
Mínimos Quadrados Não Lineares e a Teoria de Ondas de Água de Pequena Amplitude

Jorge Corrêa de Araújo

jcaraujo_55@yahoo.com.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Rosa García Márquez

rosagmarquez@yahoo.com.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Resumo

Este trabalho utiliza duas funções da teoria do *wavemaker* para um gerador de ondas do tipo pistão, com o objetivo de analisar quatro casos reportados pela literatura com o método dos mínimos quadrados não lineares. A primeira foi empregada nos dois primeiros casos relacionados à variação na amplitude do movimento do primeiro harmônico de onda causada pelas reflexões da onda incidente em uma praia usada como absorvedor, e o vazamento de água em torno do pistão gerador de ondas. A segunda descreve o perfil da superfície da onda de acordo com a teoria de segunda ordem de Stokes, e que foi utilizada no estudo dos dois últimos casos. Em todas as situações, as funções adotadas tiveram certos parâmetros ajustados pelos mínimos quadrados não lineares, e os resultados obtidos desses ajustes ficaram em boa concordância com os valores observados para as alturas das ondas ou para o perfil de superfície de onda do terceiro caso, enquanto no último caso essa concordância foi pobre, devido aos limites da aplicabilidade da teoria de segunda ordem. Os resultados obtidos adotando os mínimos quadrados não lineares, parecem indicar que esse método de fácil aplicação, pode constituir uma ferramenta poderosa auxiliar para a obtenção dos perfis de variações de alturas de ondas de pequena amplitude, ou dos perfis de movimento de ondas longas, onde se aplica a teoria de segunda ordem de Stokes sem a necessidade de se conhecer com exatidão “a priori”, as estimativas de certos parâmetros não lineares que atenuam o movimento de ondas e que são partes integrantes dessas equações.

Palavras-chave

Teoria do *wavemaker*, mínimos quadrados não lineares, teoria de Stokes de 2^o ordem.

1 Introdução

Segundo Dean e Dalrymple [1] (1991, p. 42) as ondas de água na realidade propagam-se como um fluido viscoso, sobre um fundo irregular com permeabilidade variável. Entretanto, na maioria dos casos, a maior porção do movimento de fluido é aproximadamente irrotacional, isto é, o caráter viscoso é negligenciado. De fato, ainda segundo os referidos autores, os efeitos viscosos são mais presentes perto das camadas de fronteira, como por exemplo, na superfície e no fundo. Nesse sentido, pode ser assumido com base na hidrodinâmica clássica (URSELL et al. [13], 1960,

p.33) que a água fluídica tem densidade uniforme e é invíscida. A teoria de ondas de pequena amplitude, isto é, ondas onde a amplitude comparada com o comprimento é pequena, se baseia em assumir que a velocidade de partículas de água, a superfície de elevação $y = \eta(x, y, z, t)$ e suas derivadas, são quantidades pequenas. Essas suposições conduzem a uma teoria linear de problema de valor de fronteira mais ou menos do tipo clássico (STOKER [11], 1957, p.18), ou seja, o movimento começa do repouso, e os termos não lineares são negligenciados (URSELL et al. [13], 1960, p.33).

A teoria de geração de ondas de água de pequena amplitude, ou teoria do *wavemaker* é baseada na teoria linear ou teoria simples, com a imposição de uma condição cinemática na fronteira em $x = 0$, que deve ser satisfeita pelo *wavemaker* (DEAN; DALRYMPLE, 1991, p.173).

Essa teoria nos diz que conhecida à profundidade da onda, seu período e o *stroke* S , o perfil da onda pode ser descrito durante todo o movimento (URSELL et al. [13], 1960, p.33). Por *stroke*, S podemos entender como sendo a distância horizontal máxima com a água em repouso que o gerador desloca em uma direção, a partir de sua posição neutra (Krvavica et al. [5], 2018, p. 1). Existem extensões dessa teoria para ordem superiores como foi proposta por Goda e Abe [4] (1972, p.8-15). Entretanto, segundo Fenton [2] (1985) enfatizou quando a altura da onda é desconhecida são necessárias outras informações, como por exemplo, a velocidade da onda, para que a altura seja calculada com precisão pois, caso contrário, essa teoria de ordem superior terá a mesma validade do que a teoria linear.

Segundo Dean e Dalrymple [1] (1991, p.170-171) a maioria dos testes em laboratório envolvendo estruturas flutuantes ou montadas no fundo, bem como, estudos de perfis de praias, ou outros fenômenos relacionados, utilizam tanques de ondas que são geralmente compartimentos longos e estreitos com um gerador ou *wavemaker* de algum formato geométrico e que é fixado em alguma extremidade como, por exemplo, no fundo da superfície ou mesmo abaixo dela (FLICK; GUZA [3], 1980, p. 82). Ainda de acordo com os referidos autores, uma excitação no fundo do mar provocado por um terremoto, ou mesmo por ação de estruturas humanas, causam ondas cujo movimento pode ser analisado à luz da teoria do *wavemaker*. Segundo Krvavica et al. [5] (2018, p.2) essa teoria tem sido estendida para ondas com tensões na superfície. Também recentemente, ondas acústicas gravitacionais tem sido objeto de atenção com o uso dessa teoria, no sentido de detecção de tsunamis (STIASSNIE [10], 2009, p.23-32). Hoje em dia, a teoria do *wavemaker* não é importante apenas no planejamento e na execução de experimentos de laboratório, mas também na verificação de modelos numéricos (KRVAVICA et al. [5] 2018, p.2).

Ursell et al. [13] (1960, p.51-52) afirmaram depois da realização de vários experimentos em laboratórios que a teoria das ondas de pequena amplitude aplicada a

um *wavemaker* do tipo pistão pode ser usada com confiança, mesmo em casos mais complexos onde a verificação experimental não é disponível. Entretanto, segundo Madsen [8] (1971, p.8672) quando ondas longas de amplitudes finitas são geradas por um movimento senoidal do *wavemaker*, pode ser observado que a onda resultante em vez de ter uma forma permanente quebra-se em duas, ou seja, em uma onda primária, e uma ou mais ondas secundárias, mais ou menos pronunciadas, dependendo da distância do *wavemaker* e que viajam em velocidades diferentes da onda primária. Desse modo, a solução linear para esse problema é insatisfatória, ou seja, a solução linear da teoria do *wavemaker* deve ser estendida segundo Madsen [8] (1971, p. 8672) para uma teoria de segunda ordem de maior exatidão conhecida como problema de segunda ordem de Stokes (FLICK; GUZA [3], 1980, p. 81,85). Essa solução mais geral se baseia na introdução de um segundo harmônico de onda como uma consequência do movimento de amplitude finita do *wavemaker*.

