
Modelos de crescimento populacional considerando efeitos sazonais em sistemas no limiar da extinção: uma investigação numérica

Erick dos Santos Silva

Instituto Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brazil

ssf.erick@gmail.com

Joselaine Maria dos Santos

Instituto Federal de Mato Grosso, MT, Brazil

joselainemariadossantos@gmail.com

Paulo Sérgio Lopes da Silva

Instituto Federal de Mato Grosso, MT, Brazil

paulo.silva@jna.ifmt.edu.br

Resumo

O trabalho estuda um modelo de crescimento sazonal a partir de uma investigação numérica. Utilizamos um problema de valor inicial (PVI) útil para a descrição da periodicidade de sistemas populacionais, avaliando como os parâmetros constituintes do modelo afetam a periodicidade dos sistemas estudados, o que permite avaliar seu domínio de validade. Apresentamos a solução analítica do problema de valor inicial tomado por base em nossa investigação (PVI estruturante), seguindo posteriormente para a avaliação numérica dos parâmetros constituintes e de algumas variações imediatas do modelo básico. Mostramos também que o limite de validade do PVI estruturante, na modelagem de crescimento populacionais, revela-se independente da normalização admitida. Esse último fato costuma ser negligenciado em textos consagrados e amplamente adotados em cursos regulares de graduação, por exemplo.

Palavras-chave

Dinâmica populacional. Efeitos sazonais. Investigação numérica.

1 Introdução

Analisamos a descrição de sistemas populacionais, com variações de natureza sazonal, por meio de um Problema de Valor Inicial (PVI), estudando também o domínio de validade associado a este modelo [1]. Sinteticamente, pode-se dizer que o PVI norteador insere termos periódicos nas equações diferenciais descritivas buscando caracterizar as variações periódicas ou sazonais [2] [3].

O objetivo principal é estudar numericamente como alguns sistemas protótipos podem ser descritos pelo PVI norteador ou estruturante – denominado assim pelo

fato de ser um modelo de partida útil, que permite ligeiras modificações para a modelagem de situações análogas. Estamos estudando algumas dessas variações, mas por questão de organização/síntese de ideias relegamos essa exposição para um trabalho futuro.

Conforme vamos apontar na sequência, o PVI estruturante permite descrever sistemas populacionais dentro de certas normalizações, mas seu domínio de validade é independente das normalizações consideradas.

Por fim, é interessante destacar que diversos fenômenos naturais apresentam variações de natureza sazonal. Existem ocorrências climáticas, fases da lua, ciclos econômicos, entre outros episódios naturais/sociais, onde é possível observar regularidades associadas ao fenômeno. Essas variações podem ser atreladas a estados ou estações, que costumam se repetir após certo período de tempo. Tais fenômenos podem ser denominados como sazonais. Nessa perspectiva, mostraremos como essas regulares podem ser descritas para intervalos padronizados de tempo, mas explicitando o limite de validade do modelo. No presente texto, chamaremos os eventos regulares mencionados de sazonais e, as equações descritivas, de equações sazonais. Por associação, os efeitos de repetição envolvidos serão chamados de efeitos sazonais.

2 Estrutura de análise e proposta investigativa

2.1 O problema norteador

A investigação proposta toma por base o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI) norteador [1] [3]:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP \cos(rt - \phi), \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (1)$$

cuja aplicação em sistemas populacionais típicos foi realizada. Basicamente, temos uma equação que modela a evolução temporal de uma população $P(t)$, com valor inicial $P(0) = P_0$, onde P_0 é um valor conhecido. Em relação ao fator sazonal, o modelo acima considera um termo trigonométrico do tipo $\cos f(t)$ para inserir

uma característica periódica na descrição, que pode ser mais ou menos explícita, dependendo dos valores assumidos pelos parâmetros estruturais – conforme destacaremos na sequência. A inserção da periodicidade por meio da estrutura acima (entre outras possíveis) é suficiente para a discussão deste trabalho. Vale destacar que o PVI estruturante acima associa-se a um domínio de validade que explicitaremos no trabalho, em conexão com a dinâmica de populações.

