

---

# A sequência de Fibonacci e o cálculo da entropia de um automorfismo do toro

**Fábio Corrêa de Castro**

fabio.castro@ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brazil

**Leandro Domingues**

leandro.domingues@ufes.br

Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, ES, Brazil

---

## Resumo

Usando a sequência de Fibonacci, apresentaremos um novo cálculo da entropia do automorfismo  $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$  do toro  $\mathbb{T}^2$ , de forma efetiva e seguindo o passo a passo da definição.

## Palavras-chave

Entropia, Sequência de Fibonacci, Automorfismo, Toro.

## 1 Introdução

O nosso propósito é conduzir o leitor que não é da área de Sistemas Dinâmicos a contextualizar o conceito de entropia e a compreender, ao longo do texto, os termos técnicos que compõem o nosso principal resultado que, precisamente, é o cálculo da entropia da transformação  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  no toro  $\mathbb{T}^2$ , dada por  $(x, y) \mapsto (2x + y, x + y)$ , considerando o sistema conservativo  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{A}, \mu, T)$ , onde  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel<sup>1</sup> e  $\mu$  é a medida de Lebesgue. Isto é um resultado já bem conhecido na literatura, inclusive para automorfismos quaisquer de  $\mathbb{T}^2$  ([3], pág. 177). Nossa motivação é apresentar a relação do automorfismo  $T$  acima com a sequência de Fibonacci e como isso nos permite calcular, de um modo particular, a entropia de  $T$  por meio desta relação. Neste sentido, começemos com um apanhado geral da área.

Sistemas Dinâmicos é uma área da Matemática relativamente nova, com seus primórdios nos trabalhos de Kepler e Newton, mas que foi consolidada somente a partir dos trabalhos de Poincaré no final do século XIX. O interesse teórico é o estudo da *evolução* de uma família  $f^t : X \rightarrow X$  de funções, quando o “tempo”  $t$  varia num certo conjunto. Basicamente temos dois tipos de sistemas dinâmicos: os discretos e os contínuos. Os discretos, como o nome já diz, são aqueles onde o tempo varia num conjunto discreto, como por exemplo os inteiros ou uma estrutura algébrica finita. Os contínuos são aqueles onde o tempo varia num conjunto contínuo como o dos números reais.

---

<sup>1</sup>É a intersecção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contêm o conjunto dos abertos do plano, também chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos.

Um exemplo de sistema discreto bastante estudado é o seguinte: dada uma função  $f : X \rightarrow X$ , onde  $X \neq \emptyset$  é um conjunto qualquer, considere a família  $f^n : X \rightarrow X$  de funções dadas por  $f^n = \overbrace{f \circ f \cdots \circ f}^n$ . Neste caso, uma das coisas que estamos interessados em entender é, para cada  $x$  em  $X$ , a evolução da sequência  $\mathcal{O}_f^+(x) = \{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$  (órbita positiva de  $x$ ) que é a evolução de  $x$  por  $f^t$  ao longo do tempo. Essa construção é tão comum que a própria função  $f$  já é chamada de sistema dinâmico discreto, pois basta tê-la em mãos para que o sistema completo, como descrito, seja exibido. Aqui trataremos apenas dos sistemas dinâmicos discretos.

Num sistema  $f : X \rightarrow X$ , conforme  $X$  adquire certas estruturas e  $f$  preserva propriedade nessa estrutura, o sistema fica cada vez mais abstrato e mais difícil de ser estudado. Por exemplo, se  $X$  possui uma *estrutura topológica* e  $f$  é *contínua*, podemos indagar se existe  $x$  tal que  $\mathcal{O}_f^+(x)$  é *densa*. Quando  $X$  possui uma *estrutura de medida* e  $f$  *preserva essa medida*, podemos perguntar qual é a medida do conjunto dos elementos  $x$  com órbita finita. Além de tudo isso, há o interesse em diferenciar os sistemas dinâmicos, pois alguns deles *são idênticos* do ponto de vista da dinâmica. Para isso, foi criada uma ferramenta chamada *entropia métrica*, que é um número associado a certos tipos de sistemas dinâmicos, que é sempre o mesmo para sistemas idênticos, e em alguns casos vale até a recíproca ([5]). Em geral, não é uma tarefa fácil calcular diretamente a entropia de um sistema dado, conforme veremos aqui. Agora, vamos aos detalhes dos principais conceitos deste trabalho. Iniciaremos apresentando o toro e a transformação que iremos estudar.

## 2 A transformação no toro

O 2-toro  $\mathbb{T}^2$ , ou somente toro, é obtido a partir de uma relação de equivalência no plano, onde identificamos pontos cuja diferença é um ponto com coordenadas inteiras. Mais precisamente, é o conjunto quociente do plano cartesiano pela relação de equivalência  $R$  dada por  $(a, b)R(x, y) \Leftrightarrow (a, b) - (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . Assim, o toro é o conjunto das classes de equivalência dessa relação. Isso pode ser entendido como um ladrilhamento do plano onde cada peça, o toro, é um quadrado com vértices de coordenadas inteiras onde pontos de lados opostos da fronteira e que são paralelos aos eixos, são idênticos. Note que o toro é invariante por translações unitárias paralelas aos eixos cartesianos. Note também que os quatro vértices do quadrado no plano é um só ponto no toro. Se você faz isso com uma folha de papel quadrada, irá obter uma superfície que se parece com uma câmara de ar usada em pneus ou com uma rosquinha, conforme a Figura 1 abaixo.