De modo resumido, o potencial do campo de velocidades do fluido ϕ é dado segundo Madsen [8] (1971, p. 8673) por $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$, isto é, a soma de dois harmônicos, onde $\phi^{(1)}$ representa o movimento primário da onda, ou seja, $\phi^{(1)}$ é a solução do problema dado pela teoria linear do *wavemaker*, isto é, de ordem um, enquanto $\phi^{(2)}$ é o harmônico que está associado à teoria não linear do *wavemaker* de segunda ordem que representa o movimento de ondas secundárias de origem intrínseca do movimento do *wavemaker* do tipo pistão. Esse segundo harmônico de onda livre é a solução do problema de Stokes de segunda ordem (FLICK; GUZA [3], 1980, p. 81-85). As equações de segunda ordem para o problema de Stokes reportadas por Madsen [8] (1971, p. 8673) são as mesmas utilizadas por Flick e Guza [3] (1980, p. 81) apenas com os planos bidimensionais alterados em suas direções e diferindo na equação que completa a condição cinemática de fronteira em $x = 0$ com respeito ao tipo de gerador o que no caso de Flick e Guza [3] (1980, p. 81) é do tipo pá.

Como mencionado anteriormente, quando ondas longas de amplitude finita são geradas por um *wavemaker*, junto à onda principal, é comum à presença de ondas secundárias que segundo Madsen [8] (1971, p. 8672) podem criar uma série de problemas em teste laboratoriais na interpretação dos resultados desses experimentos. De acordo com Flick e Guza [3] (1980, p. 80) as ondas secundárias sempre contaminam as ondas geradas e suas amplitudes são aproximadamente iguais às correções de Stokes de segunda ordem. Essas correções para o perfil de superfície da onda progressiva gerada pelo movimento do *wavemaker* são realizadas na amplitude teórica do primeiro harmônico do movimento. Essa amplitude deve ser corrigida pelas influências não lineares do movimento, tais como, as reflexões e o vazamento de água que ocorre em volta do gerador também conhecido como *leakage*.

Esses efeitos não são considerados na teoria linear, de modo que, a determinação dessa amplitude primária é essencial para a representação com mais exatidão do perfil de

ondas progressivas ou das alturas da onda levando em conta essas influências. O objetivo desse trabalho é obter estimativas para a amplitude do primeiro harmônico usando o método dos mínimos quadrados não lineares para o movimento de ondas relativamente longas na extensão $0.02 < \frac{h}{L} < 0.09$, onde a partir de certa distância do *wavemaker* ondas secundárias de amplitude decrescente se propagam em velocidades diferentes dentro da onda principal (MADSEN; MEI; SAVAGE [7], 1970, p.135). Para isso, serão reanalisadas observações decorrentes de quatro experimentos em laboratório de geração de ondas com gerador do tipo pistão realizados por Ursell et al. [13] (1960, p. 45, 51) e Madsen [8] (1971, p. 8678, 8680) onde dados aproximados foram considerados para as observações realizadas pelos referidos pesquisadores, de modo a implementação do método. As aproximações foram necessárias devido ao fato dos referidos autores não terem divulgado os valores exatos das observações feitas em cada experimento por meio de tabelas ou qualquer outro procedimento.

Os resultados obtidos com o método dos mínimos quadrados, caso não linear, ficaram em boa concordância com os valores aproximados das observações experimentais usados na representação dos perfis de ondas longas, bem como, nas variações das alturas da onda a certa distância do gerador, com exceção do último caso que estava fora da aplicabilidade da teoria de segunda ordem. Além disso, o método não necessita a “priori” do conhecimento com exatidão, dos parâmetros de reflexão e do ângulo de fase da onda principal para a obtenção do perfil do movimento, o que se torna necessário quando se leva em conta os efeitos não lineares do movimento de onda e o surgimento de crestas secundárias na onda principal.

2 Materiais e Métodos

Nesta seção abordaremos de uma forma geral a teoria linear das ondas de água de pequena amplitude (STOKER [11], 1957, p. 19,21) e as influências não lineares que não fazem parte dessa teoria (URSELL et al. [13], 1960, p. 33-52, Madsen [8] 1971, p. 8676-8677). Também serão considerados aspectos relevantes da teoria de segunda ordem do *wavemaker* proposto por Madsen [8] (1971, p. 8672-8683). Além disso, um resumo do método dos mínimos quadrados não lineares é apresentado.

2.1 A teoria linear das ondas de pequena amplitude

Antes de tratarmos do problema linear para ondas de água de pequena amplitude é preciso formular o problema de ondas superficiais. A Figura 1 mostra um movimento de uma onda de água em uma região de uma praia oceânica, ou mesmo em um canal, no plano bidimensional xy , com um fundo plano horizontal de profundidade constante h . Na Figura 1 a função $y = \eta(x, t)$, representa a superfície livre da água ou elevação, sendo H a altura da onda. O movimento de onda é criado, por exemplo, por um

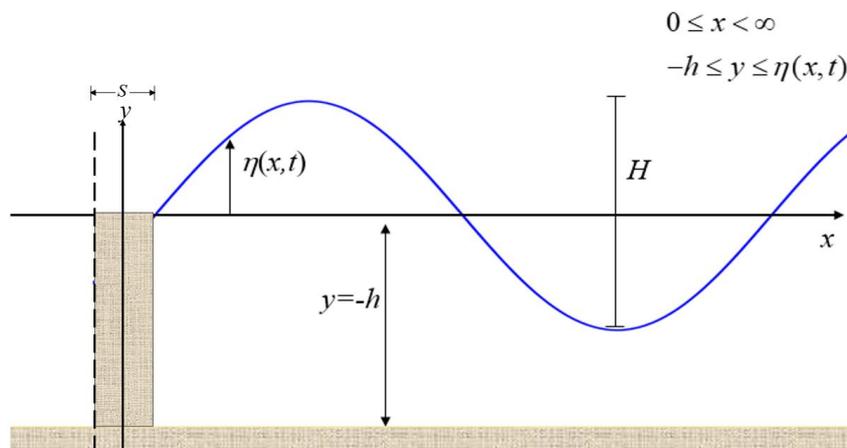


Figura 1: Perfil de onda superficial bidimensional.

wavemaker em $x = 0$ de uma determinada região, onde o fluido estava em repouso no tempo $t = 0$. O objetivo é determinar a forma do perfil da superfície livre após o movimento iniciado em $x = 0$ pela perturbação produzida (STOKER [11], 1957, p.15-16). Essa teoria é baseada nas suposições da teoria da hidrodinâmica clássica (URSELL et al. [13], 1960, p. 33). Além disso, os termos não lineares que descrevem o movimento são desprezados. A formulação do problema de valor de fronteira é dado segundo Stoker [11] (1957, p.19,21) por