2.2 Estudo analítico do problema norteador

A solução analítica associada ao PVI (1) pode ser obtida de forma relativamente simples. Considere, inicialmente, a mudança de variáveis $u = rt - \phi$ que permite escrever:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP \cos(u). \tag{2}$$

Observe que:

$$du = r dt \tag{3}$$

bastando considerar a derivada de u em relação ao tempo t . Em seguida, podemos separar as variáveis na forma:

$$\frac{dP(t)}{P} = \frac{k}{r} \cos(u) du. \tag{4}$$

cuja integração:

$$\int \frac{dP(t)}{P} = \frac{k}{r} \int \cos(u) du \tag{5}$$

nos conduz a:

$$\ln |P| = \frac{k}{r} \sin(u) + C. \tag{6}$$

Retornando, então, à variável t , segue:

$$\ln |P| = \frac{k}{r} \sin(rt - \phi) + C. \tag{7}$$

Por fim, considerando $P(0) = P_0$, chegamos a:

$$\ln |P_0| = \frac{k}{r} \sin(\phi) + C, \tag{8}$$

resultado este que, substituído em (7), fornece:

$$\ln |P| = \frac{k}{r} \sin(rt - \phi) + \ln |P_0| + \frac{k}{r} \sin(\phi) \quad (9)$$

ou ainda,

$$\ln |P| - \ln |P_0| = \frac{k}{r} \sin(rt - \phi) + \frac{k}{r} \sin(\phi) \quad (10)$$

que escrito em termos de exponenciais toma a forma:

$$e^{\ln \frac{P}{P_0}} = e^{\frac{k}{r} \sin(rt - \phi) + \frac{k}{r} \sin(\phi)} \quad (11)$$

ou seja,

$$\frac{P}{P_0} = e^{\frac{k}{r} [\sin(rt - \phi) + \sin(\phi)]}. \quad (12)$$

Isolando P na equação anterior, obtem-se:

$$P = P_0 e^{\frac{k}{r} [\sin(rt - \phi) + \sin(\phi)]} \quad (13)$$

que representa a solução analítica do problema (1).

3 Implementando a proposta investigativa

3.1 Estudo numérico do problema norteador

Passemos agora à investigação numérica do problema. O objetivo dessa investigação é verificar como a variação dos parâmetros constituintes afetam a periodicidade, conduzindo essa sistematização para outros casos de interesse. Sendo assim, iniciemos a análise envolvendo os parâmetros estruturantes k , r e ϕ . Toda a investigação foi realizada com o software Máxima [4].

Vale destacar que análise qualitativa de um modelo descrito por equações diferenciais, via campos de direção, é de grande utilidade para a investigação científica. Na sequência, vamos utilizar esse procedimento para investigar numericamente o problema norteador (1).

Para fins de análise, sistematizamos nossas investigações assumindo uma normalização da população. A estratégia de normalização consistiu em avaliar

a transição de um regime sazonal observado em um instante t_1 para um instante posterior t_2 onde tal sazonalidade é quebrada, considerando um conjunto de valores representativos para uma população genérica inicial P_0 . Estamos interessados em sistematizar essa transição entre sazonalidade e sua quebra, olhando para a validade do modelo na descrição periódica nos intervalos de tempo próprios associados, também normalizados em nosso estudo. Vale destacar que a normalização pode ser modificada a partir dos parâmetros implicados pelo problema, mas o procedimento global de investigação que sistematizamos continua o mesmo.

A Fig.1a está associada ao modelo de crescimento populacional formatado em (1). Para valores de $k = r = \phi = 1$, observamos que o efeito sazonal é mantido em torno do domínio investigado. Contudo, existiria uma espécie de estabilidade sazonal para um domínio mais amplo? A Fig.1b, por exemplo, apresenta o campo de direções para as variáveis normalizadas em 100, ou seja, neste caso: $k = r = \phi = 100$. De fato, a sazonalidade não pode ser percebida no intervalo investigado por meio dos campos de direção, o que pode ser alinhado a uma quebra de sazonalidade para o domínio investigado. Estamos omitindo as linhas contínuas nos campos estritamente verticais.

