

---

# Modelo SIR aplicado na dinâmica da COVID-19 no Estado do Maranhão, Brasil

**Felix Silva Costa**

Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, Brasil

felix@cecen.uema.br

**Ítalo José Lima de Sousa**

Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, Brasil

joseitalo00@gmail.com

**José Adson Reis Santos**

Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, Brasil

adson.edj@gmail.com

**Lucas Vinicius da Silva**

Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, MA, Brasil

silvavinicius1804@gmail.com

---

## Resumo

Uma grande ferramenta usada para auxiliar os estudos epidemiológicos é a modelagem matemática que dentre várias funções serve para ajudar a buscar uma forma de controle da doença. Neste artigo, é apresentado uma revisão bibliográfica sobre o modelo matemático epidemiológico SIR, e sua aplicabilidade no estudo da dinâmica da COVID-19 no estado do Maranhão, Brasil. A partir da observação de dados reais, estima-se a taxa de reprodução de infectados pelo coronavírus que causa essa doença e a evolução da mesma no estado em 2020.

## Palavras-chave

Biomatemática, Covid-19, Dinâmica populacional, Modelo SIR.

## 1 Introdução

Epidemia é considerada um fenômeno que altera uma ou mais características de um grupo significativo de pessoas, e essas alterações comumente relacionam-se a doenças, portanto, os vírus, bactérias ou outros microrganismos são os responsáveis pelas epidemias. De acordo com [9] ela é “o estudo da distribuição e dos determinantes de estados ou eventos relacionados à saúde em populações específicas, e sua aplicação na prevenção e controle dos problemas de saúde”. Segundo Forantini [5], epidemia é o “nome dado ao estado de incidência ou agravo à saúde, além do normalmente esperado dentro da faixa de endemicidade, em determinada área ou grupo populacional.”

A necessidade de compreender a proliferação de doenças do ponto de vista dinâmico fez surgir uma nova área da ciência: a epidemiologia matemática. Esta baseia-se em hipóteses matemáticas que quantificam alguns aspectos do fenômeno biológico da interação entre o parasita (bactéria e vírus) e hospedeiro (homem e animal). Com o crescimento do estudo epidemiológico, matemáticos vem contribuindo para esse estudo com dados estatísticos, taxa de contágio, taxa de recuperação e taxa de interação. Neste trabalho é aplicado o modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis- Infectados-Removidos) para modelagem do número de infectados da doença COVID-19 no estado do Maranhão.

## 2 Modelo SIR

Os modelos matemáticos tornaram-se ferramentas importantes na análise da propagação e controle de doenças infecciosas. O processo de formulação do modelo esclarece suposições, variáveis e parâmetros; além disso, os modelos fornecem resultados conceituais como limites, números de reprodução básicos, números de contato e números de substituição. Esses modelos matemáticos são usados para comparar, planejar, implementar, avaliar e otimizar vários programas de detecção, prevenção, terapia e controle. A modelagem epidemiológica pode contribuir para o desenho e análise de levantamentos estatísticos, sugerir dados cruciais que devem ser coletados, identificar tendências, fazer previsões gerais e estimar a incerteza nas previsões [6].

O modelo SIR associado ao processo epidêmico, pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais não lineares. Desenvolvido por Kermarck e Mckendrick [10] em 1927 o modelo SIR refere-se a doenças onde o indivíduo adquire imunidade após curar-se da doença, este traz três sistemas de compartimentos que consiste essencialmente de um número finito de sistemas interligados onde trocam entre si quantidade ou concentração de material e considera uma população fixa, sendo os compartimentos: suscetíveis ( $S$ ), passível para contrair a infecção caso entrem em contato com ela; infectados ( $I$ ), pessoas contaminadas e que podem transmitir aos suscetíveis; e removidos ( $R$ ), pessoas que se recuperaram da infecção, assim imune à mesma e não podendo transmiti-la. O modelo SIR é descrito

da forma [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta IS}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dR}{dt} &= (\mu + \gamma)I \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $\beta$ ,  $\mu$  e  $\gamma$  são números reais positivos, onde  $\beta$  é a taxa de infecção,  $\mu$  é a taxa de mortalidade causada pela doença e  $\gamma$  é a taxa de recuperação dos indivíduos. Uma observação é  $N = S + I + R$  representa o total da população.