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, -h \leq y \leq 0, \tag{1}$$

onde $\phi^{(1)}$ é o potencial do fluxo do campo de velocidade do fluido, $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$. Essa equação nos diz que esse potencial satisfaz a equação de Laplace. Aqui usamos o sobrescrito para indicar a magnitude do potencial. Uma condição de impermeabilidade no fundo, $y = -h$ e duas condições, uma dinâmica e outra cinemática, ambas sobre a superfície livre em $y = 0$, constituem as condições de fronteira dadas pelas equações

$$\phi_y^{(1)} = 0; \quad y = -h, \tag{2}$$

$$\phi_t^{(1)} + g\phi_y^{(1)} = 0; \quad y = 0, \tag{3}$$

$$\eta + \frac{1}{g}\phi_t^{(1)} = 0; \quad y = 0, \tag{4}$$

onde g é a gravidade. As eqs (1-4) são as condições de primeira ordem do movimento de onda de água. O problema é completado através de uma condição de fronteira adicional sobre o wavemaker, em $x = 0$. A componente horizontal do deslocamento periódico do

pistão é dado por Madsen [8] (1971, p. 8673) por

$$\xi^{(1)} = -\xi^{(0)} \cos(\omega t), \tag{5}$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular do movimento de período T dado em segundos. O termo constante associado ao *stroke* do movimento é $\xi^{(0)}$. A condição cinemática sobre a superfície do *wavemaker* pode ser imposta usando a eq (6.10) de Dean e Dalrymple [1] (1991, p. 173) na forma

$$u = \xi^{(0)} \omega \operatorname{sen}(\omega t), \quad x = 0. \tag{6}$$

A solução linear para esse problema da teoria do *wavemaker* dada pelas eqs (1-6) quando limitado a longas ondas, isto é, $\frac{h}{L} < O(0.1)$ (MADSEN,[8] 1970, p.196) é dado pela eq (10) de Madsen [8] (1971, p. 8674). Em particular, a equação da superfície livre é dada por Madsen [8] (1971, p. 8674) na forma

$$\eta^{(1)} = -a \operatorname{sen}(k_o x - \omega t), \tag{7}$$

onde

$$\omega^2 = k_o g \tanh(k_o h), \tag{8}$$

enquanto a amplitude de primeira ordem da onda a é relacionada com a amplitude do movimento do *wavemaker* $\xi^{(0)}$ por meio da equação (13) reportada por Madsen [8] (1971, p. 8674)

$$a = a_{teo} = \xi^{(0)} \frac{\tanh(k_o h)}{n_1}, \tag{9}$$

com

$$n_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_o h}{\operatorname{senh}(2k_o h)} \right). \tag{10}$$

Entretanto, existem efeitos que não são incluídos nessa teoria simples, como por exemplo, a influência das reflexões produzidas pela onda incidente por um absorvedor no final do movimento, como por exemplo, uma praia ou a parede de um tanque, e de vazamentos de água em torno do pistão (*leakage*). Segundo Madsen [8] (1971, p.8677) a presença de pequenas reflexões causa uma variação na altura de onda na forma

$$H(x) = 2a (1 + \xi_R \cos(2k_o x + \delta) + \xi_R \cos \delta), \tag{11}$$

onde, ξ_R é o coeficiente de reflexão e δ o ângulo de fase da onda, sendo x a distância do *wavemaker*. O coeficiente de reflexão e o ângulo de fase podem ser obtidos respectivamente das equações (37) e (38) (MADSEN [8], 1971, p. 8677). Para tratar do *leakage*

pode-se usar a equação (40) dos referidos autores na forma

$$a = a_{teo} \left(1 - C \sqrt{\frac{h}{a_{teo}}} \right), \tag{12}$$

onde o valor da amplitude do primeiro harmônico de movimento, a gerado pelo *wavemaker*, pode ser obtido da equação (36) (MADSEN [8], 1971, p. 8677). A constante C associada a esse efeito pode ser então determinada. Deve-se registrar que os valores dessas constantes correspondem a estimativas que podem variar entre ± 0.01 a $\pm 10\%$ para ξ_R e δ respectivamente (MADSEN [8], 1971, p. 8678). A combinação das eqs (11-12) fornece o valor para a amplitude a do primeiro harmônico de onda corrigida desses dois efeitos não lineares do movimento que é tratado pela equação (41) do referidos autores.

2.2 O problema de segunda ordem de Stokes

Para ondas relativamente longas geradas por um *wavemaker* do tipo pistão, a teoria linear clássica não é suficientemente boa. Coube a Madsen [8] (1971, p. 8673-8675) estender essa solução para uma solução de segunda ordem de maior exatidão. Como já mencionado anteriormente, essas ondas geradas pelo movimento do gerador costumam mostrar a existência de ondas secundárias junto à onda principal o que pode causar problemas na interpretação de testes realizados em laboratórios, entre outros. Faremos um breve resumo das equações de segunda ordem de Stokes e que foram reportadas por Madsen [8] (1971, p. 8673). A posição do gerador é dada por

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \tag{13}$$

e

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} \tag{14}$$

onde $\phi^{(1)}$ é a solução do problema linear da teoria do *wavemaker* para ondas relativamente longas, conforme pode ser visto pela equação (10) de Madsen [8] (1971, p. 8674), enquanto $\phi^{(2)}$ é o segundo harmônico de onda que deve satisfazer as condições não necessariamente lineares, dadas por

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad -h \leq y \leq 0 \tag{15}$$

$$\phi_y^{(2)} = 0 \quad y = -h, \tag{16}$$

$$\phi_y^{(2)} + \frac{1}{g} \phi_{tt}^{(2)} = -\frac{1}{g} \left(\phi_{tty}^{(1)} \eta^{(1)} + 2\phi_{ty}^{(1)} \right) - \phi_{yy}^{(1)} \eta^{(1)} + 2\psi_x^{(1)} \eta_x^{(1)}, \quad y = 0, \tag{17}$$

e

$$\eta^{(2)} = -\frac{1}{g} \left(\phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} \left((\phi_x^{(1)})^2 + (\phi_x^{(1)})^2 \right) + \phi_{ty}^{(1)} \eta^{(1)} \right), \quad y = 0. \quad (18)$$

Essas equações constituem o problema de Stokes de segunda ordem que submetidas à condição sobre o *wavemaker* dada por

$$\phi_x^{(2)} = -\phi_{xx}^{(1)} \xi^{(1)} + \xi^{(2)}, \quad x = 0, \quad (19)$$

formam a base da teoria do *wavemaker* de segunda ordem.

A solução geral desse problema de segunda ordem, ou solução não linear é simplificada segundo Madsen [8] (1971, p. 8674) separando

$$\phi^{(2)} = \phi_P^{(2)} + \phi_L^{(2)}, \quad (20)$$

e

$$\eta^{(2)} = \eta_P^{(2)} + \eta_L^{(2)}, \quad (21)$$

onde as funções $\phi_P^{(2)}$, $\phi_L^{(2)}$, $\eta_P^{(2)}$ e $\eta_L^{(2)}$ podem ser obtidas mediante a imposição de certas condições de fronteira (MADSEN [8], 1971, p.8674) com o subscrito *P* indicando o movimento associado com a onda progressiva de Stokes, enquanto o subscrito *L* é associado a onda livre do segundo harmônico. Considerando o movimento do *wavemaker* do tipo senoidal, o perfil da superfície $y = \eta(x, t)$ gerado pela onda progressiva de segunda ordem é dada pela equação (28) (MADSEN [8], 1971, p. 8675) na forma

$$\begin{aligned} \eta = \eta^{(1)} + \eta_P^{(2)} + \eta_L^{(2)} = & -a \operatorname{sen}(k_o x - \omega t) - a_P^{(2)} \cos(2k_o x - 2\omega t) + \\ & + a_L^{(2)} \cos(k_o x - 2\omega t), \end{aligned} \quad (22)$$

onde os coeficientes a , $a_P^{(2)}$ e $a_L^{(2)}$ são dados respectivamente pelas equações (41), (16), (26) e (27) reportadas por (MADSEN,[8], 1971, p.8674- 8675). A eq (22) mostra que o movimento de onda é formado por um movimento de onda progressiva de Stokes de segunda ordem, isto é, os dois primeiros termos do lado direito da eq (22) mais um segundo harmônico de onda livre formado pelo terceiro termo do lado direito da eq (22). Esse perfil de onda dada pela eq (22) tem aplicabilidade limitada para $\sigma_o = \frac{aL^2}{h^3} < \frac{4\pi^2}{3}$ ou ainda para ondas limitadas a $\frac{h}{L} < O(0.1)$, isto é, ondas longas (MADSEN [8], 1971, p. 8675).