O sistema dinâmico que iremos estudar no toro é o definido pela aplicação linear

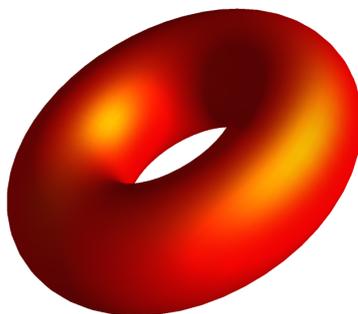


Figura 1: Fonte Wikipedia

$T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x + y, x + y),$$

cuja inversa é  $T^{-1}(x, y) = (x - y, 2y - x)$ . Note que  $T$  define bem uma aplicação no toro pois se  $(a, b) - (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , então  $T(a, b) - T(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ . O sistema dinâmico definido por  $T$  representa uma classe importante de sistemas no toro que são os automorfismos do toro ([3], p. 44). Os autovalores de  $T$  são os números reais  $\lambda$  e  $\frac{1}{\lambda}$ , onde

$$\lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \tag{1}$$

cujos respectivos autovetores são  $\vec{v} = (1, \frac{\sqrt{5} - 1}{2})$  e  $\vec{w} = (\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1)$ . Note que  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são ortogonais e que  $T$  expande (em relação à origem) na direção do autoespaço gerado por  $\vec{v}$  e contrai na direção do autoespaço gerado por  $\vec{w}$ .

Para simplificar algumas expressões e argumentos, consideremos a constante

$$\phi = \lambda - 2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \tag{2}$$

que cumpre a relação

$$\phi^2 = 1 - \phi. \tag{3}$$

Com isso, escrevemos  $\vec{v} = (1, \phi)$  e  $\vec{w} = (-\phi, 1)$ , ambos com norma igual a  $\sqrt{1 + \phi^2}$ .

A nossa missão é calcular na “força bruta” a entropia desta aplicação. Para isto, vamos ao conceito de entropia.

### 3 Entropia

Aqui faremos um breve resumo sobre o assunto. Para mais detalhes, sugerimos [2] e [6].

Fixemos um espaço de probabilidade  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  e  $\mu$  é uma medida de probabilidade sobre  $\mathcal{A}$ , com  $\mu(X) = 1$ . Uma transformação  $T : X \rightarrow X$  preserva a medida  $\mu$  quando, para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  e  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ . Neste caso, dizemos que a quádrupla  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  é um sistema conservativo.

Um conjunto finito  $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$  é uma *partição* de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  quando:

1.  $\mu(A_i) > 0$ , para todo  $i$ ;
2.  $i \neq j \Rightarrow \mu(A_i \cap A_j) = 0$ ;
3.  $\mu(X - \bigcup_{i=1}^n A_i) = 0$ .

Se  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_m$  são partições finitas,  $\bigvee_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \dots \vee \mathcal{P}_m$  denotará a partição cujos elementos são os conjuntos da forma  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$ , com  $A_i \in \mathcal{P}_i$ , para todo  $i$ , e  $\mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) > 0$ .

Dado um sistema conservativo  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , a entropia  $h(T)$  de  $T$  é o número obtido a partir dos três seguintes passos:

1) para cada partição finita  $\mathcal{P}$  de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , definimos a entropia de  $\mathcal{P}$  como sendo o número

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{A \in \mathcal{P}} \mu(A) \ln(\mu(A)).$$

2) definimos a entropia de  $T$  em relação a  $\mathcal{P}$  como sendo o número

$$h(T, \mathcal{P}) = \limsup_k \frac{1}{k} H \left( \bigvee_{j=0}^{k-1} T^{-j} \mathcal{P} \right),$$

onde  $T^{-j} \mathcal{P} = \{T^{-j} A; A \in \mathcal{P}\}$ .

3) finalmente temos  $h(T) = \sup_{\mathcal{P}} h(T, \mathcal{P})$ , com  $\mathcal{P}$  variando no conjunto de todas as partições finitas de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

Para o cálculo de  $h(T)$ , usaremos um resultado importante que é o Teorema de Kolmogorov-Sinai ([2], p. 96):

Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  um sistema conservativo com  $T$  invertível e  $\mathcal{P}$  uma partição finita de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  tal que  $\mathcal{A}$  coincide com a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} T^j \mathcal{P}$ . Então,  $h(T) = h(T, \mathcal{P})$ .

O nosso objetivo é calcular a entropia da transformação  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  da seção anterior, considerando o sistema conservativo  $(\mathbb{T}^2, \mathcal{A}, \mu, T)$ , onde  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel<sup>2</sup> e  $\mu$  é a medida de Lebesgue. Neste caso,  $T$  preserva a medida de Lebesgue pois  $\det(T) = 1$ .

