
Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares

jlopez@usp.br

Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, Pirassununga, São Paulo, Brasil

João Paulo Martins dos Santos

jp2@alumni.usp.br

Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

Alessandro Firmiano de Jesus

lezandro@gmail.com

Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

Resumo

Apresentamos os conceitos básicos relativo ao baricentro. Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) são discutidos em detalhe. Uma combinação de outros conteúdos também são estudados: Reta de Euler, homotetia, quadriláteros cíclicos, áreas, desigualdades, lugares geométricos, teoremas de Napoleão e de Simson-Wallace. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas usando o Geogebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que se preparam para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e se interessem em problemas mais desafiadores.

Palavras-chave

Olimpíadas internacionais de Matemática, Baricentro, Centroide, Ensino Médio e Universitário, Geometria.

1 Introdução

Este material didático foi usado durante uma aula de um curso de “Geometria com Geogebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil, ministrado pelos autores, à distância, no primeiro semestre de 2021.

As soluções apresentadas complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Usando argumentos menos rebuscados, focamos na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos em níveis menos avançados consigam acompanhar o desenvolvimento do problema. Adicionalmente, uma versão interativa das figuras do texto também é disponibilizada no site do Geogebra.

No Problema 1 é dado um quadrilátero cíclico $ABCD$ e é pedido para mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência. Primeiro, prova-se que o centroide do quadrilátero coincide com o centroide dos baricentros dos triângulos citados. A seguir, uma homotetia com centro no centroide comum resolve o problema.

O Problema 2 apresenta um triângulo arbitrário ABC e um ponto M no interior deste. É pedido para provar a validade de certa desigualdade e mostrar quando acontece a igualdade. O desafio é interpretado como uma soma de áreas. Várias transformações de equivalência levam a desigualdade dada a uma soma de quadrados.

O Problema 3 apresenta dois pontos P_1 e P_2 que são colocados arbitrariamente sobre duas circunferências (um em cada uma). É pedido encontrar o lugar geométrico do ponto médio de P_1 e P_2 , quando estes passam por todas as posições possíveis. Uma construção geométrica dinâmica no Geogebra sugere a resposta e uma justificativa algébrica é dada.

No Problema 4 se explora a geometria do triângulo Napoleônico interno de um $\triangle ABC$ arbitrário. Solicita-se determinar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.

O Problema 5 combina transformações de reflexão e homotetia e as propriedades do ortocentro, circuncentro e baricentro. Se usa o teorema de Simson-Wallace para demonstrar uma condição necessária e suficiente para três pontos serem colineares.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (LongList, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (ShortList, SL). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão

usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática [5], [4] e [3]. Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre o baricentro.

2 Conceitos básicos

A Figura 1 mostra um triângulo ABC . Sejam D , E e F pontos médios dos lados BC , CA e AB , respectivamente. As medianas AD , BE e CF concorrem no ponto G , chamado baricentro ou centroide [6].

Proposição 2.1. *A distância de um vértice ao baricentro é duas vezes a distância do baricentro ao pé da mediana correspondente.*

Demonstração. EF é base média do $\triangle ABC$ logo $EF \parallel BC$ e $EF = \frac{BC}{2}$. Sejam H e I pontos médios dos lados BG e CG , respectivamente. Temos que o segmento HI é base média do $\triangle GBC$. Segue que $HI \parallel BC$ e $HI = \frac{BC}{2}$.

Como $EF \parallel HI$ e $EF = HI$ o quadrilátero $EFHI$ é um paralelogramo e suas diagonais HE e FI se encontram nos seus pontos médios: $HG = GE$ e $FG = GI$. Concluimos que $BG = 2GE$ e $CG = 2GF$. Analogamente se demonstra que $AG = 2GD$. \square

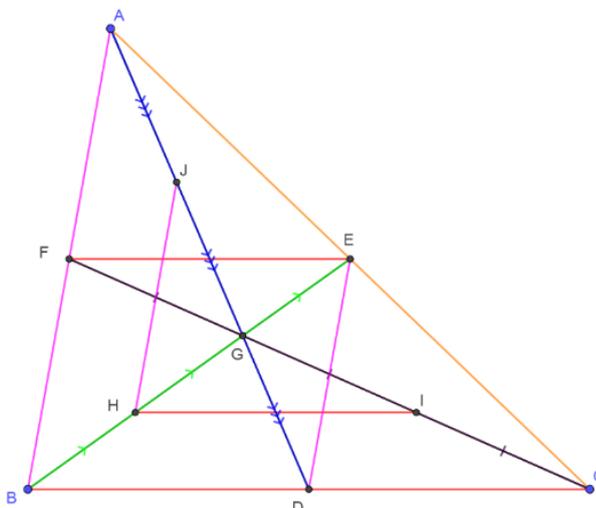


Figura 1: A distância de um vértice ao baricentro é duas vezes a distância do baricentro ao pé da mediana correspondente. Guia para a demonstração da Proposição 2.1. Versão interativa [aqui](#).