Nas equações em Eq.(1),  $\frac{dS}{dt}$  representa a taxa de variação do número de suscetíveis ao longo do tempo,  $\frac{dI}{dt}$  é a taxa de variação dos infectados ao longo do tempo, enquanto  $\frac{dR}{dt}$  é a taxa de variação dos indivíduos removidos ao longo do tempo.

O modelo SIR pode ser reescrito considerando as relações de proporcionalidade:  $s(t) = S(t)/N$ ,  $i(t) = I(t)/N$  e  $r(t) = R(t)/N$ , fornecendo o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\beta is \\ \frac{di}{dt} &= \beta is - (\mu + \gamma)i \\ \frac{dr}{dt} &= (\mu + \gamma)i, \end{aligned} \tag{2}$$

que representa o modelo SIR normalizado, ou seja,  $s(t) + i(t) + r(t) = 1$ .

## 2.1 Estimativa de parâmetros

Conhecendo-se os dados sobre a epidemia pode-se estimar os parâmetros que estão envolvidos na dinâmica da doença. Esses dados nos possibilitam tomar decisões na tentativa de prevenir e uma vez instalada no intuito de conter o seu avanço.

### 2.1.1 Taxa de recuperação

Para estimar a taxa de recuperação, supomos que não há influxo na classe infectada e que uma certa proporção de indivíduos ( $i_0$ ) está nessa classe no tempo zero. Então o problema do valor inicial neste caso é [8]:

$$i'(t) = -\gamma i, i(0) = i_0 \tag{3}$$

e portanto,

$$\frac{i(t)}{i_0} = e^{-\gamma t} \tag{4}$$

A equação acima, para  $t \geq 0$  descreve a proporção de indivíduos que ainda estão infectados no tempo  $t$ . **Logo, a proporção dos indivíduos não infectados neste instante  $t$  é dada por  $1 - e^{-\gamma t}$ .** Assim, considerando a variável aleatória  $X$  representativa do tempo de permanência na classe infectada, a função de distribuição de  $X$  é:

$$P(X \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{5}$$

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{6}$$

O tempo médio gasto na classe infetada é dado então pela média (valor esperado) da variável aleatória  $X$ .

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \tag{7}$$

que equivale a:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt \tag{8}$$

Usando a integração por partes, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (-te^{-\gamma t})\Big|_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} dt = \left[ -te^{-\gamma t} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \left( -be^{-b\gamma} - \frac{1}{\gamma}e^{-b\gamma} \right) - \left( -0 - \frac{1}{\gamma} \right) \right] = \frac{1}{\gamma}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Assim, a taxa de recuperação  $\gamma$  é igual ao inverso do tempo médio  $E(X)$  gasto na classe infetada:

$$\gamma = \frac{1}{E(X)}
 \tag{10}$$

### 2.1.2 Estimando o $R_0$

Em epidemiologia o  $R_0$  é o número de casos secundários produzidos quando um infectado é introduzido em uma população completamente suscetível. Ainda, considerando o valor de  $R_0$ , apresentamos a seguinte classificação [7]:

- i)  $R_0 > 1$  implica que a epidemia está crescendo;
- ii)  $R_0 = 1$  implica que a epidemia está em equilíbrio endêmico;
- iii)  $R_0 < 1$  implica que a epidemia vai desaparecer.

Para encontrar uma relação para  $R_0$  considerando o início da epidemia, considera-se a seguinte expressão:

$$I'(t) = [\beta - (\mu + \gamma)]I
 \tag{11}$$

cuja a solução é escrita da seguinte forma:

$$I(t) = I(0)e^{[\beta - (\mu + \gamma)]t}.
 \tag{12}$$

O tempo para que o número de infectados duplique  $I(t) = 2I(0)$  é:

$$t_d = \frac{\ln 2}{\beta - (\mu + \gamma)}
 \tag{13}$$

Após algumas simplificações, considerando  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}$ , obtemos:

$$R_0 = 1 + \frac{\ln 2}{(\mu + \gamma)t_d} \quad (14)$$

Partindo do crescimento inicial do número de infectados, temos uma estimativa para o  $R_0$ .