Fatos como a existência de  $h(T)$ , que  $h(T) = h(T^{-1})$  (se  $T$  é invertível) e a prova do Teorema acima, podem ser verificados em [1], [2] e [3].

Usaremos o Teorema de Kolmogorov-Sinai aplicando-o numa partição  $\mathcal{P}$  que descreveremos a seguir.

#### 4 A partição do toro

A partição  $\mathcal{P}$  do toro que será considerada é a de Markov, que é formada pelos conjuntos  $P$  e  $G$ , conforme a figura abaixo, onde  $P$  representa o retângulo menor (pequeno) e  $G$  representa o retângulo maior (grande).

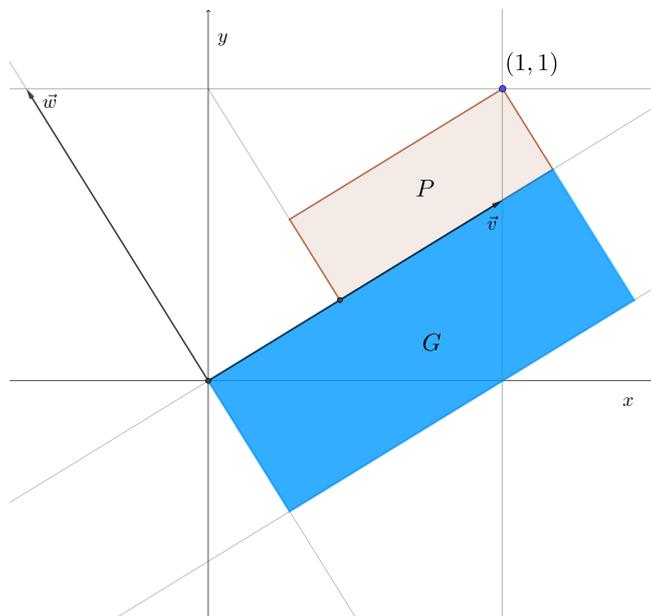


Figura 2:

Aqui, os lados maiores dos retângulos são paralelos ao vetor  $\vec{v}$  e os lados menores

<sup>2</sup>É a intersecção de todas as  $\sigma$ -álgebras que contêm o conjunto dos abertos do plano, também chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos usuais do plano.

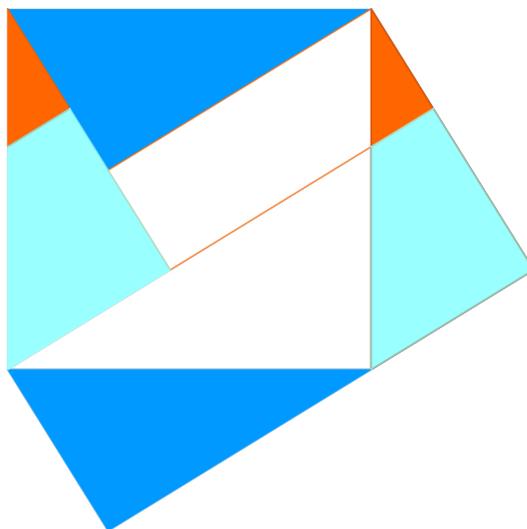


Figura 3:

são paralelos ao vetor  $\vec{w}$ , de modo que o prolongamento de qualquer lado de um dos retângulos contém um vértice do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . A Figura 2 mostra os dois retângulos que formam a partição. A Figura 3 mostra como os retângulos cobrem o toro. Para mais detalhes sobre a Partição de Markov, sugerimos a leitura da Seção 5.2 de [1].

Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $T^n \mathcal{P}$  ainda é uma partição de  $\mathbb{T}^2$ . Além disso, sendo a aplicação  $T$  é uma  $\lambda$ -expansão na direção de  $\vec{v}$  e uma  $\lambda$ -contração na direção de  $\vec{w}$ , para  $n > 1$ ,  $T^n \mathcal{P}$  pode ser visualizado em  $\mathbb{R}^2$  como a união de dois retângulos formados por um alongamento de  $\mathcal{P}$  em  $\lambda^n$  vezes na direção de  $\vec{v}$  e um encolhimento de  $\mathcal{P}$  de  $\frac{1}{\lambda^n}$  vezes na direção de  $\vec{w}$ , ocorrendo o inverso quando  $n < 0$ . Com isso, a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é gerada por  $\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} T^j \mathcal{P}$  pois  $T^{-n} \vee \mathcal{P} \vee T^n$  é uma partição do toro composta por retângulos com lados não maiores do que  $\frac{1}{\lambda^n}$  (comprimento de  $G$ ). Assim, considerando todos os  $n \in \mathbb{N}$ , o interior desses retângulos são abertos que geram a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Isso nos permite usar o Teorema de Kolmogorov-Sinai sobre a partição  $\mathcal{P}$  para calcular  $h(T)$ .

**Observação 1.** Como  $h(T) = h(T^{-1})$  ([2], [6]), faremos as contas na forma  $h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} H(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P}))$  em vez de  $h(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{P}))$ , ou seja, usaremos as iterações para frente ao invés de para trás e com um termo a mais.

