As generalizações das formas matriciais e dos quatérnios da sequência de Mersenne

Milena Carolina dos Santos Mangueira milenacarolina24@gmail.com
Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Renata Passos Machado Vieira re.passosm@gmail.com
Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Francisco Régis Vieira Alves fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Paula Maria Machado Cruz Catarino pcatarino23@gmail.com
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, VRL, Portugal

Resumo

Neste trabalho serão investigadas as matrizes geradoras da sequência de Mersenne com índices correspondentes aos inteiros positivos, bem como a generalização de sua forma matricial de ordem 2×2 e será realizada a extensão para as matrizes com índices negativos. E ainda, serão apresentadas propriedades inerentes a essas matrizes. Por fim, serão apresentadas algumas definições a respeito dos quatérnios de Mersenne, a fórmula variante de Binet, função geradora, a sua extensão para índices inteiros negativos e identidades clássicas, tais como: Cassini, Catalan e d'Ocagene.

Palavras-chave

Matriz Geradora, Sequência de Mersenne, Quatérnios de Mersenne, Identidades.

1 Introdução

A sequência de Mersenne é composta pelos números de Mersenne e carrega esse nome em homenagem ao francês Marin Mersenne (1588-1648), ver por exemplo [2]. Dos estudos matemáticos, em especial na teoria dos números, Mersenne ficou conhecido pelas suas contribuições relativas aos chamados primos de Mersenne, ver por exemplo [18]. Podemos encontrar estudos em torno dos números primos de Mersenne em [1, 4, 11, 14].

Definição 1.1. *A sequência de Mersenne, para $n \in \mathbb{N}$, corresponde a seguinte relação de recorrência, com $M_0 = 0$:*

$$M_{n+1} = 2M_n + 1$$

Assim, os primeiros termos dessa sequência são $0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$

Proposição 1.2. *A fórmula de Binet de Mersenne é representada pela fórmula* $M_n = 2^n - 1$.

Proof. Iremos mostrar que $2^n - 1$ satisfaz a Definição 1.1. Para o caso em $n = 0$, tem-se $M_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
E ainda, substituindo M_n na Definição 1.1, temos $M_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$. □

Para $n + 1$, podemos reescrever essa relação de recorrência como $M_{n+2} = 2M_{n+1} + 1$. Subtraindo $M_{n+2} - M_{n+1}$, podemos obter uma outra relação de recorrência equivalente para esta sequência. Assim, tem-se:

Proposição 1.3. *A recorrência da sequência de Mersenne, em sua forma homogênea, é dada por:*

$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n, n \geqslant 0,$$

com $M_0 = 0$ *e* $M_1 = 1$.

Proof. Utilizando a Proposição 1.2, tem-se que:

$$\begin{aligned} 3M_{n+1} - 2M_n &= 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) \\ &= 3.2^{n+1} - 3 - 2^{n+1} + 2 \\ &= 2.2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= M_{n+2} \end{aligned}$$

□

Como em [4], encontramos a equação característica definida por $x^2 - 3x + 2 = 0$ com suas raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$. Salienta-se, na Proposição 1.2, que M_n é uma combinação linear das potências de 2 e de 1, ou seja, as raízes da equação característica.

Definição 1.4. *Os números primos de Mersenne são todos os números primos da forma* $2^n - 1$.

Os primos de Mersenne vem sendo estudados há séculos e até 2018 foram apresentados 51 números primos dessa forma. O maior deles contém $23.249.425$ dígitos e, ainda, não se sabe se a quantidade de primos de Mersenne é infinita ou não. O fato de M_n ser primo implica que n é primo, como veremos na Proposição 1.5. Em [5], os números primos muito grandes são evidenciados devido a sua importância para a criptografia RSA.

Em [8] podemos encontrar um elo entre os primos de Mersenne e os números perfeitos pares, sendo esses números da forma $2^{p-1}(2^p - 1)$. Percebe-se que todo número primo de Mersenne, quando representado no sistema binário, é da forma $111 \cdots 111$, com p algarismos.