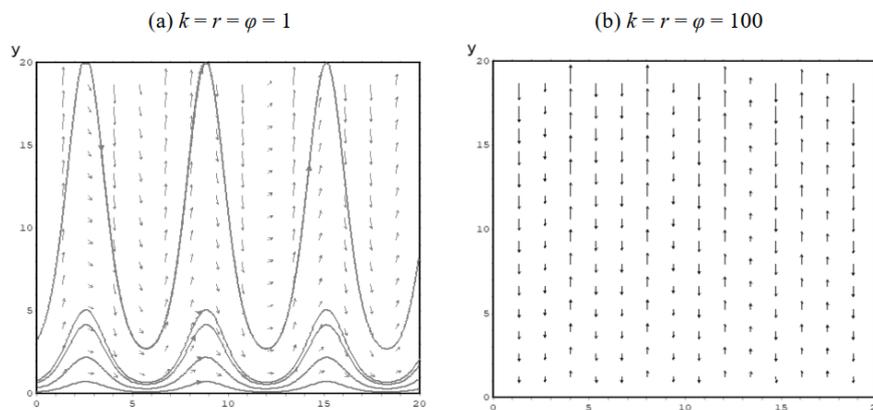


Figura 1: Soluções da equação para a normalização admitida.

Em seguida, vamos estudar o efeito da variável k no modelo normalizado formatado. Vamos inicialmente manter r e ϕ unitários ($r = \phi = 1$) e variar a constante k . Observe que $k = 0$ torna o campo de direções trivial, não fornecendo informação mais especial sobre o comportamento temporal da população. Contudo,

aumentando os valores de k , percebemos uma rápida mudança nos campos de direção, não sendo possível observar efeitos sazonais quando $k = 50$ (Fig.2).

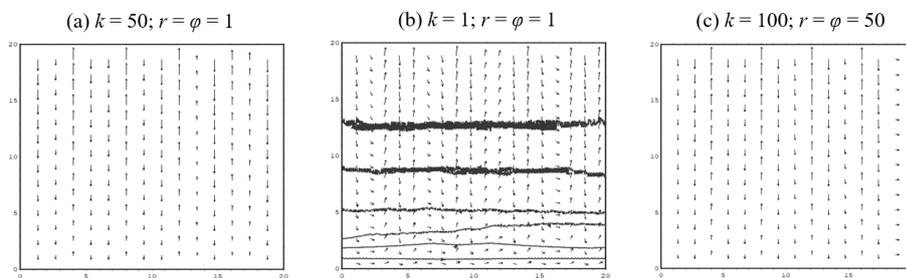


Figura 2: Soluções da equação (1) para a normalização admitida.

Passemos, agora, à investigação do parâmetro r . De forma análoga, comecemos pelo aumento de r a partir de zero. Quando $r = 0$, podemos observar uma rápida mudança dos campos de direção, que passam de uma inclinação praticamente nula nos instantes iniciais para uma inclinação mais pronunciada em seguida, considerando as mesmas normalizações anteriormente admitidas (Fig.3).

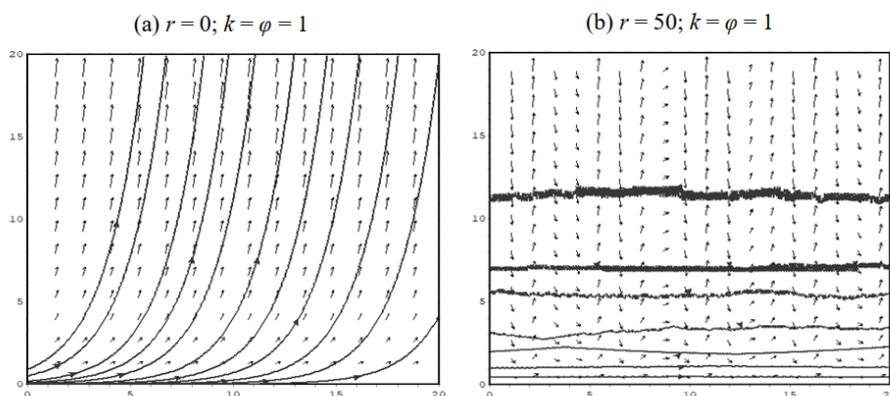


Figura 3: Solução da equação (1) para a normalização admitida com r igual a 0 e 50, respectivamente.