## 5 A Sequência de Fibonacci

Definimos  $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , ditos *números de Fibonacci*.  $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  é chamada de Sequência de Fibonacci. Estes números satisfazem as seguintes equações:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{4}$$

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad n \geq 0. \tag{5}$$

Temos assim

$$(F_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\dots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots),$$

onde  $0 = F_0$ . A relação dos números de Fibonacci com a transformação  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  é estabelecida no próximo lema:

**Lema 1.** *Sejam  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$  e  $\vec{e} = (1, 1)$ , vértices do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , valem as seguintes identidades:*

1.  $T^n \vec{e} = (F_{2n+2}, F_{2n+1})$ .
2.  $T^n \vec{e}_1 = (F_{2n+1}, F_{2n})$ .
3.  $T^n \vec{e}_2 = (F_{2n}, F_{2n-1})$ .

*Demonstração.* Provemos a primeira identidade. Com efeito, segue da definição de  $T$  que  $T\vec{e} = (3, 2) = (F_4, F_3)$ . Agora, supondo válida a identidade para um certo inteiro  $n$ , temos que  $T^{n+1}\vec{e} = TT^n\vec{e} = T(F_{2n+2}, F_{2n+1}) = (2F_{2n+2} + F_{2n+1}, F_{2n+2} + F_{2n+1})$ . Decorre da equação (4) que a identidade vale para  $n + 1$ . Por outro lado, ainda supondo-a válida para um inteiro  $n$ , temos que  $T^{n-1}\vec{e} = T^{-1}T^n\vec{e} = T^{-1}(F_{2n+2}, F_{2n+1}) = (F_{2n+2} - F_{2n+1}, 2F_{2n+1} - F_{2n+2})$ . Novamente pela equação (4), segue que a identidade vale para  $n - 1$ . Utilizando o Princípio de Indução, é fácil concluir que a primeira identidade vale para todo inteiro  $n$ . Como  $T\vec{e}_2 = \vec{e}$ , temos que  $T^n\vec{e}_2 = T^{n-1}\vec{e}$ , donde segue a terceira identidade a partir da primeira. A segunda identidade decorre de  $\vec{e}_1 = \vec{e} - \vec{e}_2$ , da linearidade de  $T$ , das identidades já provadas e da equação (4). ■

As fórmulas obtidas até agora serão aplicadas para medirmos os conjuntos  $T^n(P)$  e  $T^n(G)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Para iniciar essa tarefa, considere  $\beta = \left\{ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \right\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são os autovetores de  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . A matriz de

mudança da base canônica para a base  $\beta$  é dada por

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} \begin{bmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

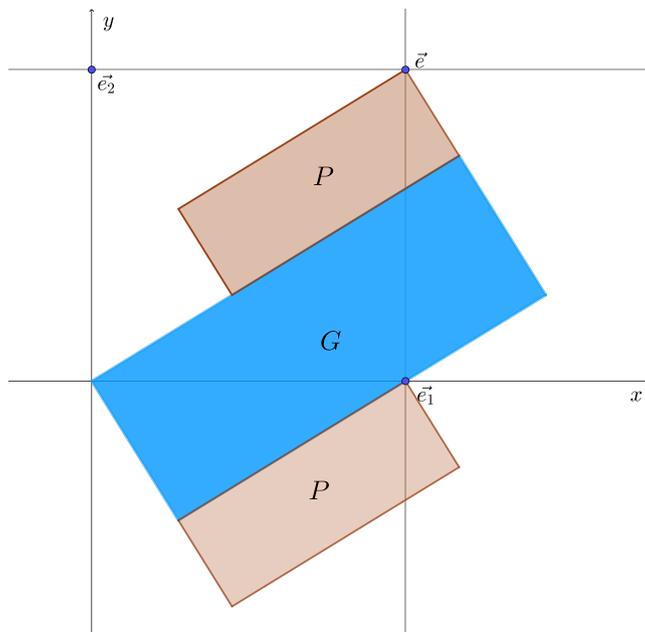


Figura 4:

**Observação 2.** De agora em diante, comprimento significa medir na direção de  $\vec{v}$ , e largura significa medir na direção de  $\vec{w}$ .

**Lema 2.** Sobre as medidas dos lados de  $P$  e  $G$ , temos as seguintes identidades:

$$c = \text{comprimento de } P = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}}; \quad (7)$$

$$l = \text{largura de } P = \frac{1 - \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}; \quad (8)$$

$$C = \text{comprimento de } G = \frac{1 + \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}; \quad (9)$$

$$L = \text{largura de } G = \frac{\phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}. \quad (10)$$

*Demonstração.* Considere  $\pi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção na  $i$ -ésima coordenada. Para a primeira identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $P$  inferior e note que o comprimento de  $P$  é dado por  $\pi_1(M \cdot \vec{e}_1)$ , que é a primeira coordenada do vetor  $\vec{e}_1$  na base  $\beta$ .

Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $e_1^{\vec{}}$  obtemos um vetor com primeira coordenada  $c = \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . Para a segunda identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $P$  superior e note que a largura de  $P$  é dada por  $\pi_2(M \cdot \vec{e})$ , que é a segunda coordenada do vetor  $\vec{e}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $\vec{e}$  obtemos um vetor com segunda coordenada  $l = \frac{1-\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . Para a terceira identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $G$  e note que o comprimento de  $G$  é dado por  $\pi_1(M \cdot \vec{e})$ , que é a primeira coordenada do vetor  $\vec{e}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $\vec{e}$  obtemos um vetor com primeira coordenada  $C = \frac{1+\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . Para a quarta identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $G$  e note que a largura de  $G$  é dada por  $|\pi_2(M \cdot e_1^{\vec{}})|$ , que é o módulo da segunda coordenada do vetor  $e_1^{\vec{}}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $e_1^{\vec{}}$  obtemos um vetor cujo módulo da segunda coordenada é  $L = \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . ■

De forma mais geral, usando as identidades do Lema 1, obtemos as dimensões dos conjuntos  $T^n(P)$  e  $T^n(G)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , da seguinte forma:

**Lema 3.** *Sobre as dimensões de  $T^n(P)$  e  $T^n(G)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , temos as seguintes identidades:*

$$\text{Largura de } T^n(P) = \frac{-\phi F_{2n+2} + F_{2n+1}}{\sqrt{1+\phi^2}}; \tag{11}$$

$$\text{Comprimento de } T^n(P) = \frac{F_{2n+1} + \phi F_{2n}}{\sqrt{1+\phi^2}}; \tag{12}$$

$$\text{Largura de } T^n(G) = \frac{\phi F_{2n+1} - F_{2n}}{\sqrt{1+\phi^2}}; \tag{13}$$

$$\text{Comprimento de } T^n(G) = \frac{F_{2n+2} + \phi F_{2n+1}}{\sqrt{1+\phi^2}}. \tag{14}$$

*Demonstração.* Observemos inicialmente que, como  $T$  expande na direção de  $\vec{v}$  e contrai na direção de  $\vec{w}$ ,  $T$  preserva a direção das retas paralelas a  $\vec{v}$  ou a  $\vec{w}$ ; em particular, preserva a direção dos lados dos retângulos  $P$  e  $G$ .

Para a primeira identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $P$  superior e note que a largura de  $T^n(P)$  é dada por  $\pi_2(M \cdot T^n \vec{e})$ , que é a segunda coordenada do vetor  $T^n \vec{e}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $T^n \vec{e} = (F_{2n+2}, F_{2n+1})$ , obtemos um vetor com segunda coordenada igual a  $\frac{-\phi F_{2n+2} + F_{2n+1}}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . Para a segunda identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $P$  inferior e note que o comprimento de  $T^n(P)$  é dado por  $\pi_1(M \cdot T^n e_1^{\vec{}})$ , que é a primeira coordenada do vetor  $T^n e_1^{\vec{}}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $T^n e_1^{\vec{}} = (F_{2n+1}, F_{2n})$ , obtemos um vetor com primeira coordenada igual a  $\frac{F_{2n+1} + \phi F_{2n}}{\sqrt{1+\phi^2}}$ . Para a terceira identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $G$  e note que a largura de  $T^n(G)$  é dada por  $|\pi_2(M \cdot T^n e_1^{\vec{}})|$ , que é o módulo

da segunda coordenada do vetor  $T^n \vec{e}_1$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $T^n \vec{e}_1 = (F_{2n+1}, F_{2n})$ , obtemos um vetor cujo módulo da segunda coordenada é igual a  $\frac{\phi F_{2n+1} - F_{2n}}{\sqrt{1 + \phi^2}}$ . Para a quarta identidade, observe na Figura 4 o retângulo  $G$  e note que o comprimento de  $T^n(G)$  é dado por  $\pi_1(M \cdot T^n \vec{e})$ , que é a primeira coordenada do vetor  $T^n \vec{e}$  na base  $\beta$ . Assim, multiplicando a matriz  $M$  por  $T^n \vec{e} = (F_{2n+2}, F_{2n+1})$ , obtemos um vetor com primeira coordenada igual a  $\frac{F_{2n+2} + \phi F_{2n+1}}{\sqrt{1 + \phi^2}}$ . ■

Novamente, usando o fato de  $T$  ser uma  $\lambda$ -expansão na direção de  $\vec{v}$  e uma  $\lambda$ -contração na direção de  $\vec{w}$ , pelas últimas identidades temos o seguinte:

$$\text{Comprimento de } T^n(P) = \lambda^n \cdot (\text{comprimento de } P) = \frac{\lambda^n}{\sqrt{1 + \phi^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (15)$$

$$\text{Largura de } T^n(P) = \frac{1}{\lambda^n} \cdot (\text{largura de } P) = \frac{1 - \phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (16)$$

$$\text{Comprimento de } T^n(G) = \lambda^n \cdot (\text{comprimento de } G) = \frac{\lambda^n(1 + \phi)}{\sqrt{1 + \phi^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (17)$$

$$\text{Largura de } T^n(G) = \frac{1}{\lambda^n} \cdot (\text{largura de } G) = \frac{\phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Com isso, deduziremos duas importantes identidades:

Por um lado, o comprimento de  $T^n(P)$  é  $\frac{\lambda^n}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  e também é  $\pi_1(MT^n \vec{e}_1)$ . Com isso,  $\frac{\lambda^n}{\sqrt{1 + \phi^2}} = \frac{F_{2n+1} + \phi F_{2n}}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  donde segue a relação

$$F_{2n+1} + \phi F_{2n} = \lambda^n. \quad (19)$$

Multiplicando ambos os lados desta última equação por  $\phi$ , usando (3) e (4) obtemos

$$F_{2n} + \phi F_{2n-1} = \lambda^n \phi. \quad (20)$$

## 6 Descrevendo $\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})$

**Observação 3.** *Aqui, usaremos o seguinte fato, cuja prova segue imediatamente da irracionalidade de  $\phi$ :*

*Se  $a + b\phi = x + y\phi$ , com  $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ , então  $a = x$  e  $b = y$ .*

**Proposição 1.** *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  temos o seguinte:*

1.  $T^{n+1}G$  é composto por dois retângulos em  $T^nG$  e um retângulo em  $T^nP$ , ambos

de largura  $\frac{L}{\lambda^{n+1}}$ .

2.  $T^{n+1}P$  é composto por um retângulo em  $T^nG$  e um retângulo em  $T^nP$ , ambos de largura  $\frac{l}{\lambda^{n+1}}$ .

*Demonstração.* Para ambos os itens, basta compararmos os comprimentos dos retângulos da partição  $T^{n+1}(\mathcal{P})$  com os da partição  $T^n(\mathcal{P})$ , pois já sabemos as larguras dos retângulos  $T^{n+1}G$  e  $T^{n+1}P$  que são  $\frac{L}{\lambda^{n+1}}$  e  $\frac{l}{\lambda^{n+1}}$ , respectivamente. Isso nos dirá a quantidade de retângulos de  $T^{n+1}G$  em  $T^nG$  e em  $T^nP$ , assim como a quantidade de retângulos de  $T^{n+1}P$  em  $T^nG$  e em  $T^nP$ . Para o item 1,  $T^{n+1}G$  possuir  $x$  retângulos em  $T^nG$  e  $y$  retângulos em  $T^nP$  é dizer, em termos de comprimento, que

$$\lambda^{n+1}C = x\lambda^n C + y\lambda^n c.$$

Dividindo a equação acima por  $\lambda^n C$ , obtemos  $\lambda = x + y\frac{c}{C}$ . Por (7) e (9), concluímos que  $(1 + \phi)\lambda = (1 + \phi)x + y$ . Finalmente, segue das equações (2) e (3) que vale  $3 + 2\phi = x + y + x\phi$ , donde  $x = 2$  e  $y = 1$ .

O item 2 é análogo. A equação que compara os comprimentos é  $\lambda^{n+1}c = x\lambda^n C + y\lambda^n c$ . Simplificando resulta em  $2 + \phi = x + y + x\phi$ , donde  $x = y = 1$ . ■

**Proposição 2.** A partição  $\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})$  é composta da seguinte forma:

1.  $F_{2n+1}$  retângulos de comprimento  $C$  e largura  $\frac{L}{\lambda^n}$ ;
2.  $F_{2n}$  retângulos de comprimento  $c$  e largura  $\frac{L}{\lambda^n}$ ;
3.  $F_{2n}$  retângulos de comprimento  $C$  e largura  $\frac{l}{\lambda^n}$ ;
4.  $F_{2n-1}$  retângulos de comprimento  $c$  e largura  $\frac{l}{\lambda^n}$ .

*Demonstração.* Fixado  $n > 0$ , descreveremos inicialmente a partição do tipo  $T^n(\mathcal{P}) \vee T^{n-1}(\mathcal{P})$ . Pela Proposição 1,  $T^nG$  tem dois retângulos em  $T^{n-1}G$ , como intersecção, e um retângulo em  $T^{n-1}P$ , ambos de largura  $\frac{L}{\lambda^n}$  e comprimento  $\lambda^{n-1}C$ . Também,  $T^nP$  tem um retângulo em comum com  $T^{n-1}G$  e um retângulo em comum com  $T^{n-1}P$ , ambos de largura  $\frac{l}{\lambda^n}$  e comprimento  $\lambda^{n-1}c$ . Isto é exatamente a descrição de  $T^n(\mathcal{P}) \vee T^{n-1}(\mathcal{P})$ . Aplicando novamente a Proposição 1, descreveremos  $(T^n(\mathcal{P}) \vee T^{n-1}(\mathcal{P})) \vee T^{n-2}(\mathcal{P})$ . Com efeito, cada retângulo de comprimento  $\lambda^{n-1}C$  de  $T^n(\mathcal{P}) \vee T^{n-1}(\mathcal{P})$  irá se decompor em dois retângulos em  $T^{n-2}G$  e um em  $T^{n-2}P$ . Também, cada retângulo de comprimento  $\lambda^{n-1}c$  de  $T^n(\mathcal{P}) \vee T^{n-1}(\mathcal{P})$  irá se decompor em um