Proposição 1.5. *Sejam* a *e* n *números natuais e maiores que 1. Se* $a^n - 1$ *é primo, então* $a = 2$ *e* n *é primo.*

Proof. Podemos encontrar essa demonstração em [3], mas por conveniência vamos reproduzí-la aqui.
Se $a > 2$, então $a - 1 > 1$ e $(a-1) \mid (a^n - 1)$, assim $a^n - 1$ não é primo. Consequentemente, $a^n - 1$ primo implica em $a = 2$. Por outro lado, supondo que n não é primo, tome $n = rs$, com $r > 1$ e $s > 1$. Como $(2^r - 1) \mid ((2^r)^s - 1) = 2^n - 1$, segue que $2^n - 1$ não é primo. Logo, $2^n - 1$ primo implica que n é primo. $\square$

Baseado na Proposição 1.5, percebe-se que a busca pelos números primos de Mersenne comece pelo índice primo. E ainda, sabemos que, pela forma dos números primos de Mersenne, o seu crescimento é exponencial. Por isso, Lucas desenvolveu um algoritmo para testar a primalidade de um número de Mersenne e, posteriormente, esse algorimo foi melhorado por Lehmer, criando assim o critério Lucas-Lehmer, o qual possibilita fazer os cálculos de forma computacionalmente mais eficiente [10].

Neste trabalho, abordaremos a forma matricial da sequência de Mersenne, a sua generalização para os números inteiros não positivos e a sua complexificação por meio dos quatérnios de Mersenne. Com isso, a seguir, realizaremos investigações matemáticas em torno dessa sequência.

Nas próximas seções serão estudadas as matrizes da sequência de Mersenne e a sua forma matricial generalizada para o conjunto dos números inteiros negativos. Essa pesquisa teve como base as matrizes discutidas nos trabalhos de [15, 16] para a sequência de Padovan.

Por outro lado, definiremos os quatérnios de Mersenne e apresentaremos definições e teoremas em torno desses números. Vale ressaltar (ver [12]) que os quatérnios sugiram a partir da tentativa de generalização dos números complexos na forma $z = a + bi$ em três dimensões, resultando assim em uma soma formal de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, o que requer quatro dimensões. Um número quatérnio é um número da forma $q = a + bi + cj + dk$, onde a, b, c e d são números reais e i, j, k satisfazem

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j. \quad (1)$$

Com isso, os quatérnios formam um anel não comutativo.

2 A sequência de Mersenne para índices negativos

Visando explorar e estudar o processo de generalização para os termos negativos, substituímos o índice n por $-n$ na fórmula de Binet, obtendo a fórmula que possibilita encontrar os termos de índice negativo dessa sequência.

Definição 2.1. *A sequência de Mersenne, para os números inteiros negativos, com $n \geq 0$, é dada por:*

$$M_{-n} = -\frac{M_n}{2^n}.$$

Essa definição faz sentido pois basta observar que $M_{-n} = 2^{-n} - 1 = -\frac{1}{2^n}(2^n - 1) = -\frac{M_n}{2^n}$. E ainda, substituindo n por $-n$ na Proposição 1.3, temos:

Proposição 2.2. *A recorrência da sequência de Mersenne para os números negativos, em sua forma homogênea, é dada por:*

$$M_{-n+2} = 3M_{-n+1} - 2M_{-n}, n \geqslant 0,$$

Proof. De forma similar à Proposição 1.3 e utilizando a Definição 2.1, tem-se que:

$$\begin{aligned}
3M_{-n+1} - 2M_{-n} &= 3(2^{-n+1} - 1) - 2(2^{-n} - 1) \\
&= 3.2^{-n+1} - 3 - 2^{-n+1} + 2 \\
&= 2^{-n+1}(3 - 1) - 1 \\
&= 2^{-n+1} \cdot 2 - 1 \\
&= 2^{-n+2} - 1 \\
&= M_{-n+2}.
\end{aligned}$$

□

Os primeiros termos negativos dessa sequência são apresentados na Tabela 1.