### 3 Dinâmica Epidemiológica do COVID-19 no estado do Maranhão, Brasil

**O vírus SARS-CoV-2 responsável pela doença COVID-19, tem impactado de forma negativa o mundo inteiro, causando um grande número de mortes em vários países, esses valores podem ser acompanhados no site <https://coronavirus.jhu.edu>.** Seu primeiro registro ocorreu na cidade de Whuan na China e atualmente temos mundialmente confirmados 138.004.199 infectados e 2.970.298 óbitos. No Brasil desde a identificação do primeiro caso em 26 de fevereiro de 2020 até 26 de fevereiro de 2021, ou seja, um ano depois, já foram confirmados 247.143 mortos pela doença e mais de 10.195.160 infectados, esses dados podem ser acompanhados pelo painel desenvolvido por uma equipe do Centro de Sistemas em Engenharia e Ciência da Escola de Engenharia da Universidade Johns Hopkins [3].

A COVID-19 apresenta um extenso espectro clínico variando entre infecções assintomáticas a quadros muito graves que podem levar a morte em algumas semanas ou dias. De acordo com o Ministério da Saúde do Brasil esta tem sua transmissão através de uma pessoa doente para outra ou por contato próximo através de: espirros, tosse, gotículas de saliva e objetos ou superfícies contaminadas. O período de incubação da doença é em média de 14 dias e o diagnóstico pode ser realizado através de alguns critérios podendo ser clínico ou laboratorial com testes próprios para a identificação do vírus no corpo humano.

Na busca pelo entendimento melhor da dinâmica da COVID-19 no Estado do Maranhão, foi feito um levantamento do número de casos de infectados, no site da Secretaria Estadual do Maranhão. Sendo que o primeiro caso confirmado ocorreu na sua capital São Luís, em 19 de Março de 2020. A partir das informações obtidas,

realizou-se o cálculo do  $R_0$  com variação semanal, durante o período de 140 dias. **O cálculo do  $R_0$  é baseado no tempo de duplicação do número de casos, conforme a equação Eq.(14).** A taxa de mortalidade nesse período de  $\mu = 0.06\%$  e a curva de regressão dada pela equação  $t_d = 0,0026t^2 + 0,0318t + 3,0291$ , **que é obtida via método de regressão não linear, para estimar o tempo de duplicação, com  $t$  dado em dias e  $R^2 = 0,9549^1$ . Portanto o valor de  $R_0$  foi calculado a cada 7 dias a partir dos dados dispostos na Tabela 1, que mostra os dias em que a doença duplicou e o tempo para essa duplicação.**

Table 1: Dados dos infectados e tempo de duplicação  $t_d$ .

| Datas  | Infectados | Dias | $t_d$ (Dias) |
|--------|------------|------|--------------|
| 20/Mar | 1          | 1    | 0            |
| 21/Mar | 2          | 2    | 1            |
| 23/Mar | 8          | 4    | 2            |
| 28/Mar | 16         | 9    | 5            |
| 31/Mar | 52         | 12   | 4            |
| 5/Abr  | 133        | 17   | 5            |
| 8/Abr  | 273        | 20   | 3            |
| 14/Abr | 630        | 26   | 6            |
| 19/Abr | 1320       | 31   | 5            |
| 28/Abr | 2804       | 40   | 9            |
| 7/Mai  | 5909       | 49   | 9            |
| 16/Mai | 12492      | 58   | 9            |
| 26/Mai | 26145      | 68   | 10           |
| 10/Jun | 53508      | 83   | 15           |
| 21/Jul | 108154     | 124  | 41           |

O período de infecção da doença COVID-19 refere-se ao tempo entre o infecção do ser humano pelo vírus e início dos sintomas da doença. Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), no caso da Covid-19, esse intervalo varia de 1 a 14 dias, como citado anteriormente. É necessário permanecer em isolamento por um período mínimo de 14 dias, mesmo que o infectado seja assintomático.

<sup>1</sup>Representa a variação total dos dados em torno da média da variável dependente

#### 4 Aplicação do modelo SIR

O modelo foi escrito no software *Rstudio* que utiliza a linguagem de programação *R* e resolvido através da função *lsolda* do pacote *desolver* instalado no programa, onde todos os gráficos foram construídos. Importante frisar que apesar do primeiro caso registrado ter sido no mês de março de 2020, toda a evolução da COVID-19, nos meses de março, abril e metade de maio, acontece praticamente na capital do Maranhão, ou seja, em São Luís, como pode ser visto no artigo [4], a partir dessa data o coronavírus começa a se propagar nas demais regiões do estado.