Usaremos a notação $S(P)$ para referirmos a área do polígono P . A Figura 2 permite acompanhar os detalhes da construção da Proposição 2.2.

Proposição 2.2. *O baricentro G do $\triangle ABC$ determina com os vértices e pontos médios M_{AB} , M_{BC} e M_{CA} dos lados AB , BC e CA , respectivamente, seis triângulos de igual área. Isto é,*

$$\begin{aligned} S(AGM_{AB}) &= S(BGM_{AB}) = S(BGM_{BC}) = S(CGM_{BC}) \\ &= S(CGM_{CA}) = S(AGM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{6}. \end{aligned}$$

Os triângulos AGB , BGC e CGA têm a mesma área. Isto é,

$$S(AGB) = S(BGC) = S(CGA) = \frac{S(ABC)}{3}.$$

Os triângulos ACM_{AB} , BCM_{AB} , BAM_{BC} , CAM_{BC} , CBM_{CA} e ABM_{CA} têm

a mesma área. Isto é,

$$\begin{aligned} S(ACM_{AB}) &= S(BCM_{AB}) = S(BAM_{BC}) = S(CAM_{BC}) \\ &= S(CBM_{CA}) = S(ABM_{CA}) = \frac{S(ABC)}{2}. \end{aligned}$$

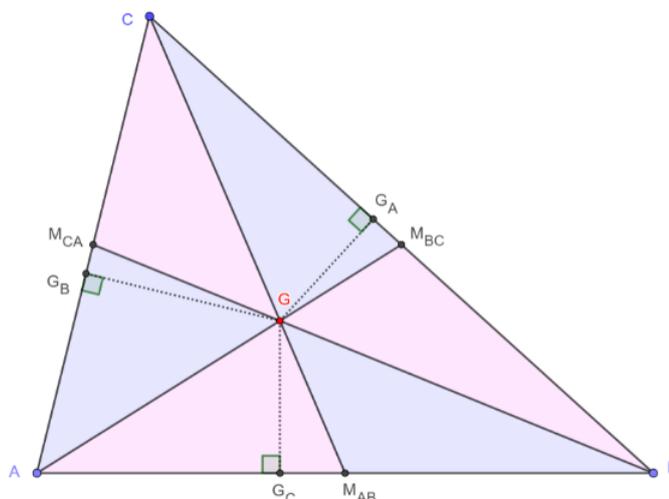


Figura 2: Igualdade de áreas envolvendo o baricentro. Guia para a demonstração da Proposição 2.2. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Sejam G_C, G_A e G_B os pés das alturas do ponto G sobre os lados AB, BC e CA , respectivamente. Como GG_C é altura comum aos triângulos AGM_{AB} e BGM_{AB} e $AM_{AB} = M_{AB}B$ temos:

$$S(AGM_{AB}) = S(BGM_{AB}).$$

Adicionalmente, os triângulos ACM_{AB} e BCM_{AB} têm a mesma altura e base de igual medida. Logo,

$$S(ACM_{AB}) = S(BCM_{AB}).$$

Os dois resultados anteriores permitem afirmar que:

$$S(ACG) = S(BCG).$$

O resto das igualdades é provada do mesmo modo. \square

Seguiremos a estratégia de [1] para definir o baricentro de um polígono usando o conceito de centro de massa para um conjunto finito de massas pontuais e unitárias. Isto é, para os pontos com coordenadas cartesianas $A_i = (A_{ix}, A_{iy})$, com $1 \leq i \leq n$ e $i, n \in \mathbb{N}$, define-se o baricentro G como:

$$G = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n A_{ix}, \sum_{i=1}^n A_{iy} \right).$$

Ou seja, as coordenadas cartesianas de G são as médias aritméticas das coordenadas dos $A_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Uma vantagem do método de E. Carneiro e F. Girão em [1] é permitir mostrar de forma simples a colinearidade do ponto de Nagel, o baricentro e o incentro (encontro das bissetrizes internas). Essa abordagem também faz uma introdução implícita do conceito de coordenada baricêntrica.