Table 1: Termos da sequência de Mersenne - índices negativos

M_{-8}	M_{-7}	M_{-6}	M_{-5}	M_{-4}	M_{-3}	M_{-2}	M_{-1}	M_0
$-\frac{255}{256}$	$-\frac{127}{128}$	$-\frac{63}{64}$	$\frac{31}{32}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0

3 As matrizes de Mersenne

Uma forma de obter os termos de uma sequência gerada por uma recorrência linear é através da sua forma matricial. A matriz carrega consigo a fórmula de recorrência da sequência e, ao ser elevada a n-ésima potência, gera os termos da sequência sem necessitar conhecer os seus termos anteriores, como feito por Ercolano [6].

Seja $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. A seguir, vamos mostrar que M é uma forma matricial da sequência de Mersenne, de modo que ao ser elevada a n-ésima potência obtemos os termos da sequência de Mersenne. Observe que M carrega consigo os coeficientes da fórmula de recorrência.

Teorema 3.1. *É válido que:*

$$M^n = \begin{bmatrix} -2M_{n-1} & M_n \\ -2M_n & M_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Proof. Vamos utilizar o princípio da indução finita.

Para $n = 1$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2M_0 & M_1 \\ -2M_1 & M_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que, para algum $k \in \mathbb{N}$, vale

$$M^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -2M_{k-1} & M_k \\ -2M_k & M_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar, utilizando a relação de recorrência, que o resultado vale para $k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} M^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} -2M_{k-1} & M_k \\ -2M_k & M_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_k & -2M_{k-1} + 3M_k \\ -2M_{k+1} & -2M_k + 3M_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_k & M_{k+1} \\ -2M_{k+1} & M_{k+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Com isso, a partir da matriz de Mersenne [1], podemos permutar as suas linhas e colunas, respectivamente, obtendo outras matrizes que satisfazem propriedades análogas à anterior.

Corolário 3.2. *Seja* $\tilde{M} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. *É válido que* $\tilde{M}^n = \begin{bmatrix} M_{n+1} & -2M_n \\ M_n & -2M_{n-1} \end{bmatrix}$ *para* $n \geqslant 1$.

Proof. De modo similar à demonstração do Teorema 3.1, pode-se provar este Corolário. □

4 A generalização da forma matricial de Mersenne

Com o propósito de obter a forma matricial generalizada da sequência de Mersenne, foi realizada uma extensão para o conjunto dos números inteiros negativos presentes na sequência. Para estender a forma matricial discutida na seção anterior aos índices negativos, precisamos da relação de recorrência $M_{-n+2} = 3M_{-n+1} - 2M_{-n}$ e da inversa da matriz M.

A partir das matrizes estudadas na seção anterior, foi calculada a inversa da matriz M, obtendo a matriz

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

e dando origem aos resultados a seguir. Com isso, foram abordadas as duas formas matriciais da extensão desta sequência, generalizando a sua forma matricial.

Teorema 4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. A forma matricial da sequência de Mersenne para índices negativos é dada por* $M^{-n} = (M^{-1})^n = \begin{bmatrix} -2M_{-n-1} & M_{-n} \\ -2M_{-n} & M_{-n+1} \end{bmatrix}$.

Proof. Vamos utilizar o princípio da indução finita.

Para $n = 1$:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2M_{-2} & M_{-1} \\ -2M_{-1} & M_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que, para algum $k \in \mathbb{N}$, vale

$$M^{-k} = (M^{-1})^k = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -2M_{-k-1} & M_{-k} \\ -2M_{-k} & M_{-k+1} \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar, utilizando a relação de recorrência, que o resultado vale para

$k+1$. De fato,

$$\begin{aligned} M^{-(k+1)} = (M^{-1})^{k+1} = (M^{-1})^{k}.(M^{-1}) &= \begin{bmatrix} -2M_{-k-1} & M_{-k} \\ -2M_{-k} & M_{-k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3M_{-k-1} + M_{-k} & M_{-k-1} \\ -3M_{-k} + M_{-k+1} & M_{-k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2M_{-k-2} & M_{-k-1} \\ -2M_{-k-1} & M_{-k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Com isso, permutando as suas linhas e colunas, respectivamente, obtemos outra matriz de Mersenne, apresentando uma alternativa de conseguirmos os termos da sequência de Mersenne.