**Nas 6 primeiras semanas temos um crescimento acelerado de propagação do vírus, como mostram os gráficos das figuras 2-7. Diminuindo seu ritmo de contágio depois desse intervalo, como podemos ver nas figuras 8-16 e se tornando estável a partir da décima sexta semana, como observamos nas figuras 17-21.**

**É importante mencionar que para diminuir a disseminação da COVID-19, uma série de medidas foram tomadas pelo governador do estado do Maranhão, por meio de decretos. Na segunda semana de março de 2020 é decretada a suspensão das aulas presenciais nas unidades de ensino da rede estadual e escolas particulares e também nas instituições de ensino superior, público e privado. Ainda na segunda semana de março é decretado medidas de prevenção do contágio e de combate à propagação da transmissão da doença, como o uso de máscara em ambientes fechados e distanciamento social. As demais semanas e o mês de abril de 2020, temos a prorrogação dessas medidas e a busca por aumento do número de leitos exclusivos para COVID-19.**

**A primeira semana de maio de 2020 é o marco da luta efetiva contra a COVID-19, pois o governador decreta o lockdown em São Luís, que consiste na restrição da circulação em lugares públicos e o não funcionamento de serviços considerados não essenciais. Essa decisão foi tomada em vista de uma ordem judicial proferida pela Vara de interesses difusos e coletivos da Comarca da ilha de São Luís, com duração de 13 dias. Depois desse período, começa a flexibilizar as restrições e obter os resultados do lockdown, como as**



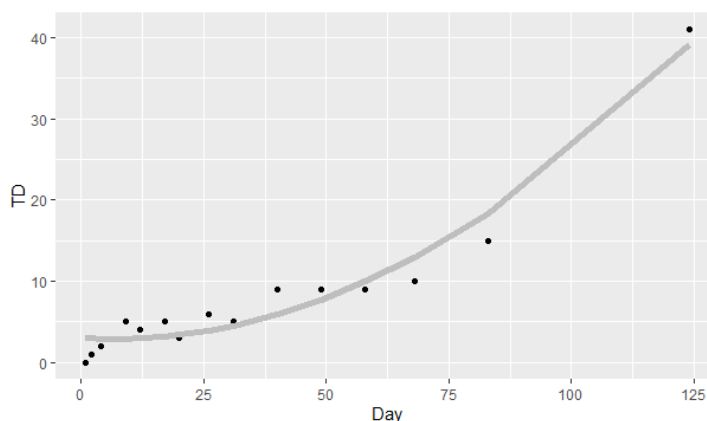


Figure 1: Curva regressora.

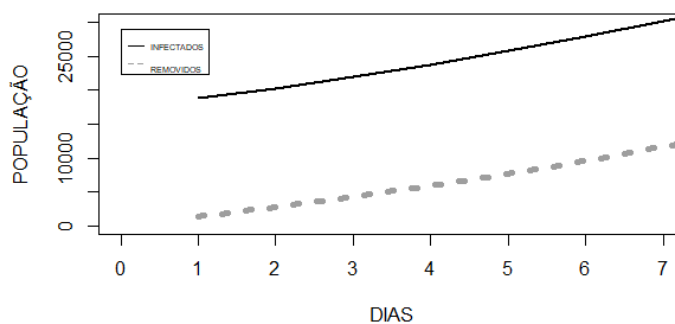


Figure 2: Primeira semana, com  $R_0 = 2.1$

**reduções nos números de casos confirmados e da taxa de letalidade, que podem ser vistos com detalhes em [2]. Nos demais meses as medidas restritivas de distanciamento e uso obrigatório de máscara continuam válidas em todo o estado, assim como a suspensão das aulas presenciais nas escolas públicas e no ensino superior. Entretanto, a COVID-19 continua de forma atenuada a se espalhar nas demais cidades do estado, como mostram os gráficos.**

### Agradecimentos

Agradecemos ao Fundo de Amparo e Pesquisa do Maranhão (FAPEMA) pela bolsa de iniciação científica.

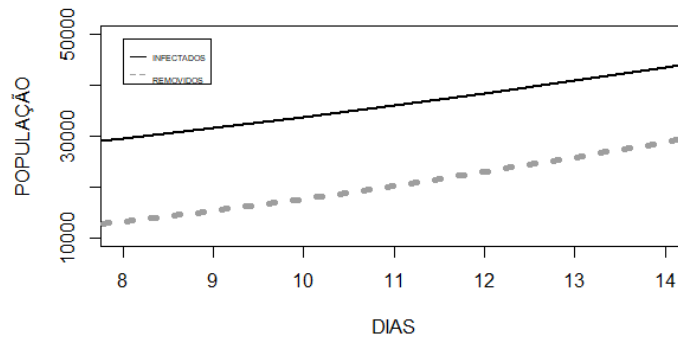


Figure 3: Segunda semana, com  $R_0 = 1.9$ .