Em geral, $\kappa > 2k_o$ e isso implica que a onda secundária viaja um pouco mais lentamente em relação à onda de Stokes de segunda ordem (MADSEN [8], 1971, p.8675). Esse fato decorre imediatamente da fórmula para a velocidade da onda quando é conhecido o número de onda.

Para as condições dadas envolvendo σ_o ou $\frac{h}{L}$ a solução de segunda ordem (não linearidade) lida com a existência de ondas secundárias que estão associadas ao segundo harmônico de onda livre.

2.3 Os mínimos quadrados não lineares

Considere um conjunto de pontos $(x_i, y_i = f(x_i))$, $i = 1, \dots, m$, e uma função não linear $y(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dependente da variável real x e de n -parâmetros dados pelo vetor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$, sendo $m \gg n$. O objetivo é minimizar o funcional

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^m f_i^2(\lambda), \tag{23}$$

onde,

$$f_i(\lambda) = y_i - y(x_i; \lambda), \tag{24}$$

é chamado resíduo relativo ao ponto x_i . Daí, obtemos o vetor de resíduos dado por

$$f(\lambda) = (f_1(\lambda), \dots, f_m(\lambda))^T. \tag{25}$$

O desenvolvimento em série de Taylor da função $F(\lambda)$ em torno de λ com o vetor de acréscimos $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ até a ordem um, resulta no sistema linear de ordem n na iteração k dado por

$$(J_k^T J_k) a_k = -J_k^T f_k, \tag{26}$$

onde

$$J_k = J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial \lambda_n} \end{bmatrix} \tag{27}$$

Se J_k é inversível o sistema tem solução única. Esse método de resolução é conhecido como método de Gauss-Newton e ele nos diz que, quando o vetor λ está próximo do ponto de mínimo o vetor de resíduos fica próximo do vetor nulo. Para maiores detalhes sobre o método ver Neto e Neto [9] (2005, p.92-94). Para avaliar o critério de ajuste usaremos o indicador

$$R_{wp} = \left(\frac{\sum_{i=1}^m (y_i^{obs} - y_i^{calc})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i^{obs})^2} \right)^{1/2}. \tag{28}$$

O indicador R_{wp} dado pela eq (28) é significativo, pois o numerador é o resíduo a ser

minimizado. Esse critério é muito utilizado em refinamentos de estruturas cristalinas de materiais policristalinos (YOUNG [14], 2002, p.22).

3 Resultados e Discussões

Nesta seção são apresentadas quatro aplicações realizadas em laboratórios com base na teoria do *wavemaker* usando gerador de ondas do tipo pistão. Em cada uma das aplicações, foram consideradas aproximações para os dados experimentais obtidos por Ursell et al. [13] (1960) e Madsen [8] (1971). O método dos mínimos quadrados não lineares foi usado considerando as funções teóricas da teoria de ondas de água de pequena amplitude para a representação de variações de alturas de onda dada pela eq. (11), bem como, os perfis de ondas na superfície com o uso da eq (22).

3.1 Aplicação 1: Variações da altura da onda em função da distância do *wavemaker*

A Figura 2 mostra de modo simplificado o aparato utilizado por Ursell et al. [13] (1960, p.41) para a verificação experimental da teoria do gerador de ondas (*wavemaker*) do tipo pistão. Esse aparato consiste de um canal com uma seção reta retangular com os lados formados por vidros sendo o fundo plano e horizontal. Uma praia com uma inclinação de 3.9° na parte final do canal foi utilizada como absorvedor da energia da onda incidente. Para medir a altura da onda foi adotado um dispositivo denominado *hook-and-point gauge*. Maiores detalhes sobre o aparato instrumental, a praia considerada e o instrumento de medição, podem ser vistos na descrição dos autores (URSELL et al. [13], 1960, 41-43)

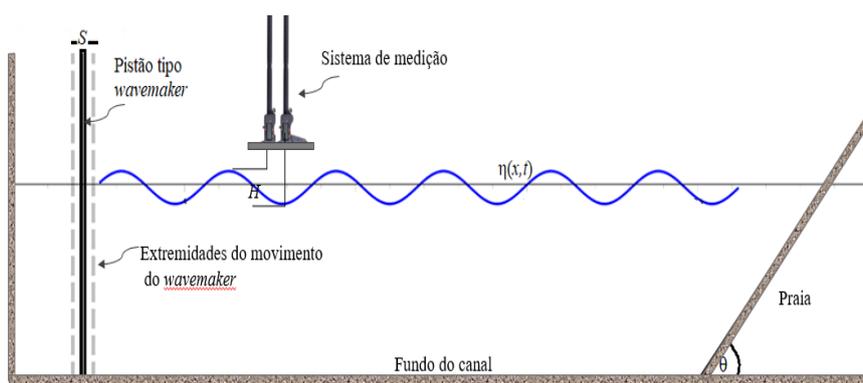


Figura 2: Diagrama simplificado de um tanque de ondas, adaptado da Fig. 1 de Ursell et al. [13] (1960, p.41).

O movimento do *wavemaker* na teoria linear é harmônico com o deslocamento horizontal dado por

$$x = \frac{S}{2} \text{sen} \left(\frac{2\pi t}{T} \right). \quad (29)$$

A eq (29) também pode ser colocada na forma

$$x = \frac{S}{2} \text{sen} (\omega t) = \xi_o \text{sen}(\omega t), \quad (30)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência da onda, enquanto $\xi_o = \frac{S}{2}$ é a amplitude do movimento senoidal. Em particular, estamos interessados em obter aproximações para as medições de alturas observadas de ondas em diferentes pontos a certa distância do *wavemaker* realizadas pelos referidos autores no experimento $n^{\circ}9$ que consta da tabela divulgada por Ursell et al. [13] (1960, p. 51). Esses pontos y_i^{obs} podem ser vistos na Fig. 3 de Ursell et al. [13] (1960, p. 45).