retângulo em  $T^{n-2}G$  e um em  $T^{n-2}P$ . Neste processo, a largura dos retângulos foi mantida, mas eles tiveram seus comprimentos divididos por  $\lambda$ . Prosseguindo dessa forma, chegaremos à partição  $\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})$ . Para a descrição completa, resta contarmos quantos retângulos teremos ao final do processo. Este processo pode ser feito de duas formas. A primeira é contarmos a quantidade passo a passo até o final. Neste caso, mais uma vez teremos a presença da sequência de Fibonacci para nos auxiliar. Com efeito, primeiramente seguiremos os passos de  $T^n G$ . No primeiro passo, como já descrito, temos dois retângulos em  $T^{n-1}G$  e um em  $T^{n-1}P$ . Guardaremos isso usando a notação  $(2,1)$ . Na primeira coordenada temos os retângulos maiores que, pela Proposição 1, irão se decompor nas quantidades  $(2,1)$  na etapa seguinte; ou seja, cada retângulo maior irá gerar dois maiores. Nesta mesma etapa, os menores irão se decompor na forma  $(1,1)$ , ou seja, um maior em  $T^{n-2}G$  e um menor em  $T^{n-2}P$ . Assim, os maiores se duplicam em outros maiores que recebem mais um gerado por cada um menor. Por outro lado, cada menor se mantém em quantidade e recebe mais um de cada um dos maiores anteriores. Com isso, temos a seguinte evolução da contagem:

$$(1, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (5, 3) \rightarrow (13, 8) \rightarrow \dots \rightarrow (x_i, y_i) \rightarrow (2x_i + y_i, x_i + y_i) \rightarrow \dots,$$

ou seja, contando  $n$  etapas, temos

$$(F_1, F_0) \rightarrow (F_3, F_2) \rightarrow (F_5, F_4) \rightarrow (F_7, F_6) \rightarrow \dots \rightarrow (F_{2n+1}, F_{2n}).$$

Assim, teremos  $F_{2n+1}$  retângulos de comprimento  $C$  e largura  $\frac{L}{\lambda^n}$  em  $G$  e  $F_{2n}$  retângulos de comprimento  $c$  e largura  $\frac{L}{\lambda^n}$  em  $P$ .

Para a contagem passo a passo a partir de  $T^n P$  o processo é análogo e usaremos a mesma notação. A sequência fica a seguinte:

$$(0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (8, 5) \rightarrow \dots \rightarrow (x_i, y_i) \rightarrow (2x_i + y_i, x_i + y_i) \rightarrow \dots,$$

ou seja, contando  $n$  etapas, temos

$$(F_0, 1) \rightarrow (F_2, F_1) \rightarrow (F_4, F_3) \rightarrow (F_6, F_5) \rightarrow \dots \rightarrow (F_{2n}, F_{2n-1}).$$

Com isso, teremos  $F_{2n}$  retângulos de comprimento  $C$  e largura  $\frac{l}{\lambda^n}$  em  $G$  e  $F_{2n-1}$  retângulos de comprimento  $c$  e largura  $\frac{l}{\lambda^n}$  em  $P$ .

A segunda forma de contagem é notarmos que, como a largura não é alterada, basta verificar como  $T^n G$  e  $T^n P$  intersectam  $G$  e  $P$  diretamente, ou seja, basta descrevermos

$T^n(\mathcal{P}) \vee \mathcal{P}$ . Para isso, basta fazer a conta comparando os comprimentos. Com esse intuito, digamos que  $T^n(G)$  é composto por  $p$  retângulos em  $P$  e  $g$  retângulos em  $G$ . Daí, o comprimento de  $T^n(G)$  (eq. 17) é uma combinação dos comprimentos de  $P$  e  $G$ , cujos coeficientes são  $p$  e  $g$ , respectivamente; ou seja,

$$p \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} + g \frac{1 + \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}} = \frac{F_{2n+2} + \phi F_{2n+1}}{\sqrt{1 + \phi^2}}.$$

Donde  $p = F_{2n}$  e  $g = F_{2n+1}$ . Com isso,  $T^n(G)$  é formado por  $F_{2n+1}$  retângulos em  $G$  e  $F_{2n}$  retângulos em  $P$ . Os  $F_{2n}$  retângulos em  $P$  têm dimensões:  $\frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{v}$  (comprimento de  $P$ ) e  $\frac{\phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{w}$  ( $1/\lambda^n$  da largura de  $G$ ). Os  $F_{2n+1}$  retângulos em  $G$  têm dimensões:  $\frac{1 + \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{v}$  (comprimento de  $G$ ) e  $\frac{\phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{w}$  ( $1/\lambda^n$  da largura de  $G$ ).