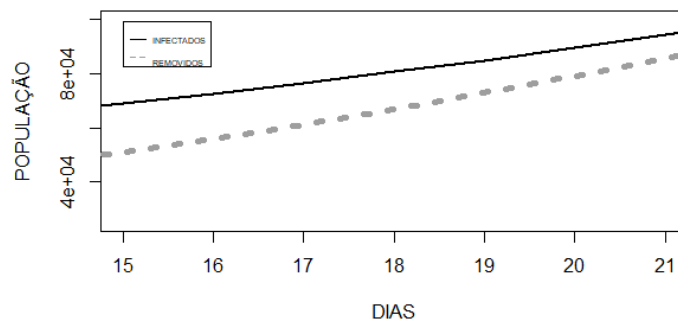


Figure 4: Terceira semana, com  $R_0 = 1.7$ .

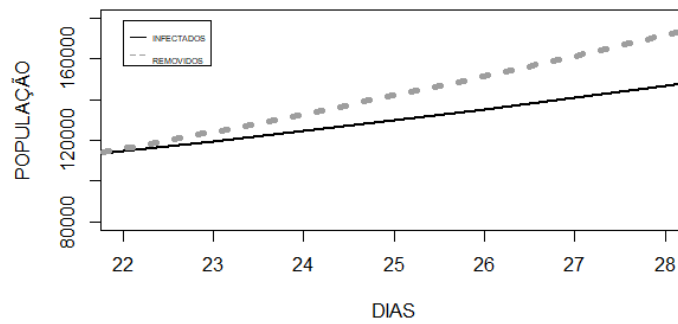


Figure 5: Quarta semana, com  $R_0 = 1.6$ .

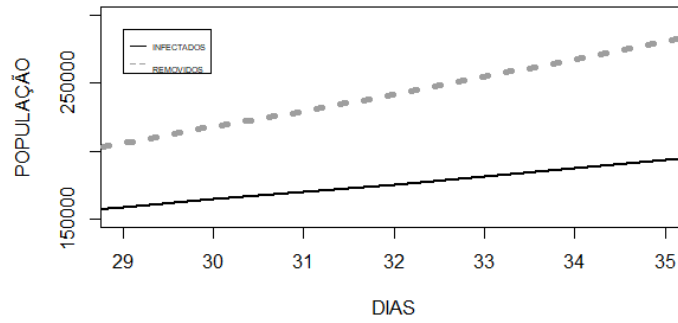


Figure 6: Quinta semana, com  $R_0 = 1.5$ .

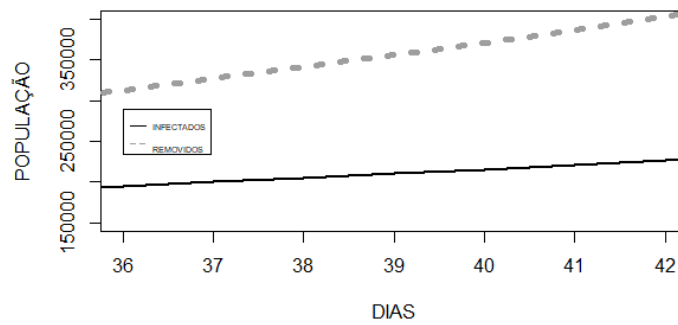


Figure 7: Sexta semana, com  $R_0 = 1.47$ .

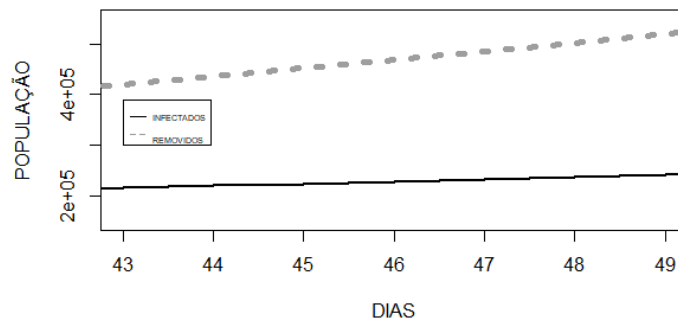


Figure 8: Sétima semana, com  $R_0 = 1.41$ .