Corolário 4.2. *Seja $\tilde{M}$ a matriz do Corolário 3.2. Então $\tilde{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ e $\tilde{M}^{-n} = \begin{bmatrix} M_{-n+1} & -2M_{-n} \\ M_{-n} & -2M_{-n-1} \end{bmatrix}$.*

Proof. De modo similar à demonstração do Teorema 4.1, pode-se provar este Corolário. □

5 Proposições inerentes às matrizes

Fundamentado nos trabalhos [15, 16], nesta seção estabelecemos proposições referentes às matrizes encontradas nas seções anteriores, utilizando a recorrência das matrizes (Proposição 5.1), juntamente com a propriedade $X^{r+s} = X^{r}X^{s}$. Referente à representação matricial de Mersenne para os índices inteiros positivos, tem-se:

Proposição 5.1. *Para qualquer inteiro $n \geq 0$, temos:*

$$M^{n+2} = 3M^{n+1} - 2M^{n}.$$

Proof. De acordo com o Teorema 3.1 e com a Proposição 1.3, temos:

$$3\begin{bmatrix}-2M_n & M_{n+1}\\ -2M_{n+1} & M_{n+2}\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-2M_{n-1} & M_n\\ -2M_n & M_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6M_n+4M_{n-1} & 3M_{n+1}-2M_n\\ -6M_{n+1}+4M_n & 3M_{n+2}-2M_{n+1}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-2M_{n+1} & M_{n+2}\\ -2M_{n+2} & M_{n+3}\end{bmatrix}.$$

□

Proposição 5.2. *Para quaisquer inteiros m, r com $0 < m < r$, tem-se:*

$$M_r = -2M_{m-1}M_{r-m} + M_mM_{r-m+1}. \tag{3}$$

Proof. De acordo com o Teorema 3.1, utilizando o produto entre potências e multiplicação de matrizes quadrada, tem-se:

$$\begin{aligned} M^r &= M^mM^{r-m}\\ \begin{bmatrix}-2M_{r-1} & M_r\\ -2M_r & M_{r+1}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-2M_{m-1} & M_m\\ -2M_m & M_{m+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2M_{r-m-1} & M_{r-m}\\ -2M_{r-m} & M_{r-m+1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Considerando a igualdade entre as matrizes e comparando o termo M_r,

$$M_r = -2M_{m-1}M_{r-m} + M_mM_{r-m+1}.$$

□

Observação. Na Equação (3), se $m = 2$, tem-se:

$$M_r = 3M_{r-1} - 2M_{r-2},$$

o que mostra que a Equação (3) generaliza a Proposição 1.3.

Proposição 5.3. *Para qualquer inteiro $n \geq 0$, temos:*

$$M^{-n} = \frac{3}{2}M^{-n-1} - \frac{1}{2}M^{-n-2},$$

onde M^{-n} é a matriz dada pelo Teorema 4.1.

Proof. De acordo com o Teorema 4.1, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}M^{-n-1} - \frac{1}{2}M^{-n-2} &= \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -2M_{-n} & M_{-n+1} \\ -2M_{-n+1} & M_{-n+2} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2M_{-n+1} & M_{-n+2} \\ -2M_{-n+2} & M_{-n+3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3M_{-n} + M_{-n+1} & \frac{3}{2}M_{-n+1} - \frac{1}{2}M_{-n+2} \\ -3M_{-n+1} + M_{-n+2} & \frac{3}{2}M_{-n+2} - \frac{1}{2}M_{-n+3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2M_{-n-1} & M_{-n} \\ -2M_{-n} & M_{-n+1} \end{bmatrix} \\
&= M^{-n}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.4. *Para quaisquer inteiros m, r com $0 < m < r$, tem-se:*

$$M_{-r} = -2M_{-m-1}M_{-r+m} + M_{-m}M_{-r+m+1}. \tag{4}$$

Proof. De acordo com o Teorema 4.1, a propriedade do produto de potências e a multiplicação de matrizes quadradas, tem-se:

$$\begin{aligned}
M^{-r} &= M^{-m}M^{-r+m} \\
\begin{bmatrix} -2M_{-r-1} & M_{-r} \\ -2M_{-r} & M_{-r+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2M_{-m-1} & M_{-m} \\ -2M_{-m} & M_{-m+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2M_{-r+m-1} & M_{-r+m} \\ -2M_{-r+m} & M_{-r+m+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Considerando a igualdade e comparando o termo M_{-r},

$$M_{-r} = -2M_{-m-1}M_{-r+m} + M_{-m}M_{-r+m+1}. \tag{5}$$

□

Observação. Na Equação (4), se $m = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} M_{-r} &= -2M_{-2}M_{-r+1} + M_{-1}M_{-r+2} \\ M_{-r} &= \frac{3}{2}M_{-r+1} - \frac{1}{2}M_{-r+2}, \end{aligned}$$

o que mostra que a Equação (4) generaliza a Proposição 2.2.

6 Quatérnios de Mersenne

Segundo [13], os quatérnios foram criados em 1843 por Willian Rowan Hamilton (1805-1865). Antes disso, em 1833, Hamilton fundamentou a definição dos números complexos como pares ordenados de números reais para uma representação geométrica. Nessa representação, os números complexos são localizados no plano de Argand-Gauss. Estudos envolvendo sequências numéricas, números complexos e quatérnios podem ser encontrados em [13, 17]. Nesta seção, iremos definir os quatérnios de Mersenne.

Definição 6.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos o n-ésimo quatérnio de Mersenne como $Q_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}j + M_{n+3}k$, onde i, j, k satisfazem as igualdades em (1). Um termo qualquer da sequência formada pelos n-ésimos quatérnios de Mersenne é chamado de quatérnio de Mersenne.*

Os termos iniciais dos quatérnios de Mersenne são $Q_0 = i + 3j + 7k$ e $Q_1 = 1 + 3i + 7j + 15k$.

Proposição 6.2. *Os quatérnios de Mersenne, para $n \geq 0$, satisfazem a recorrência $Q_{n+2} = 3Q_{n+1} - 2Q_n$.*

Proof.

$$\begin{aligned}
3Q_{n+1} - 2Q_n &= 3(M_{n+1} + M_{n+2}i + M_{n+3}j + M_{n+4}k) - 2(M_n + M_{n+1}i + \\
&\quad M_{n+2}j + M_{n+3}k) \\
&= (3M_{n+1} - 2M_n) + (3M_{n+2} - 2M_{n+1})i + (3M_{n+3} - \\
&\quad 2M_{n+2})j + (3M_{n+4} - 2M_{n+3})k \\
&= M_{n+2} + M_{n+3}i + M_{n+4}j + M_{n+5}k \\
&= Q_{n+2}.
\end{aligned}$$

□

A partir dessa relação de recorrência, $Q_{n+2} = 3Q_{n+1} - 2Q_n$, apresentaremos sua equação característica, obtendo

$$\frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} = 3 - 2\frac{Q_n}{Q_{n+1}} = 3 - 2\frac{1}{\frac{Q_{n+1}}{Q_n}}$$

Tomando $q = \dfrac{Q_{n+1}}{Q_n}$, temos $q^2 - 3q + 2 = 0$.

Teorema 6.3. *A função geradora dos quatérnios de Mersenne, denotada por $G_{Q_n}(x)$, é:*

$$G_{Q_n}(x) = \frac{Q_0 + (Q_1 - 3Q_0)x}{(1 - 3x + 2x^2)}.$$

Proof. Para determinar a função geradora dos quatérnios de Mersenne, denotado por $G_{Q_n}(x)$, vamos escrever uma série em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes:

$$G_{Q_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n.$$

Assim como realizado nos trabalhos [7, 9], podemos realizar manipulações algébricas devido à relação de recorrência, reescrevendo essa série como:

$$\begin{aligned} G_{Q_n}(x) &= Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + \cdots + Q_nx^n + \cdots \\ -3xG_{Q_n}(x) &= -3Q_0x - 3Q_1x^2 - 3Q_2x^3 - \cdots - 3Q_nx^{n+1} - \cdots \\ 2x^2G_{Q_n}(x) &= 2Q_0x^2 + 2Q_1x^3 + 2Q_2x^4 + \cdots + 2Q_nx^{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned} (1-3x+2x^2)G_{Q_n}(x) &= Q_0 + (Q_1 - 3Q_0)x + (Q_2 - 3Q_1 + 2Q_0)x^2 + \\ & \quad (Q_3 - 3Q_2 + 2Q_1)x^3 + \cdots + (Q_n - 3Q_{n-1} + \\ & \quad 2Q_{n-2})x^n + \ldots \\ &= Q_0 + (Q_1 - 3Q_0)x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + \ldots \\ \Rightarrow G_{Q_n}(x) &= \frac{Q_0 + (Q_1 - 3Q_0)x}{(1-3x+2x^2)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.4 (Fórmula de Binet)**.** *Para* $n \geq 0$*, temos*

$$Q_n = (1 + 2i + 4j + 8k)2^n + (-1 - i - j - k).$$

Proof. As raízes da equação característica são 2 e 1, com isso tem-se que a fórmula de Binet da seguinte maneira:

$$Q_n = R \cdot 2^n + S \cdot 1^n.$$

Para $n = 0$, temos $R + S = Q_0$ e, para $n = 1$, temos $2R + S = Q_1$.
Resolvendo esse sistema, temos que:

$$R = -Q_0 + Q_1 \text{ e } S = 2Q_0 - Q_1.$$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$Q_n = (1 + 2i + 4j + 8k)2^n + (-1 - i - j - k).$$

□

Assim, apresentaremos a seguir, a dedução de identidades clássicas vinculadas aos quatérnios de Mersenne.

Proposição 6.5 (Identidade de Catalan). *Para os números naturais n e k, com $n \geqslant k$, tem-se a seguinte identidade:*

$$Q_{n-k}Q_{n+k} - Q_n^2 = (1 + 2i + 4j + 8k)(-1 - i - j - k)(2^{n-k} - 2^{n+1} + 2^{n+k}).$$

Proof. Sejam $R = 1 + 2i + 4j + 8k$ e $S = -1 - i - j - k$, como no Teorema 6.4. Temos:

$$\begin{aligned} Q_{n-k}Q_{n+k} - Q_n^2 &= (R2^{n-k} + S)(R2^{n+k} + S) - (R2^n + S)^2 \\ &= R^2 2^{2n} + RS2^{n-k} + RS2^{n+k} + S^2 - R^2 2^{2n} - RS2^{n+1} - S^2 \\ &= RS2^{n-k} - RS2^{n+1} + RS2^{n+k} \\ &= RS(2^{n-k} - 2^{n+1} + 2^{n+k}). \end{aligned}$$

□

Corolário 6.6 (Identidade de Cassini). *Para todo número natural n, tem-se a seguinte identidade:*

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = 2^{n-1}(1 + 2i + 4j + 8k)(-1 - i - j - k).$$

Proof. A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan para $k = 1$. □

Proposição 6.7 (Identidade de d'Ocagne). *Sejam m,n naturais. É válido que:*

$$Q_{m+1}Q_n - Q_mQ_{n+1} = (1 + 2i + 4j + 8k)(-1 - i - j - k)(2^m - 2^n).$$

Proof. Sejam $R = 1 + 2i + 4j + 8k$ e $S = -1 - i - j - k$, como no Teorema 6.4.

Temos:

$$\begin{aligned}
Q_{m+1}Q_n - Q_mQ_{n+1} &= (R2^{m+1}+S)(R2^n+S)-(R2^m+S)(R2^{n+1}+S)\\
&= R^2 2^{m+n+1}+RS2^{m+1}+RS2^n+S^2-R^2 2^{m+n+1}-\\
&\quad RS2^m-RS2^{n+1}-S^2\\
&= RS2^{m+1}-RS2^m-RS2^{n+1}+RS2^n\\
&= RS(2^{m+1}-2^m-2^{n+1}+2^n)\\
&= RS(2^m-2^n).
\end{aligned}$$

□

E ainda, é possível apresentar a recorrência para os termos negativos dos quatérnios de Mersenne, para $n \geq 1$, como $Q_{-n} = \frac{3}{2}Q_{-n+1} - \frac{1}{2}Q_{-n+2}$, de onde obtemos, por exemplo, $Q_{-1} = -\frac{1}{2} + j + 3k$ e $Q_{-2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i + k$.