Analogamente, digamos que  $T^n(P)$  é composto por  $p$  retângulos dados pela interseção de  $T^n(P)$  com  $P$  e  $g$  retângulos dados pela interseção com  $G$ . Daí, o comprimento de  $T^n(P)$  (eq. 15) é uma combinação dos comprimentos de  $P$  e  $G$ , cujos coeficientes são  $p$  e  $g$ , respectivamente; ou seja,

$$p \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}} + g \frac{1 + \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}} = \frac{F_{2n+1} + \phi F_{2n}}{\sqrt{1 + \phi^2}}.$$

Assim,  $g = F_{2n}$  e  $p = F_{2n-1}$ . Com isso,  $T^n(P)$  é formado por  $F_{2n-1}$  retângulos em  $P$  e por  $F_{2n}$  retângulos em  $G$ . Os  $F_{2n-1}$  retângulos em  $P$  têm dimensões:  $\frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{v}$  (comprimento de  $P$ ) e  $\frac{1 - \phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{w}$  ( $1/\lambda^n$  da largura de  $P$ ). Os  $F_{2n}$  retângulos em  $G$  têm dimensões:  $\frac{1 + \phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{v}$  (comprimento de  $G$ ) e  $\frac{1 - \phi}{\lambda^n \sqrt{1 + \phi^2}}$  na direção de  $\vec{w}$  ( $1/\lambda^n$  da largura de  $P$ ). ■

## 7 Calculando $H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right)$

Pelos itens anteriores temos  $H\left(\bigvee_{i=0}^n T^{-i}(\mathcal{P})\right) =$

$$-F_{2n+1} \cdot \frac{CL}{\lambda^n} \log \left[ \frac{CL}{\lambda^n} \right] - F_{2n} \cdot \frac{cL}{\lambda^n} \log \left[ \frac{cL}{\lambda^n} \right] - F_{2n} \cdot \frac{Cl}{\lambda^n} \log \left[ \frac{Cl}{\lambda^n} \right] - F_{2n-1} \cdot \frac{cl}{\lambda^n} \log \left[ \frac{cl}{\lambda^n} \right] =$$

$$-\frac{F_{2n+1}}{\lambda^n(1+\phi^2)} \log \left[ \frac{1}{\lambda^n(1+\phi^2)} \right] - \frac{F_{2n} \cdot \phi}{\lambda^n(1+\phi^2)} \log \left[ \frac{\phi}{\lambda^n(1+\phi^2)} \right] - \frac{F_{2n} \cdot \phi}{\lambda^n(1+\phi^2)} \log \left[ \frac{\phi}{\lambda^n(1+\phi^2)} \right] - \frac{F_{2n-1} \cdot \phi^2}{\lambda^n(1+\phi^2)} \log \left[ \frac{\phi^2}{\lambda^n(1+\phi^2)} \right].$$

Tomando  $U := \lambda^{2n}(1 + \phi^2)$ , temos

$$H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right) = -\frac{F_{2n+1}}{U} \log \frac{1}{U} - \frac{2\phi F_{2n}}{U} \log \frac{\phi}{U} - \frac{\phi^2 F_{2n-1}}{U} \log \frac{\phi^2}{U},$$

donde

$$H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right) = \frac{F_{2n+1}}{U} \log U + \frac{2\phi F_{2n}}{U} \log \frac{U}{\phi} + \frac{\phi^2 F_{2n-1}}{U} \log \frac{U}{\phi^2}.$$

Assim,

$$H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right) = \frac{\log U}{U} (F_{2n+1} + 2\phi F_{2n} + \phi^2 F_{2n-1}) - \frac{2\phi \log \phi}{U} (F_{2n} + \phi F_{2n-1}).$$

Agora, recordemos que  $F_{2n} + \phi F_{2n-1} = \phi \lambda^n$  (eq. 20) e notemos que  $F_{2n+1} + 2\phi F_{2n} + \phi^2 F_{2n-1} = (F_{2n+1} + \phi F_{2n}) + \phi \cdot (F_{2n} + \phi F_{2n-1}) = \lambda^n + \phi \cdot \phi \lambda^n = \lambda^n(1 + \phi^2) = U$ , onde usamos as identidades 19 e 20. Com isso,

$$\begin{aligned} H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right) &= \log U - \frac{2\phi^2 \log \phi}{1 + \phi^2} \\ &= n \log \lambda + \log(1 + \phi^2) - \frac{2\phi^2 \log \phi}{1 + \phi^2}. \end{aligned}$$

Finalmente podemos concluir que

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H\left(\bigvee_{i=0}^n T^i(\mathcal{P})\right)}{n+1} = \log \lambda = \ln \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

■

## 8 Conclusão

Aqui aproveitaremos para deixar a sugestão de extensão desse trabalho para os demais automorfismos hiperbólicos do 2-toro por meio de associação com sequências recorrentes, que têm a sequência de Fibonacci como caso particular. Sobre sequências recorrentes, sugerimos a leitura do artigo [4].

## 9 Agradecimentos

Deixamos os nossos agradecimentos ao Prof. Fernando Oliveira, por ter nos apresentado o problema e pelas ideias iniciais durante a orientação de doutoramento do primeiro autor, e aos revisores pelas valiosas sugestões.

## Referências

- [1] W. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [2] C. Gutierrez. Introducción a la teoría ergódica. *Pro Mathematica*, VI(11-12), 1992.
- [3] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Press Syndicate of the Univ. of Cambridge, New York, 1995.
- [4] C. G. Moreira. Sequências recorrentes. *Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina*, (4):53–69, 2007.
- [5] D. S. Ornstein. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Adv. in Math.*, IV:337–352, 1970.
- [6] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer Verlag, Berlin, 1982.