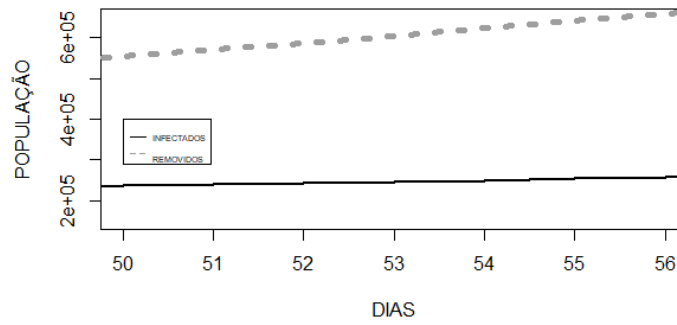


Figure 9: Oitava semana, com  $R_0 = 1,35$ .

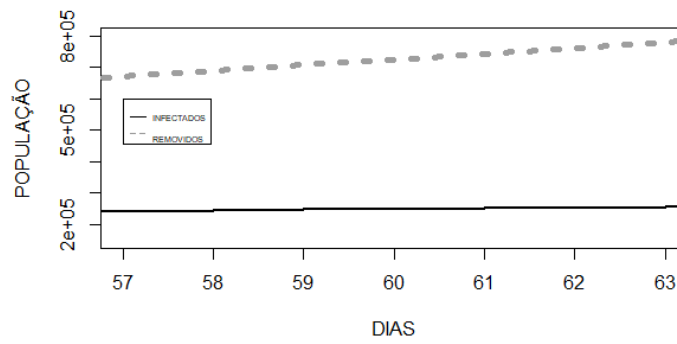


Figure 10: Nona semana, com  $R_0 = 1.31$ .

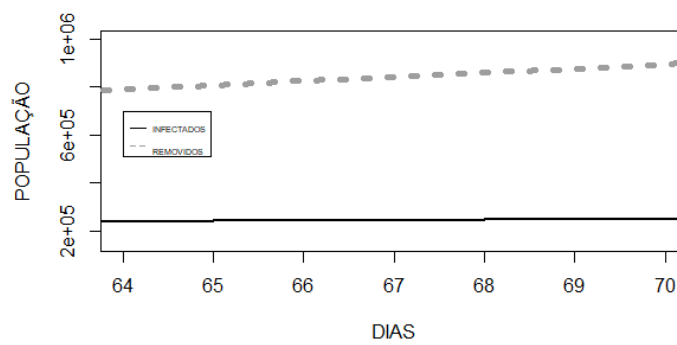


Figure 11: Décima semana, com  $R_0 = 1.28$ .

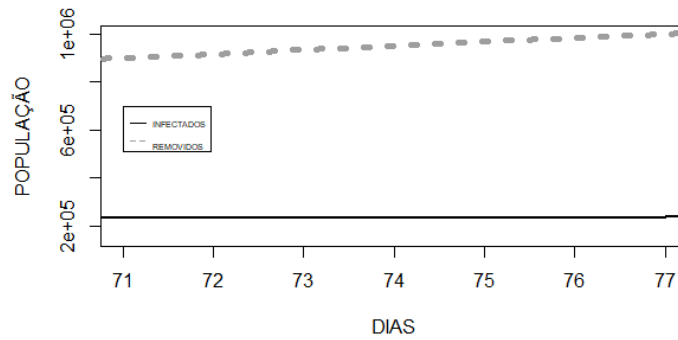


Figure 12: Décima primeira semana, com  $R_0 = 1.25$ .

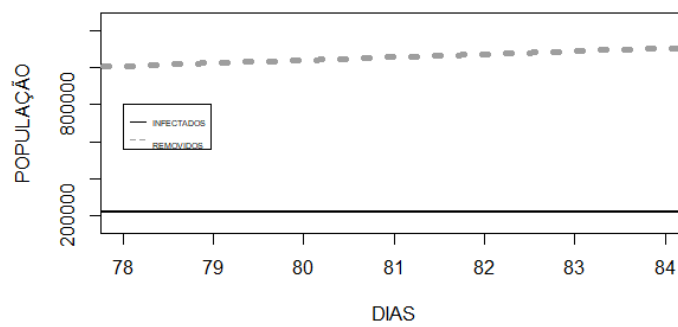


Figure 13: Décima segunda semana, com  $R_0 = 1.22$ .