Quando r assume valores maiores, observamos uma redução no período apresentado pelas curvas de campo, levando-as a variações mais suáveis no domínio investigado (Fig.3).

A próxima figura (Fig.4) apresenta a análise relativa à constante ϕ . Mantendo

toda a normalização anterior, percebemos que a constante altera ligeiramente o campo de direções, mas não afeta o perfil periódico do modelo. As figuras abaixo revelam os casos $\phi = 0$ e $\phi = 100$, mantendo unitários os parâmetros k e r (Fig.4).

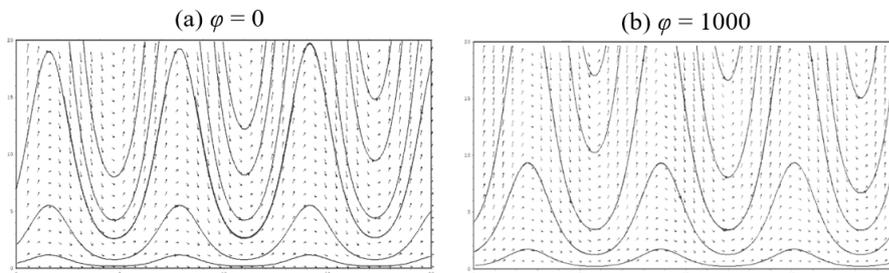


Figura 4: Solução da equação (1) para dois valores diferentes de ϕ .

3.2 Variantes do problema norteador

Existem dois variantes que podem ser considerados como decorrentes diretos da análise anterior. Por exemplo, considerando-se um termo trigonométrico descritivo do tipo seno:

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP \sin(rt - \phi) \tag{14}$$

obtemos campos de direção que guardam semelhança com o modelo de PVI (1). A Fig.5 resume os resultados para a janela normalizada investigada (Fig.5). Os casos apresentados pelas figuras 5a, 5b, 5c e 5d são os análogos das figuras 1a, 1b, 3a e 4a.

Percebe-se que o comportamento global do sistema é mantido, bem como os regimes de quebra de sazonalidade. A inserção do termo do tipo “seno” altera ligeiramente o comportamento na janela investigada, mas mantém as propriedades gerais associadas ao problema (1). De fato, podemos relacionar seno e cosseno por meio da expressão:

$$\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \tag{15}$$

o que justifica o resultado anterior.

