uma bijeção entre o conjunto de partições contado por $p_e(n)$ e o conjunto de partições de n contado por $p_o(n)$, daí $p_e(n) - p_o(n) = 0$.

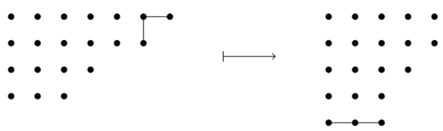
No caso de n ser um número triangular, existe uma partição contada em $p_e(n)$ que não tem correspondente contada por $p_o(n)$, daí, $p_e(n) - p_o(n) = 1$.

Demonstração. Definamos em $P(n)$ a seguinte transformação: dada uma partição $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s \in P(n)$ consideramos seu gráfico de Ferrers e removamos as duas últimas colunas para formarmos uma nova parte λ_{s+1}. Com isso ficamos com uma partição $\lambda' = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s$ de $n - \lambda_{s+1}$.

Posteriormente, inserimos esta nova parte abaixo da menor parte de λ' quando $\lambda_{s+1} \leq \lambda'_s$ e λ'_s é ímpar ou $\lambda_{s+1} < \lambda'_s$ e λ'_s é par, resultando na partição $\lambda'' = \lambda'_1 + \cdots + \lambda'_s + \lambda_{s+1} \in P(n)$. Como exemplo:

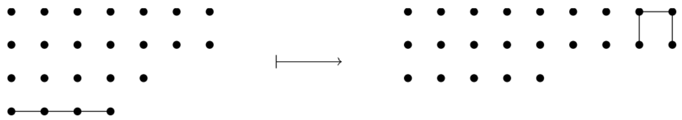


e



Se por acaso $\lambda_{s+1} > \lambda'_s$ ou $\lambda_{s+1} = \lambda'_s$ e λ'_s é par não podemos realizar a operação acima a fim de termos uma nova partição em $P(n)$. Quando isso acontece, removemos a menor parte λ_s de λ para formarmos duas colunas para adicionarmos ao gráfico de Ferrers da partição $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{s-1}$, em que serão iguais quando λ_s é par ou que diferem por 1 quando λ_s é ímpar. Podemos observar que a nova partição formada a partir desta operação está em $P(n)$, já que todas suas partes continuarão sendo maiores do que 1, pois a menor parte retirada é maior que 1 e o gráfico de Ferrers tem suas partes dispostas em ordem não crescente, todas as partes pares são distintas já que eram distintas antes e agora foram somadas mais duas unidades quando λ_s é par ou então se torna uma parte ímpar se for somada apenas uma unidade e a maior parte continua ímpar ja que resultará da soma de uma parte ímpar com uma parte 2. Como exemplo:

e



Observe que, quando n é um número triangular, ou seja, tem forma $n = \dfrac{k(k+1)}{2}$, nenhuma das duas operações definidas acima podem ser aplicadas aquela partição em $P(n)$ tendo $\dfrac{k}{2}$ partes $k+1$, quando k é par ou $\dfrac{k+1}{2}$, se k é ímpar.

De fato, se removermos as duas últimas colunas da partição que tem $\dfrac{k}{2}$ partes $k+1$, quando k é par, a nova parte terá tamanho $2\dfrac{k}{2} = k$ e, consequentemente, não podemos colocá-la abaixo da menor parte $k+1-2 = k-1$. Inversamente, removendo a menor parte, cujo tamanho é $k+1$, não podemos colocar as duas novas colunas obtidas, uma tendo tamanho $\dfrac{k}{2}+1$ e a outra $\dfrac{k}{2}$, em frete a última coluna, que tem tamanho $\dfrac{k}{2}-1$, da partição com a menor parte removida.

Se removermos as duas últimas colunas da partição que tem $\dfrac{k+1}{2}$ partes k, quando k é ímpar, a nova parte terá tamanho $2\dfrac{k+1}{2} = k+1$ e , consequentemente, não podemos colocá-la abaixo da menor parte $k-2$. Inversamente, removendo a menor parte, cujo tamanho é k, não podemos colocar as duas novas colunas obtidas, a maior tendo tamanho $\dfrac{k+1}{2}$, em frente a última coluna, que tem tamanho $\dfrac{k-1}{2}$ da partição com a menor parte removida.