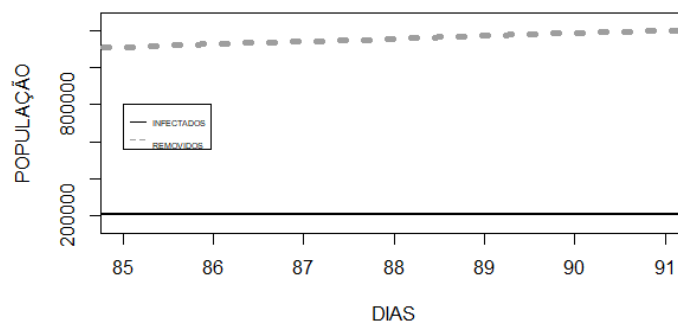


Figure 14: Décima terceira semana, com  $R_0 = 1.2$ .

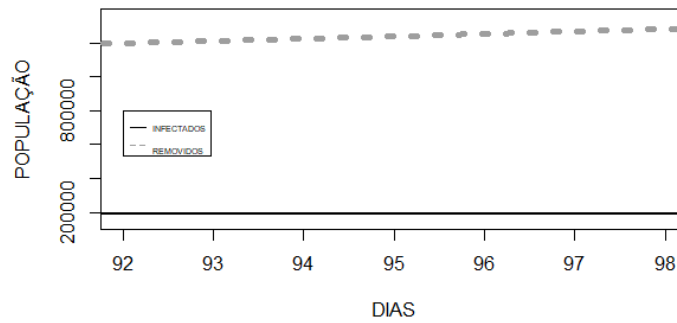


Figure 15: Décima quarta semana, com  $R_0 = 1.18$ .

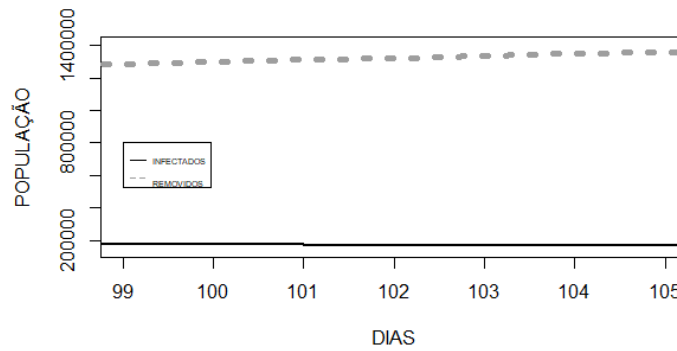


Figure 16: Décima quinta semana, com  $R_0 = 1.16$ .

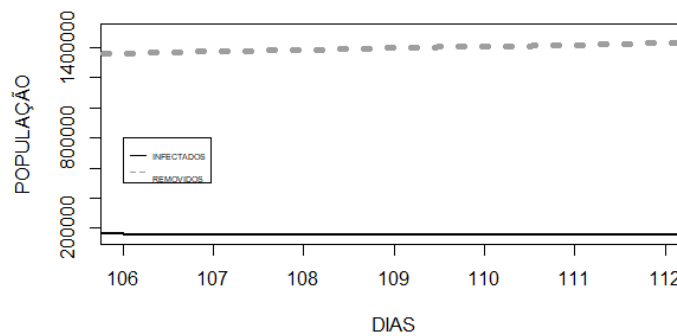


Figure 17: Décima sexta semana, com  $R_0 = 1.15$ .

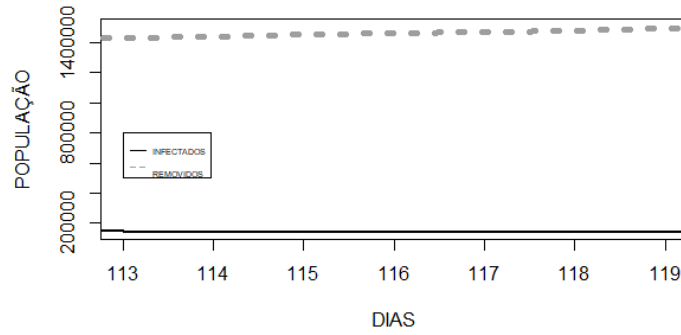


Figure 18: Décima sétima semana, com  $R_0 = 1.14$ .