Outro análogo mais complexo poderia ser construído a partir da soma entre os

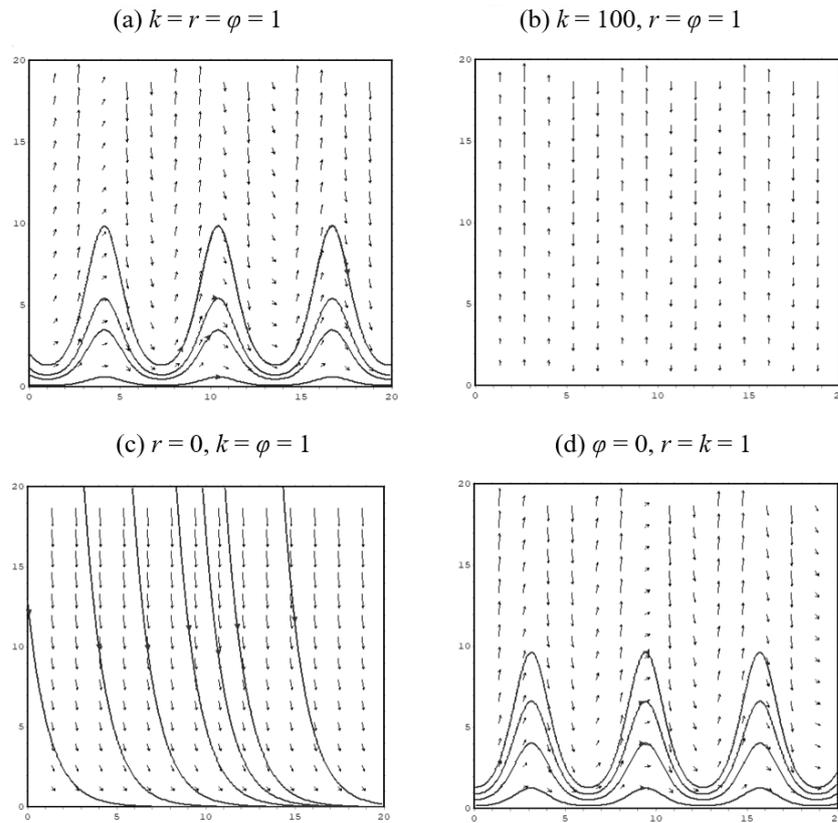


Figura 5: Campos de direção associados ao modelo formatado em (14).

termos trigonométricos seno e cosseno. Somando as equações dos modelos (1) e (14) obtém-se:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P [A \cos(Bt - C) + D \sin(Et - F)]. \quad (16)$$

Na sequência (Fig.6) encontram-se dois campos de direção sazonais associados ao modelo (16).

Quando consideramos a equação (16), construída a partir de uma soma de termos periódicos, obtemos uma nova periodicidade nos campos de direções para a normalização inicial (Fig.6). Obviamente, as intensidades relativas dos efeitos inseridos por A, B, C, D e F devem ser consideradas para a obtenção de uma descrição precisa do efeito de crescimento modelado. No caso da Fig.6a a

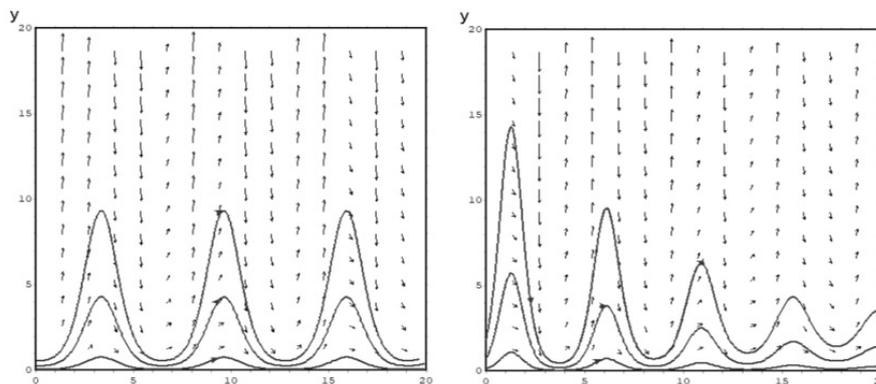


Figura 6: Campos de direções associados à equação (16).

intensidade relativa $D/A \rightarrow 0$, enquanto na Fig.6b conseguimos perceber uma ligeira mudança considerando os valores $A = 1,81, B = 1,25, C = 1,27, D = 2,45, E = 1,13$ e $F = 4,04$. Contudo, não vamos prosseguir em tal análise, pois ela foge do objetivo inicial deste trabalho [5] [6].

De fato, a busca de diversas variantes pode ser realizada seguindo os procedimentos anteriores. Propomos uma modificação na estrutura básica do PVI estruturante, e, avaliamos os supostos efeitos oriundos de tal modificação. Essa estratégia pode aumentar as possibilidades descritivas em alguns casos, mas um estudo exaustivo nessa perspectiva foge do escopo deste texto [5] [6].

4 Modelagem de três sistemas com características sazonais

4.1 PVI estruturante e sistema sazonal típico

Considere a evolução populacional abaixo que supostamente apresenta uma característica sazonal, denominado sistema S_1 . Tal sistema pode ser gerado aleatoriamente e distribuído em um gráfico evolutivo $P(t)$, conforme indicado na Fig.7. Vale destacar que a geração pode ser realizada considerando uma relação de construção que admita ciclos de aumento e diminuição da população, dentro de limites superiores e inferiores adequados, além de se exigir que o termo P_{n+1} , sucessor de P_n , aumente/diminua lentamente entre os limites considerados.