7 Conclusão

A partir da relação de recorrência da sequência de Mersenne, verificou-se que, ao realizar a transformação linear elementar (troca de linhas) em uma das matrizes geradoras de Mersenne, foi possível obter quatro matrizes geradoras, sendo duas para os inteiros positivos e duas para os termos negativos. Destaca-se ainda que a matriz, para o índice negativo, é a inversa da matriz para o índice positivo. Foram apresentadas proposições inerentes às matrizes geradoras encontradas.

Por fim, foram apresentadas a extensão dos números complexos de Mersenne, denomidada por quarténios de Mersenne, sua definição, recorrência, equação característica, função geradora, fórmula de Binet, sua extensão para os números inteiros negativos e identidades clássicas em torno dos quatérnios.

Para trabalhos futuros, propõe-se verificar uma aplicação dessas matrizes para as áreas de exatas e da natureza, bem como a utilização desses conteúdos voltados para a área de ensino.

8 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

References

[1] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P.; MANGUEIRA, M. *Discovering theorems about the Gaussian Mersenne sequence with the Maples help*. Annals. Computer Science Series, v. 17, n. 2, 2019

[2] ALVES, F. R. V.; CATARINO, P.; VIEIRA, R.; MANGUEIRA, M. *Teaching Recurrent Sequences in Brazil Using Historical Facts and Graphical Illustrations*. Acta Didactica Napocensia, v. 13, n. 1, p. 87-104, 2020.

[3] ANDRADE, R. P. de. *Testes de primalidade: uma análise matemática dos algoritmos determinísticos e probabilísticos*. Tese de Mestrado, Mestrado Profissional em Matemática - Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, 2017.

[4] CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. *On the Mersenne sequence*. Annales Mathematicae et Informaticae, v. 46, p. 37-53, 2016.

[5] COUTINHO, S. C.. *Números inteiros e criptografia RSA*. Coleção Matemática e Aplicações, IMPA, Rio de Janeiro, 2ª edição, 2014.

[6] ERCOLANO, J. *Matrix generators of Pell sequences*. Fibonacci Quart, v. 17, n. 1, p. 71-77, 1979.

[7] FERREIRA, R. de C. *Números Mórficos*. Dissertação de Mestrado, Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 94f, 2015.

[8] GOMES, A. J.; COSTA, E. A. da; SANTOS, R. A. dos. *Números Perfeitos e Primos de Mersenne*. Revista da Olimpíada - IME, (7):99–111, 2008.

[9] KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, volume 7. Wiley-Interscience, 2ª edição, 2001, ISBN 0471399698.

[10] LEHMER, D. H. *An extended theory of Lucas' functions*. Annals of Mathematics, v. 31, n. 3, p. 419-448, 1930.

[11] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números*. IMPA, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2018.

[12] MENON, M. *Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2009.

[13] OLIVEIRA, R. R. de. *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.* Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE), 2018.

[14] RIBENCOIM, P. *Números primos: velhos mistérios e novos recordes*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2012.

[15] SEENUKUL, P. *Matrices which have similar properties to padovan q -matrix and its generalized relations*. Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology, v. 7, n. 2, p. 90-94, 2015.

[16] SOKHUMA, K. *Matrices formula for Padovan and Perrin sequences*. Applied Mathematical Sciences, v. 7, n. 142, p. 7093-7096, 2013.

[17] TASCI, D. *Padovan and Pell-Padovan Quaternions*. Journal of Science and Arts, year, v. 18, p. 125-132, 2018.

[18] VITTORIO, B. *Marin Mersenne: educator of scientists*. Ph.D. Dissertation, The American University, 52, 1989.