Por exemplo, não podemos aplicar nenhuma das duas operações nas partições de 6 em que $k=3$ e 10 em que $k=4$ abaixo:

Para concluirmos a demonstração, basta mostrarmos que as transformações descritas acima, quando aplicadas, mudam a paridade do número de partes pares. Feito isso, teremos mostrado que (10) é válida. Para aquelas partições em $P(n)$ nas quais podemos remover as duas últimas colunas do gráfico de Ferrers, temos duas possibilidades: se as colunas têm o mesmo tamanho, não modificamos o número de partes ímpares e a nova parte terá tamanho par, o que modifica a paridade do número de partes pares; se as colunas diferem por 1 perdemos uma parte par e obtemos uma parte ímpar como nova parte modificando a paridade do número de partes pares. Estes argumentos podem ser facilmente invertidos para mostrar que a outra transformação também modifica a paridade do número de partes pares.

$\square$

5 Conclusão

É interessante ver como a matemática está ligada a inúmeros momentos da nossa vida e traz explicações para tantos feitos ou ocorrências, como por exemplo, a sequência de Fibonacci e suas diversas aparições em padrões na natureza e em outras áreas da matemática. Além disso, chama a atenção o fato de que, para muitas das demonstrações sobre partições de inteiros uma importante técnica utilizada, baseia-se em conceitos simples de matemática básica, como o de função bijetora, mas que por muitas vezes não é tão simples encontarmos essa tal bijeção entre dois conjuntos. Outro ponto, é o fato de como o recurso visual, a partir dos gráficos de Ferres, nos permitem fazer com que as demonstrações analíticas se tornem menos extensas e mais compreensíveis.

Até aqui ficou evidente a importância dos estudos de nomes como Euler, Ramanujan e Hardy para o desenvolvimento da área. Entretanto, também ficou claro o quanto ela ainda deve ser desenvolvida, haja visto que muitos problemas ainda estão sem respostas, como por exemplo a obtenção de uma prova bijetiva para as identidades de Rogers-Ramanujan. Um caminho natural para prosseguimento do trabalho é analisar mais detalhadamente as novas representações de partições que vêm surgindo, em especial, a representação matricial. E tentar utilizar essa representação em provas bijetivas e/ou usando funções geradoras para obter novas identidades dentro da teoria.

Em 2011, Santos, Mondek e Ribeiro, [6] apresentaram uma nova maneira de estudarmos partições de inteiros, utilizando matrizes de duas linhas, exibindo duas diferentes representações matriciais para partições irrestritas, uma delas fornecendo uma descrição para a partição conjugada. Essa nova maneira de descrever as partições tornou-se objeto de estudo de alguns matemáticos. Em 2010, Brietzke, Santos e Silva, [1], que já tinham conhecimento dos resultados obtidos em [6], ainda que este trabalho fosse ser publicado posteriormente, obtiveram provas bijetivas de partições utilizando a nova representação por matrizes. E em 2016, em sua tese de doutorado, Wagner, [8], apresenta novos resultados dentro da teoria, utilizando as matrizes de duas linhas. Novas pesquisas na área foram impulsionadas por essa nova descrição de partições, como o trabalho de Santos e Matte em [5].

Esse grande número de referências atuais dentro da teoria nos faz acreditar que o engajamento em tal estudo é promissor e pode ajudar a desenvolver não só a teoria por si só, mas como outras áreas da matemática e da matemática aplicada.

Referências

[1] Eduardo H.M. Brietzke, José Plínio de Oliveira Santos, and Robson da Silva. Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions. *The Ramanujan Journal*, 23:265–295, 2010.

[2] Jan Hendrick Bruinier and Ken Ono. Algebraic formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak maass forms. *Advances in Mathematics*, 246:198–219, 2013.

[3] José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. 3. edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2018.

[4] José Plínio de Oliveira Santos and Robson da Silva. *Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos Números*. 1. Colóquio de Matemática da Região Sul, UFSM, Santa Maria, RS, 2010.

[5] José Plínio de Oliveira Santos and Marília Luiza Matte. A new approach to integer partitions. *Bull Braz Math Soc, New Series*, 49:811–847, 2018.

[6] José Plínio de Oliveira Santos, Paulo Mondek, and Andréia C. Ribeiro. New two-line arrays representing partitions. *Annals of Combinatorics*, 15:341–354, 2011.

[7] Nicolau Saldanha, Carlos Gustavo Moreira, Eduardo Tengan, and Fabio Brochero Martinez. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 5. edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2018.

[8] Adriana Wagner. *Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por meio da Representação Matricial*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2016.