O ponto de Nagel é definido pela concorrência das cevianas do mesmo nome. Estas são os segmentos de um vértice do triângulo ao ponto da interseção do exincírculo com o lado correspondente.

Outros dois centros de triângulos são o circuncentro (encontro das mediatrizes) e o ortocentro (encontro das alturas). A seguir mostraremos que os dois pontos anteriores ficam alinhados com o baricentro. A reta que passa por eles é chamada de reta de Euler.

Proposição 2.3 (Reta de Euler). *Para todo triângulo ABC , o circuncentro O , o baricentro G e o ortocentro H são colineares e $HG = 2GO$. Adicionalmente, sendo D o pé da mediana relativa ao vértice A , vale que $AH = 2OD$.*

Demonstração. A Figura 3 ilustra um triângulo ABC . Sejam D e E pontos médios dos lados BC e CA , respectivamente. Sejam H_a e H_b os pés das alturas relativas aos vértices A e B . Construimos o circuncentro O e o ortocentro H do triângulo ABC . Denotamos por G' a interseção das retas AD e HO .

Iremos mostrar que o ponto $G' = G$ é o baricentro, isto é, H, G e O são colineares. Temos que DE é base média relativa ao lado AB . Logo $DE \parallel AB$

e $\frac{AB}{DE} = 2$. Como $AH_a \parallel OD$ e $BH_b \parallel OE$ segue que $\angle BAH = \angle EDO$ e $\angle ABH = \angle DEO$.

Por ângulo-ângulo temos $\triangle ABH \sim \triangle DEO$. Portanto

$$\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Adicionalmente, por alternos entre paralelas, $\angle HAG' = \angle ODG'$ e por opostos pelo vértice $\angle AG'H = \angle DG'O$. Consequentemente, por ângulo-ângulo temos $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$. Portanto

$$\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2.$$

Como $AG' = 2DG'$ e $AG = 2DG$ concluímos que $G' = G$ e os pontos H, G e O são colineares (pertencem à reta de Euler). \square

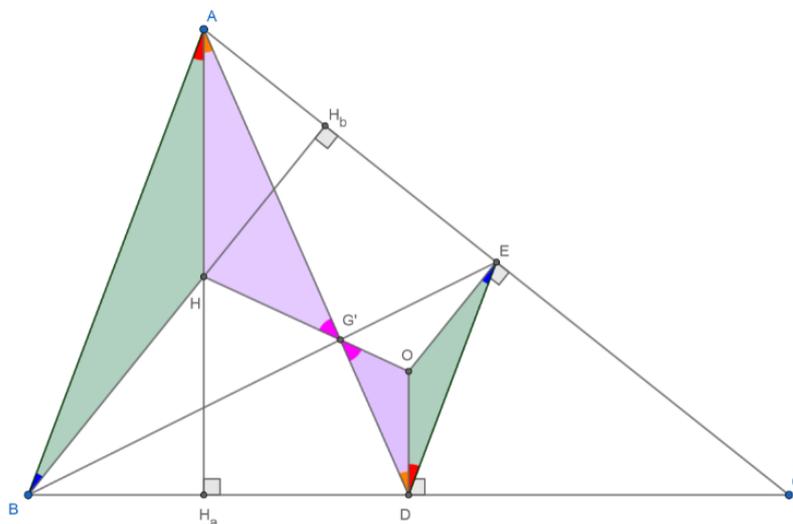


Figura 3: Guia para a demonstração da Proposição 2.3. Os pontos H, G e O são colineares e determinam a reta de Euler. Versão interativa [aqui](#).

3 Baricentro, homotetia, quadriláteros cíclicos. P36-LL-IMO-1966.

Problema 1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a um mesma circunferência.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, Bulgária. Esse é o Problema 36 da lista longa e foi proposto pela delegação da Polônia [2].

3.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 4 mostra uma construção geométrica inicial.

Consideramos que c é a circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Sejam D' , A' , B' e C' os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB , respectivamente.