O sistema S_1 anterior pode ser descrito aproximadamente por um sistema

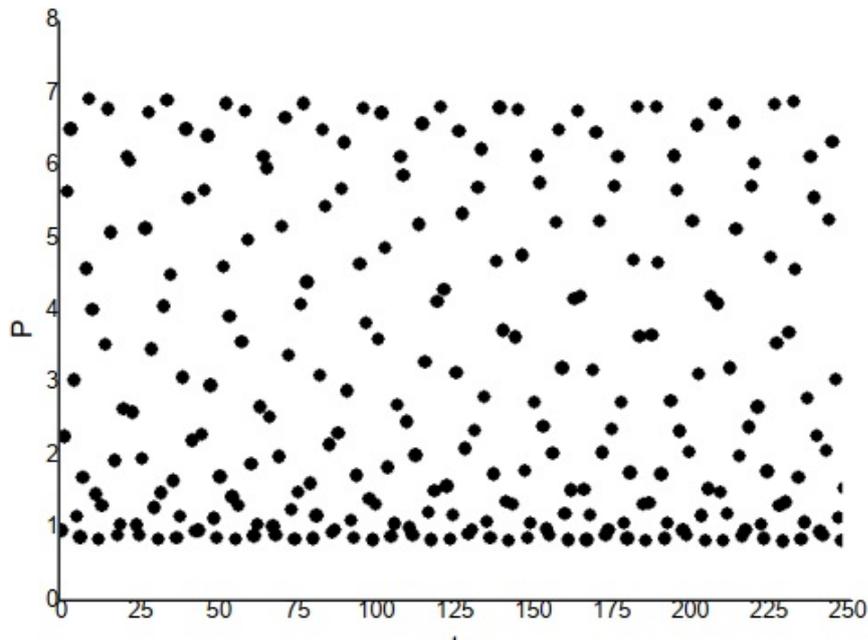


Figura 7: População com variação periódica a ser modelada.

modelo (P_0, k, r, ϕ) , com normalização $(P_0, k, r, \phi) = (1, 1, 1; 0, 01)$, evoluindo para o intervalo de tempo considerado entre $t =]0, 250[$, em certa unidade de interesse (Fig.8).

4.2 PVI estruturante e sistemas no limiar da extinção

Por fim, passemos agora à modelagem de dois sistemas com diferentes intensidades do efeito sazonal, denominados sistemas S_2 e S_3 . Os sistemas foram gerados a partir de uma perturbação aleatória considerada na solução formal do problema (1). Na sequência, ajustamos os parâmetros do PVI (1) ao conjunto de dados, visando obter um modelo descritivo analítico. A partir daí, selecionamos dois sistemas, compatíveis com nossa normalização, a partir dos diferentes graus de sazonalidade apresentados. Na Fig.9 apresentamos os sistemas e o modelo descritivo associado – representado pela linha contínua.

Conforme podemos perceber, o primeiro sistema S_2 (Fig.9a) apresenta uma oscilação periódica que rapidamente finda, caracterizando uma tendência rápida