Na referida figura podem ser vistas várias medições de alturas de onda, y^{obs} , todas localizadas ao longo do canal na extensão entre 12 e 16 *foots* (*ft*) distante do *wavemaker*, e oscilando senoidalmente sobre um valor médio, sendo o comprimento de onda dessa oscilação igual a $\frac{L}{2}$, onde $L = 4.3 \text{ ft}$ é o comprimento de onda, sendo $1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm}$. Podemos destacar os seguintes parâmetros de interesse do experimento $n^{\circ}9$ objeto de nosso estudo, a saber:

$$H = 2.88 \text{ cm}, S = 1.51 \text{ cm}, h = 2.4 \text{ ft}, \epsilon_R = 5.9\%, T = 0.92 \text{ s},$$

$$\left(\frac{H}{S} \right)_m = 1.9, H_{teo} = 2.97 \text{ cm}, a_{teo} = 1.48 \text{ cm}, a = 1.47 \text{ cm}.$$

Embora os referidos autores não tenham discutido o parâmetro associado a vazamentos em torno do pistão, ele pode ser estimado a partir dos parâmetros a , a_{teo} e h com o uso da equação (40) proposta por Madsen [8] (1971, p. 8677). Desse modo, $C = 0.0011$, indicando que o vazamento no experimento $n^{\circ}9$ pode ser considerado negligenciável. Logo, os efeitos não lineares associados ao movimento de onda do experimento $n^{\circ}9$ incluem as reflexões, e possivelmente outros efeitos, que não o vazamento e que não são descritos pela teoria linear das ondas de pequena amplitude. Infelizmente, Ursell et al. [13] (1960, p.45) não divulgaram os valores exatos das observações y_i^{obs} do experimento $n^{\circ}9$, e nem dos demais listados na tabela 1. Entretanto, foi possível obter aproximações y_i para os valores observados do experimento com precisão de um dígito significativo, sendo o valor médio estimado para as alturas observadas usando aproximações foi $\langle H \rangle_{calc} = 2.97 \text{ cm}$, enquanto o valor médio das mesmas observações realizadas pelos referidos autores foi $\langle H \rangle = 2.86 \text{ cm}$, o que mostra a qualidade dos valores aproximados y_i para y_i^{obs} do experimento.

Dos valores $H_{max} = 3.14 \text{ cm}$ e $H_{min} = 2.754 \text{ cm}$ obtidos para esse novo conjunto de dados pode ser estimado o coeficiente de reflexão $\xi_R = 6.7\%$ por meio da eq (7.1) proposta por Ursell et al. [13] (1960, p.45), enquanto da eq (9) pode ser obtido $a_{teo} = 1.48 \text{ cm}$. O experimento $n^{\circ}9$ envolve ondas de pequenos passos, isto é, $\frac{H}{L} = 0.0219$. O modelo matemático usado para representar a variação da altura da onda é dado pela eq (11), onde o valor de $k_o = 1.45$ pode ser obtido da eq (8) [8] (1971, p. 8674). Segundo Madsen [8] (1971, p. 8677) para ondas de certo comprimento, e passos pequenos (URSELL et al. [13], 1960, p. 33), as propriedades reflectivas de uma praia podem ser vistas aproximadamente como constantes. Desse modo, bastaria um único experimento para se determinar os valores de ξ_R e δ . É possível, usando a equação (36) (MADSEN [8], 1971, p. 8677), obter uma estimativa para o ângulo de fase, $\delta = 2.08$ que aparece na equação senoidal $H(x)$ usada na representação das alturas y_i^{obs} dadas pela Figura 3 referente a corrida $n^{\circ}9$ (URSELL et al. [13], 1960, p. 45).

Usando $a = 1.00$ e $\delta = 0.50$, e considerando os vinte e cinco pontos (x_i, y_i) , onde $y_i \approx y_i^{obs}$, com $x_i = 12 + 0.16(i - 1)$, $i = 1, \dots, 25$ igualmente espaçados sobre o eixo horizontal, obtém-se após 4 iterações com o refinamento pelos mínimos quadrados não lineares, foram obtidos os valores $a = a_R = 1.52$ e $\delta_R = 2.00$. Essas estimativas ficaram em boa concordância com as obtidas para o problema original, a saber, $a_{teo} = 1.48 \text{ cm}$ e $\delta = 2.08$. A Figura 3 mostra as medidas das alturas y_i , com $i = 1, \dots, 25$ e as aproximações H_R obtida da eq (11) pelo refinamento dos mínimos quadrados não lineares, e a função H_2 considerando os parâmetros: $a_{teo} = 1.48 \text{ cm}$, $\xi_R = 6.7\%$, $\delta = 2.08$ e $C = 0.001$. Os resíduos $R_{wp} = 2.08\%$ para H_R e $R_{wp} = 4.0\%$

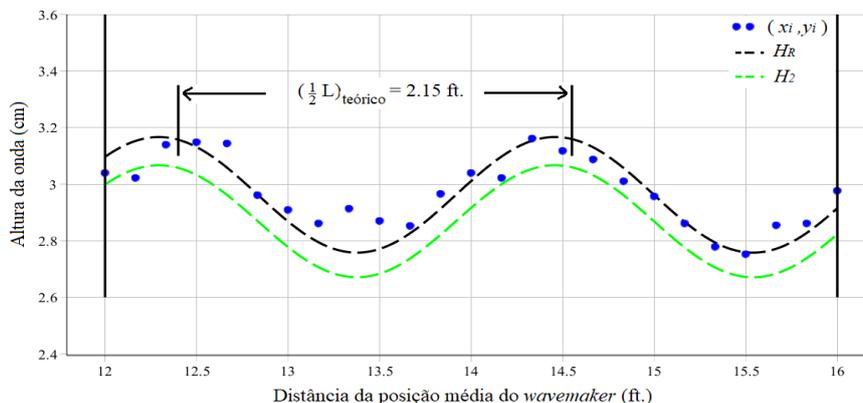


Figura 3: Círculos sólidos representam $y_i \approx y_i^{obs}$, a linha verde decorred da função H_2 , enquanto a linha preta é a função H_R .

para H_2 mostram uma boa concordância entre os dados $y_i \approx y_i^{obs}$ e os calculados pelos modelos, com o refinamento H_R sobressaindo. De fato, segundo Ursell et al. [13] (1960,

p.33) para esse tipo de onda, as alturas achadas usando a teoria do *wavemaker* ficam em média 3.4% abaixo da altura prevista pela teoria. Infelizmente Ursell et al. [13] (1960, p.45) não informaram os erros cometidos no ajuste dos pontos no experimento nº9.

3.2 Aplicação 2: Variações da altura da onda em função da distância do *wavemaker*

Essa aplicação é baseada no estudo realizado por Madsen [8] (1971, p. 8672-8683) que estendeu a teoria linear clássica do *wavemaker* do tipo pistão para uma teoria não linear de segunda ordem e, portanto, mais exata. Para testar a teoria, o autor realizou alguns experimentos no laboratório *Coastal Engineering Research Center (CERC)* onde um canal, ou tanque, de fundo plano e horizontal terminava em uma praia de inclinação 1:10 e distante 12 metros do gerador de ondas. Para reduzir a quantidade de reflexões causadas pela praia, ela foi coberta por duas camadas finas de 5 cm de espessura feitas de um material plástico fibroso. Maiores detalhes do aparato instrumental, e do sistema eletrônico de gravação de sinais utilizados são descritos por Madsen [8] (1971, p. 8678, 8680).