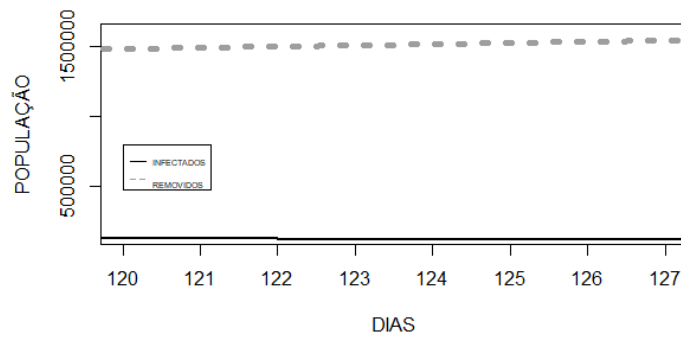


Figure 19: Décima oitava semana, com  $R_0 = 1.12$ .

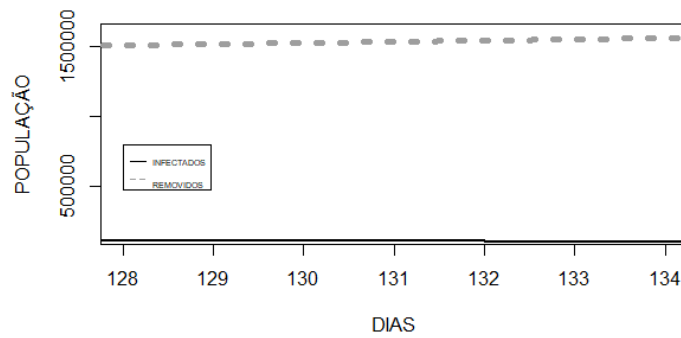


Figure 20: Décima nona semana, com  $R_0 = 1.11$ .

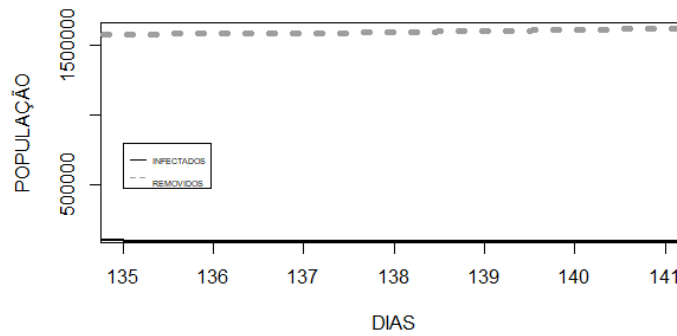


Figure 21: Vigésima semana, com  $R_0 = 1.11$ .

## 5 Conclusão

Um modelo matemático é uma representação de um determinado problema real, ou uma interpretação de um fragmento de um sistema, segundo uma estrutura de conceitos mentais ou experimentais. Tentar compreender a modelagem matemática é de fundamental importância para tomar decisões corretas frente a realidade, e é nesse contexto pandêmico que o modelo SIR mostra-se bastante eficiente para o estudo do COVID-19. Os resultados obtidos neste trabalho, mostram que a estabilidade e controle da doença foi possível devido as medidas restritivas adotadas pelo governo estadual do Maranhão, tais como distanciamento social e uso obrigatório de máscara. Contribuindo de forma significativa no combate à COVID-19.

## References

- [1] C. F. Brauer C. C. Chávez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [2] Secretaria Estadual de Saúde do Maranhão. Boletins covid-19. <https://www.saude.ma.gov.br/boletins-covid-19/>, 2020.
- [3] Centro de Sistemas em Engenharia e Ciência da Escola de Engenharia da Universidade Johns Hopkins. Coronavirus (covid-19).



<https://coronavirus.jhu.edu/map.html>, 2021.

- [4] J. A. R. Santos F. S. Costa, I. J. L. de Sousa. Sir model applied in dynamics of covid-19 contagion in são luís-ma, brazil. *International Journal of Modeling, Simulation*, 2021(1):45–76, 2021.
- [5] O. P. Forattini. *Conceitos básicos de epidemiologia molecular*. EDUSP, São Paulo, 1ª edition, 2005.
- [6] W. H. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. *SIAM review*, 42(4):599–653, 2000.
- [7] M.G.Roberts. The pluses and minuses of  $r_0$ . *Journal of the Royal Society interface*4, 2007.
- [8] J. D. Ndacherenga. Modelos matemáticos no estudo da malária. Master's thesis, Faculdade De Ciências Universidade do Porto, 2019.
- [9] T. Kjellström R. Bonita, R. Beaglehole. *Epidemiologia básica*. Editora Santos, 2010.
- [10] A. G. McKendrick W. O. Kermack. Contributions to the mathematical theory of epidemics-i. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, page 115:700–721, 1927.