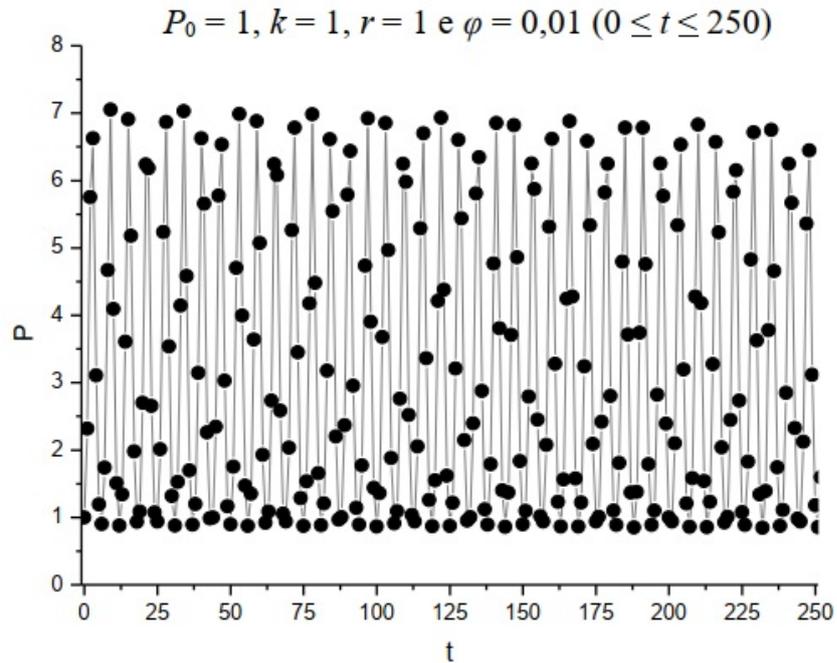


Figura 8: População S_1 com variação periódica e modelo descritivo construído a partir do PVI (1).

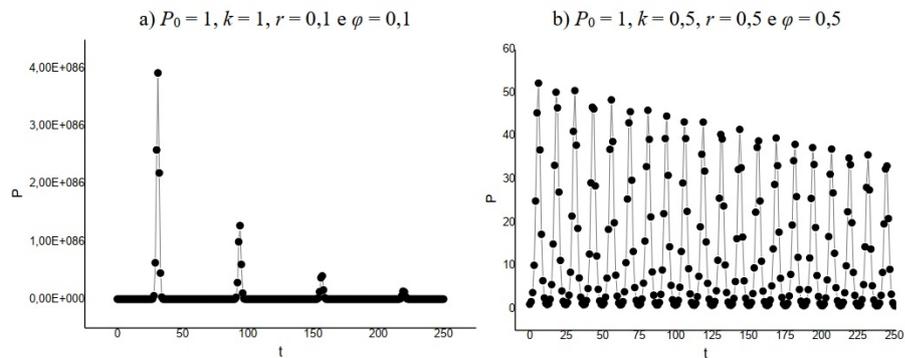


Figura 9: Aplicação do modelo a dois sistemas periódicos S_2 e S_3 com diferentes características sazonais para o intervalo $0 < t < 250$, em unidades do modelo normalizado.

de extinção. Já no sistema S_3 , podemos observar uma oscilação mais pronunciada (Fig.9b), que revela uma diminuição mais suave em amplitude, também compatível com um cenário de extinção, mas em longo prazo.

5 Limite de validade e populações no limiar da extinção

Na seção anterior, investigou-se os efeitos sazonais associados a variações periódicas regulares para certos intervalos de tempo, em um dado domínio de interesse. Contudo, tal análise não explicita o futuro da população para além do domínio investigado. Digamos que exista interesse para o comportamento da população associada a intervalos de tempo relativamente grandes, ou seja, para $t \rightarrow \infty$. Não é difícil encontrarmos, nos principais manuais de cálculo, tal situação negligenciada.

De fato, dependendo do intervalo analisado, o modelo de PVI (1) pode ser utilizado para descrever as características periódicas em diferentes intensidades, ou seja, mais ou menos brandas para um dado intervalo de interesse. Contudo, os sistemas modelados pelo PVI (1) apresentam um fato comum de longo prazo: eles tendem à extinção. Em termos práticos, o modelo descritivo está associado a uma população nula, quando $t \rightarrow \infty$. Podemos dizer, então, que a população modelada está no limiar da extinção.

Caso nada mude, o modelo indica que a população definhará. Podemos explicitar essa característica do modelo retomando o sistema típico S_1 da seção anterior, descrito aproximadamente pelo PVI (1). Apesar de uma descrição relativamente precisa do sistema sazonal para intervalos da ordem de 250 unidades de tempo, na normalização admitida, o modelo revela uma diminuição em amplitude de longo prazo (Fig.10), o que é compatível com o cenário de extinção sinalizado anteriormente. Dito em outras palavras, o sistema descreve a periodicidade da população apresentada, mas essa descrição limita-se ao intervalo de tempo investigado. Na figura apresentamos o modelo para tempos da ordem de 10^3 nas unidades normalizadas.

Dessa forma, o modelo prevê um declínio populacional no tempo, independente da intensidade do efeito sazonal. Como este efeito pode ter intensidade variada, isso pode mascarar a tendência de extinção populacional. Esse fato costuma ser negligenciado em alguns manuais didáticos clássicos, que não apresentam, obviamente, o interesse sistemático discutido anteriormente.