Para medir os efeitos não lineares que não estão incluídos na teoria linear simples de ondas de pequena amplitude, tais como a influência das reflexões e do vazamento do pistão, todos os experimentos foram realizados considerando o tanque com a profundidade da água $h = 38 \text{ cm}$ e um período $T = 2.75 \text{ s}$, o qual corresponde à relação $\frac{h}{L} = 0.074$, ou seja, para ondas de comprimentos relativamente longos. Segundo o autor, para assegurar que as ondas sejam um pouco não lineares a amplitude do movimento do *wavemaker* foi escolhido como $\xi_o = 3.05 \text{ cm}$. Usando a eq (9) pode-se obter $a_{teo} = 1.42 \text{ cm}$ com o valor $\sigma = \frac{aL^2}{h^2} = 6.8$ um pouco maior que o valor 6.5 para o qual ondas secundárias podem ser visíveis na onda principal a partir de certa distância do *wavemaker* (MADSEN [8], 1971, p. 8676).

Os resultados para a altura da onda foram medidos em intervalos de 15 cm ao longo do tanque, e as alturas observadas aqui indicadas por y_i^{obs} , podem ser vistas na Figura 2 (MADSEN [8], 1971, p. 8678). Dessa figura, e usando as eqs (37-38) Madsen [8] (1971, p. 8677- 8678) estimou $\xi_R = 0.057$ e $\delta = 55^\circ$ com exatidão ± 0.01 e $\pm 10^0$ para ξ_R e δ respectivamente. Da altura média da onda $\langle H \rangle = 2.35 \text{ cm}$, usando a eq (36) (MADSEN [8], 1971, p.8677) pode-se obter a amplitude do primeiro harmônico de onda gerado pelo *wavemaker*, $a = 1.13$. Usando esse valor de a e a amplitude teórica, resulta da eq (40) (MADSEN [8], 1971, p. 8677) uma estimativa para a constante de vazamento em torno do pistão, $C = 0.04$. Madsen [8] combinou as eqs (11) e (12) para ajustar as alturas observadas na extensão de 22 m do movimento senoidal de onda produzido pelo *wavemaker* dando origem a Figura 2 do referido autor.

Na referida figura pode ser notado uma boa concordância entre as alturas ob-

servadas e as correspondentes alturas previstas com o uso das eqs (11) e (12). Do mesmo modo que na aplicação 1, Madsen [8] não mostrou por meio de tabela os valores exatos das observações y_i^{obs} do experimento realizado, e nem dos demais casos que serão aqui analisados. Entretanto, foi possível obter aproximadamente esses valores com uma precisão de até um dígito, sendo que o valor médio estimado para as alturas observadas usando aproximações para as mesmas foi $\langle H \rangle = 3.37 \text{ cm}$, em concordância com o valor médio das mesmas observações realizadas pelos referidos autores, onde $\langle H \rangle = 2.35 \text{ cm}$, indicando com isso, a qualidade dos valores aproximados para $y_i \approx y_i^{obs}$. Dos valores $H_{max} = 2.53 \text{ cm}$ e $H_{min} = 2.21 \text{ cm}$ obtidos para esse novo conjunto de dados pode ser estimado o coeficiente de reflexão $\xi_R = 0.068$. O modelo matemático usado para representar a variação da altura da onda com as observações estimadas $y_i \approx y_i^{obs}$ é dado pela eq (11).

Usando $a = 1.00 \text{ cm}$ e $\delta = 55^\circ$, e considerando os quarenta e dois pontos (x_i, y_i) , da Figura 2 (MADSEN [8], 1971, p. 8678) onde $y_i \approx y_i^{obs}$, com $x_i = 4.85 + 0.158(i - 1)$; $i = 1, \dots, 42$ igualmente espaçados sobre o eixo horizontal, obtém-se após 4 iterações, com o método dos mínimos quadrados não lineares, os parâmetros $a = a_R = 1.19$ e $\delta = \delta_R = 68^\circ$. O parâmetro de amplitude ficou em boa concordância com o mesmo parâmetro do problema original, enquanto o ângulo de fase obtido do refinamento está em concordância razoável com o obtido pelos referidos autores para o caso analisado. De posse desses parâmetros, usando a eq (40) (MADSEN [8], 1971, p. 8677) obtém-se $C = 0.035$, próximo do valor $C = 0.040$ obtido no experimento. A Figura 4 mostra as medidas das alturas y_i , com $i = 1, \dots, 42$ e as aproximações H_R obtida da eq (11) pelo refinamento dos mínimos quadrados não lineares, e a função H_2 considerando $a = 1.14 \text{ cm}$, $\delta = 55^\circ$ e $\xi = 0.068$.

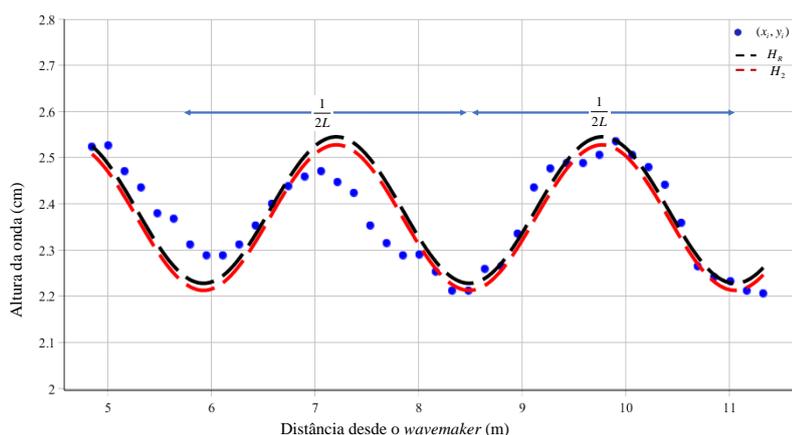


Figura 4: Círculos sólidos representam $y_i \approx y_i^{obs}$, a linha segmentada em preto é a função H_R , enquanto a linha segmentada em vermelho é a função H_2 .

O resíduo $R_{wp} = 2.03\%$ foi praticamente o mesmo para H_r e H_2 mostrando uma boa concordância entre os dados aproximados y_i e os prescritos pelos modelos. O valor para o coeficiente de reflexão $\xi_R = 0.068$, obtido pelo refinamento, encontra-se dentro da margem de exatidão do parâmetro determinado para o experimento original.

3.3 Aplicação 3

Essa aplicação também é baseada no experimento descrito na aplicação 2, apenas considerando $\xi_o = \frac{S}{2} = 6.1 \text{ cm}$. Esse valor para ξ_o , corresponde ao valor teórico $\sigma_o = \frac{aL^2}{h^3}$ próximo a $\sigma_o = 13.14$ dado pela eq (22) (MADSEN [8], 1971, p. 8675) que é o limite de aplicabilidade da teoria de segunda ordem de Stokes (STOKES [12], 1880, LOPES et al. [6] 2018). Nesse experimento, os perfis de deslocamento da onda foram gravados em duas estações de medições localizadas as distâncias $x = 4.9 \text{ m}$ e $x = 8.7 \text{ m}$ do *wavemaker*, sendo que o tempo t foi permitido variar na extensão de um período de tempo $T = 2.75 \text{ s}$. Duas figuras respectivamente denominadas 3.a e 3.b foram apresentadas para cada região de medição, por Madsen [8] (1971, p. 8680) onde são mostrados os perfis $\eta_{3a}(x = 4.9, t)$ e $\eta_{3b}(x = 8.7, t)$ observados, e os previstos utilizando a eq (22).

Caso 3.a:

Foram obtidas aproximações para $\eta_{3a}(x = 4.9, t)$ denominadas η_i , onde $\eta_i \approx \eta_{3a}$, com $t(i) = 0.255 + 0.131(i - 1)$; $i = 1, \dots, 20$. O valor da amplitude teórica $a_{teo} = 2.83 \text{ cm}$, foi obtido da eq (9). Madsen [8] (1971) não informou os parâmetros necessários para a obtenção da amplitude do primeiro harmônico de movimento a ser calculado usando a equação (41) ([8], 1971, p. 8677), onde são considerados efeitos não lineares. Por isso, usamos somente os parâmetros obtidos do refinamento com o modelo de perfil de superfície de onda dado pela eq (22) considerando como ponto de partida o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (2.00, 0.012, 0.027)$. Depois de 4 iterações o método iterativo para os mínimos quadrados não lineares convergiu para o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (2.58, 0.010, 0.022)$.

É possível notar que a amplitude do primeiro harmônico $a = 2.58 \text{ cm}$ obtido do refinamento parece indicar que o mesmo incorporou as correções dos efeitos decorrentes das influências não lineares devido ao movimento de onda, ao mesmo tempo em que os valores para k_o e κ oriundos do refinamento pelos mínimos quadrados não lineares, não diferem significativamente dos valores $k_o = 0.012$ e $\kappa = 0.027$ calculados respectivamente pelas eqs (12) e (25) (MADSEN [8], 1971, p. 8674-8675). O resultado desse ajuste usando a eq (22) com os mínimos quadrados não lineares, e os pontos $\eta_i \approx \eta_{3a}$ pode ser visto na Figura 5a. É possível notar uma boa concordância entre os resultados previstos com a referida equação com os parâmetros refinados e os pontos

$\eta_i \approx \eta_{3a}$. De fato, o resíduo $R_{wp} = 9.6\%$ confirma a boa qualidade do ajuste.

Caso 3.b:

O caso 3.b é análogo ao caso 3.a, apenas considerando $\eta_i \approx \eta_{3b}$ como aproximações para os valores observados $\eta_{3b}(x = 8.7, t)$, com $t(i) = 0.255 + 0.131(i - 1)$; $i = 1, \dots, 20$. O valor da amplitude teórica $a_{teo} = 2.87 \text{ cm}$ é obtido da eq (9). Considerando como ponto de partida o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (2.00, 0.012, 0.027)$, o procedimento iterativo dos mínimos quadrados não lineares convergiu após poucas iterações, convergindo para o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (2.32, 0.012, 0.029)$. O valor da amplitude corrigida $a = 2.32 \text{ cm}$ obtida do refinamento parece indicar que os efeitos não lineares foram mais acentuados nessa posição da onda dentro do período de tempo de duração T . Apesar disso, pode ser notado que o perfil da onda previsto pela eq (22) utilizando os parâmetros do refinamento concorda razoavelmente com os valores estimados para η_i obtidos como aproximações dos valores observados η_{3b} . O resíduo $R_{wp} = 14.9\%$ é um bom indicador dessa razoável concordância entre os dados aproximados observados o perfil da onda calculada com os parâmetros do refinamento. A Fig. 5b mostra os dados aproximados do perfil de onda com os perfis calculados usando os parâmetros obtidos do refinamento.

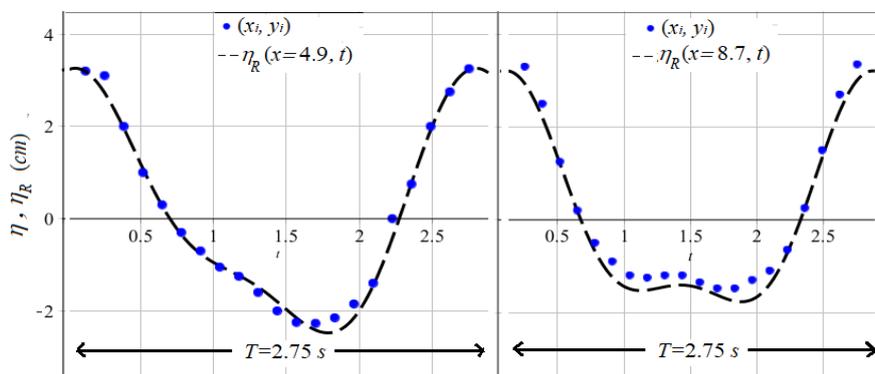


Figura 5: Comparação entre o perfil de superfície observado e o previsto, η_R utilizando os mínimos quadrados não lineares. (a) estação em $x = 4.9m$ e (b) estação em $x = 8.7m$.

Os gráficos da Figura 5 mostram claramente a existência de ondas secundárias formando-se nos vales das ondas principais.

3.4 Aplicação 4

Essa aplicação também é baseada no experimento descrito na aplicação 2, apenas considerando $\xi_o = \frac{S}{2} = 12.2 \text{ cm}$. Esse valor para ξ_o , corresponde ao dobro da

amplitude do *stroke* do caso anterior, o que leva ao valor teórico $\sigma_o = \frac{aL^2}{h^3} = 27.2$ excedendo em muito, o valor máximo $\sigma_o < \frac{4\pi^2}{3}$ para o qual a teoria de segunda ordem de Stokes [12] dada pela eq (22) é aplicável. Nesse experimento, os perfis de deslocamento da onda foram gravados em duas estações de medições localizadas as distâncias $x = 4.9m$ e $x = 8.7m$ do *wavemaker*, sendo que o tempo t foi permitido variar na extensão de um período de tempo $T = 2.75 s$. Duas figuras respectivamente denominadas 4.a e 4.b foram apresentadas para cada caso por Madsen [8] (1971, p. 8680) onde são mostrados os perfis $\eta_{4a}(x = 4.9, t)$ e $\eta_{4b}(x = 8.7, t)$ observados, e os previstos utilizando a eq (22).

Caso 4.a:

Foram obtidas aproximações para $\eta_{4a}(x = 4.9, t)$ denominadas η_i , onde $\eta_i \approx \eta_{4a}$, com $t(i) = 0.255 + 0.131(i - 1), i = 1, \dots, 20$. O valor da amplitude teórica $a_{teo} = 5.67 cm$ é obtido da eq (9). Madsen [8] (1971) não informou os parâmetros necessários para a obtenção da amplitude do primeiro harmônico de movimento a a ser calculado usando a eq (41), onde são considerados efeitos não lineares. Por isso, usamos somente os parâmetros obtidos do refinamento com o modelo de perfil de superfície de onda dado pela eq (22) considerando como ponto de partida o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (5.00, 0.012, 0.024)$. Depois de 5 iterações o procedimento iterativo pelos mínimos quadrados não lineares convergiu para o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (5.26, 0.011, 0.023)$.

É possível notar que a amplitude do primeiro harmônico $a = 5.26 cm$ obtido do refinamento indica que capturou de modo significativo às correções dos principais influências não lineares devido ao movimento de onda, ao mesmo tempo em que os valores para k_o e κ oriundos do refinamento não diferem significativamente dos valores $k_o = 0.012$ e $\kappa = 0.027$ calculados respectivamente pelas eqs (12) e (25) (MADSEN [8], 1971, p. 8674-8675). O resultado desse ajuste usando a eq (22) e os pontos η_i pode ser visto na Figura 6a. É possível notar uma fraca concordância entre os resultados previstos com a referida equação usando os parâmetros obtidos do refinamento e os pontos $\eta_i \approx \eta_{4a}$, como indica o resíduo $R_{wp} = 23.3\%$.