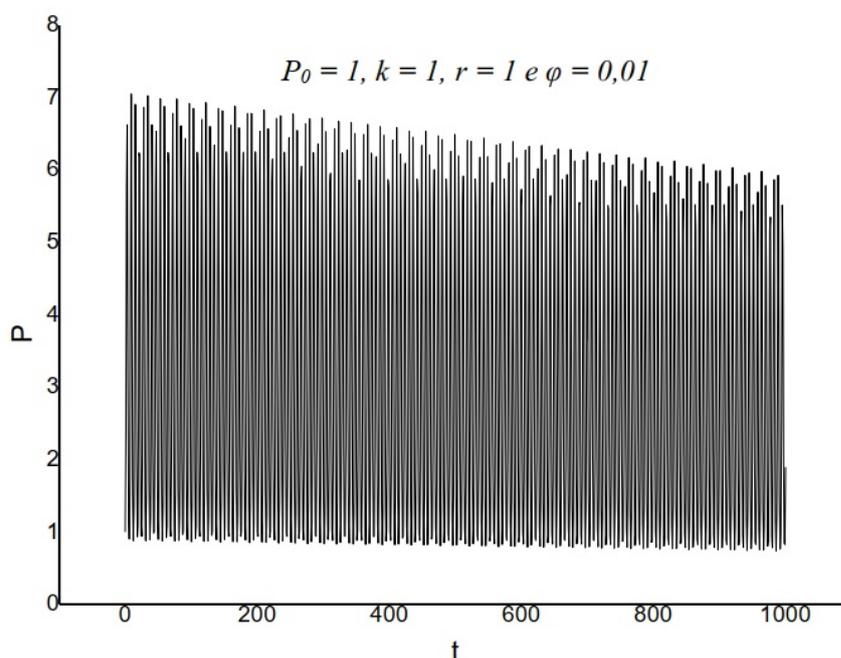


Figura 10: Modelo descritivo do sistema S_1 extrapolado para tempos da ordem de 10^3 unidades.

6 Considerações finais

O trabalho investigou um modelo de PVI para a descrição de efeitos sazonais, apresentando uma investigação adaptável para a análise de variantes mais complexos e sua associação com a modelagem de populações no limiar de extinção. Além de descrevermos detalhadamente a solução analítica do problema estruturante formatado, implementamos uma investigação numérica do problema, útil para a investigação de variantes e outros casos dinâmicos sazonais de interesse. Ainda dentro dessa perspectiva, justificamos como o modelo serve para a descrição de efeitos sazonais, não negligenciando o fato de que os sistemas modelados estão no limiar de extinção. Uma investigação futura associa-se ao estudo dos efeitos sazonais fora do limiar de extinção evidenciado. Por fim, vale destacar que o sistema dinâmico representado pelo conjunto de equações (1), juntamente com os procedimentos sistematizados neste texto, revela uma possibilidade interessante e direta para investigação de equações periódicas semelhantes, sobretudo aquelas pouco exploradas nos manuais didáticos clássicos.

Referências

- [1] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- [2] J. A. R. Cunha, L. Candido, F. A. Oliveira, and A. L. A. Penna. Evolução dos processos físicos nos modelos de dinâmica de populações. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39(3):97–111, 2017.
- [3] J. Stewart. *Cálculo: Volume II*. 5ª Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [4] Máxima. Site do máxima, 2019. Último acesso em: 01 dez 2019.
- [5] E. S. Silva and A. R. Lima. Bifurcação no problema da coluna de euler: uma mudança na estrutura topológica do espaço de fases associada à simetria do sistema físico. In J. B. de Moura and H. C. Teles, editors, *Sobre ensino de Física e Matemática: Experiências docentes no IFMT*. Editora espaço acadêmico, Mato Grosso, 2018.
- [6] E. S. Silva. Modelagem de crescimento populacional por equações de diferenças: estabilidade local, bifurcação e discussão de um efeito particular de predação. *Revista de Matemática da UFOP*, 1(2):51–66, 2020.