Caso 4.b:

O caso 4.b é análogo ao caso 4.a, apenas considerando $\eta_i \approx \eta_{4b}$ como aproximações para os valores observados $\eta_{4b}(x = 8.7, t)$, com $t(i) = 0.255 + 0.131(i - 1), i = 1, \dots, 20$. O valor da amplitude teórica $a_{teo} = 5.67 cm$ é obtido da eq (9). Considerando como ponto de partida o vetor de parâmetros $(a, k_o, \kappa) = (6.5, 0.012, 0.024)$, onde k e κ e foram calculados respectivamente pelas equações (12) e (25) (MADSEN [8], 1971, p. 8674-8675). Depois de 5 iterações o programa usando o procedimento iterativo com os mínimos quadrados não lineares convergiu para o vetor de parâmetros

$(a, k_o, \kappa) = (4.42, 0.013, 0.030)$. O valor para $a = 4.42 \text{ cm}$ obtido do refinamento parece indicar que os efeitos não lineares foram mais acentuados nessa posição da onda dentro do período de tempo de duração T , devido à maior amplitude do *stroke* S . O resíduo $R_{wvp} = 26.0\%$ indica uma pobre concordância entre os dados observados η_i e o ajuste usando o modelo dado pela eq (22) (MADSEN [8], 1971, p. 8675) com os parâmetros refinados. A Fig. 6b mostra o dados aproximados para o movimento de onda superficial e os dados de movimento calculados com o refinamento.

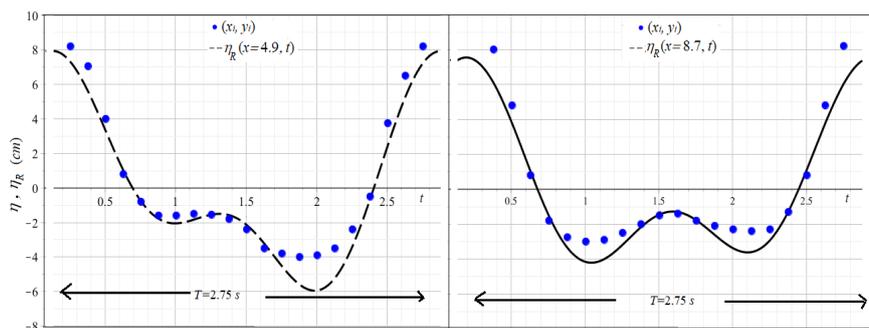


Figura 6: Comparação entre o perfil de superfície observado e o previsto, η_R utilizando os mínimos quadrados não lineares. (a) estação em $x = 4.9 \text{ m}$ (b) estação em $x = 8.7 \text{ m}$.

Os gráficos da Figura 6 mostram claramente a existência de ondas secundárias de maior severidade formando-se nos vales das ondas principais. Apesar da pequena concordância entre os pontos e a função de ajuste usando os mínimos quadrados não lineares, ainda assim, é possível notar que os perfis previstos das ondas geradas pelo *wavemaker* nas duas estações, acompanham de forma qualitativa os dados aproximados, ou seja, a solução obtida para o perfil fornece informações relevantes sobre o movimento de onda.

4 Conclusões

Quatro casos de ondas superficiais geradas por um *wavemaker* do tipo pistão foram analisados a luz dos mínimos quadrados não lineares. O primeiro trata de ondas de pequenos passos ou ondas de pequena amplitude, enquanto os demais são decorrentes da geração de ondas longas pelo *wavemaker*. Os dois primeiros casos foram tratados com a teoria do primeiro harmônico de onda, onde são contemplados os efeitos não lineares do movimento como, a reflexão e o vazamento de água em torno do pistão. Os demais casos foram analisados com a teoria de segunda ordem de Stokes [12]. Em todos os casos foram adotadas funções conhecidas da literatura para a descrição dos perfis de cada onda analisada, cujos parâmetros de interesse foram refinados pelos mínimos quadrados não lineares.

Os perfis descritos por essas funções se ajustaram adequadamente as aproximações dos dados observados, com exceção do último caso, que se encontra muito fora da aplicabilidade da teoria de segunda ordem de Stokes, mas que mesmo assim, apresentou perfis de onda que se assemelhavam aos dados observados. A metodologia do refinamento pelos mínimos quadrados não lineares, não vista em nenhum dos artigos referenciados sobre o assunto, mostrou relevância pelo fato que certos parâmetros envolvidos no uso das equações teóricas da teoria do *wavemaker* do tipo pistão, tais como, o coeficiente de reflexão e a fase do ângulo do movimento da onda principal não necessitam ser conhecidos com exatidão, mas apenas com estimativas razoáveis de modo a prover um conjunto inicial de parâmetros que são usados para a inicialização do refinamento.

Referências

- [1] Dalrymple R. A. Dean, R. G. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. World Scientific, Singapore, 1 edition, 1991.
- [2] Rienecker M.M. Fenton, J. D. Accurate numerical solutions for nonlinear waves. *In Coastal Engineering. American Society of Civil Engineers*, page 50–69, 1980.
- [3] Gusa R. Flick, R. Paddle generated waves in laboratory channels. *Journal of the waterway port coastal and ocean division*, 160(1):79–97, 1980.
- [4] Abe Y. Goda, Y. Apparent coefficient of partial reflection os finite amplitude waves. *Report of the Port and Harbour Research Institute*, 7(1):1–59, 1968.
- [5] Ružić I. Ožanić N. Krvavica, N. New approach to flap-type wavemaker equation with wave breaking limit. *Coastal Engineering Journal*, 60(1):69–78, 2018.
- [6] Mujtaba B. Oliveira F. Lopes, A. J. P. P. G. Preliminary laboratorial determination of the reefs novel wave energy converter power output. *Renewable Energy An International Journal*, 122:654–664, 2018.
- [7] Mei C. C. Savage R. P. Madsen, O. S. The evolution of time-periodic long waves of finite amplitude. *Journal Fluid Mechanics*, 44(1):196–208, 1970.
- [8] O. S. Madsen. On the generation of long waves. *Journal of Geophysical Research*, 6(36):8672–8683, 1971.
- [9] Neto F.D. M. Neto, A. J. S. *Problemas Inversos*. Ed. Uerj, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] M. Stiassnie. Tsunamis and acoustic-gravity waves from underwater earthquakes. *Journal of Engineering Mathematics*, 67(1-2):23–32, 2009.
- [11] J. J. Stoker. *The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers Inc., New York, 1957.

- [12] G. G. Stokes. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves. *Mathematical and physical papers*. Cambridge: University Press, 1:314–326, 1880.
- [13] Dean R. G. Yu Y. S. Ursell, F. Forced small amplitude water waves: a comparison of theory and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 7(1):33–52, 1960.
- [14] R. A. Young. *The Rietveld Method*. International Union of Crystallography, New York, NY. USA, 2002.