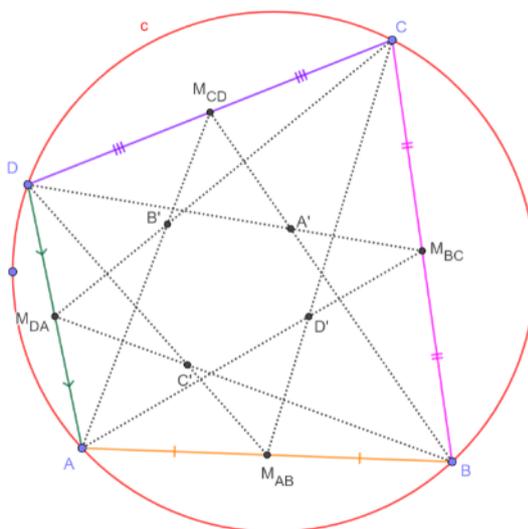


Figura 4: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Proposição 3.1. *O ponto G , baricentro do quadrilátero $ABCD$, coincide com o ponto G' , baricentro do quadrilátero $D'A'B'C'$, isto é, $G = G'$.*

Demonstração. Temos:

$$D' = \frac{1}{3} \cdot (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y),$$

$$A' = \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x, B_y + C_y + D_y),$$

$$B' = \frac{1}{3} \cdot (C_x + D_x + A_x, C_y + D_y + A_y),$$

$$C' = \frac{1}{3} \cdot (D_x + A_x + B_x, D_y + A_y + B_y),$$

onde $J = (J_x, J_y)$, com $J \in \{A, B, C, D\}$.

Somando, por coordenadas, as quatro equações anteriores segue:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{1}{4} \cdot (D'_x + A'_x + B'_x + C'_x, D'_y + A'_y + B'_y + C'_y) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (3A_x + 3B_x + 3C_x + 3D_x, 3A_y + 3B_y + 3C_y + 3D_y) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x, A_y + B_y + C_y + D_y) = G. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.2. Com relação aos pontos $A, B, C, D, A', B', C', D'$ e G (Figura 5) vale que:

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = \frac{DG}{GD'} = 3.$$

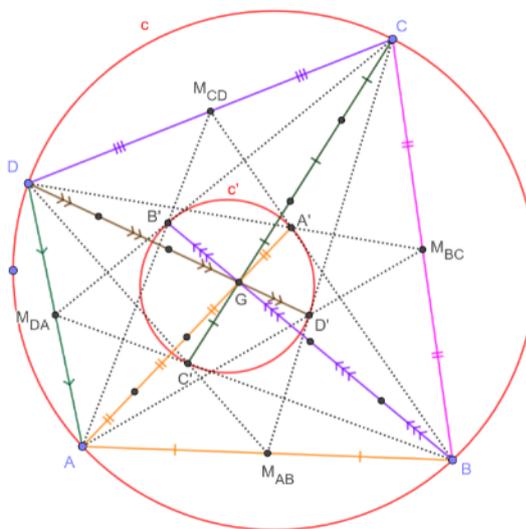


Figura 5: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned} G_x - A_x &= \frac{1}{4} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x), \\ G_y - A_y &= \frac{1}{4} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y), \\ AG &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}. \end{aligned}$$

Também temos:

$$\begin{aligned} A'_x - G_x &= \frac{1}{3} \cdot (B_x + C_x + D_x) - \frac{1}{4} \cdot (A_x + B_x + C_x + D_x) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (B_x + C_x + D_x - 3A_x), \\ A'_y - G_y &= \frac{1}{3} \cdot (B_y + C_y + D_y) - \frac{1}{4} \cdot (A_y + B_y + C_y + D_y) \\ &= \frac{1}{12} \cdot (B_y + C_y + D_y - 3A_y), \\ GA' &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{(B_x + C_x + D_x - 3A_x)^2 + (B_y + C_y + D_y - 3A_y)^2}. \end{aligned}$$

Com isto provamos que

$$\frac{AG}{GA'} = 3.$$

O resto da demonstração é feito de forma análoga. □

As duas proposições anteriores permitem afirmar que uma homotetia, com centro no ponto G , e fator de proporcionalidade $-\frac{1}{3}$ transforma A, B, C, D e c em A', B', C', D' e c' , respectivamente, sendo c' a circunferência circunscrita ao quadrilátero $A'B'C'D'$. A Figura 5 mostra uma construção geométrica.

4 Baricentro, áreas, desigualdade. P9 SL IMO 1968.

Problema 2. *Seja ABC um triângulo arbitrário e M um ponto no interior deste. Sejam $d_a, d_b,$ e d_c as distâncias de M aos lados $BC, CA,$ e AB ; e a, b, c a medida*

dos lados, respectivamente. Seja S a área do $\triangle ABC$. Provar que

$$abd_a d_b + bcd_b d_c + cad_c d_a \leq \frac{4S^2}{3}. \tag{1}$$

Provar que a igualdade acontece quando M é o baricentro.

A IMO 1968 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Esse é o Problema 9 da lista curta e foi proposto pela delegação da Romênia [2].

4.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 6 mostra uma construção geométrica.

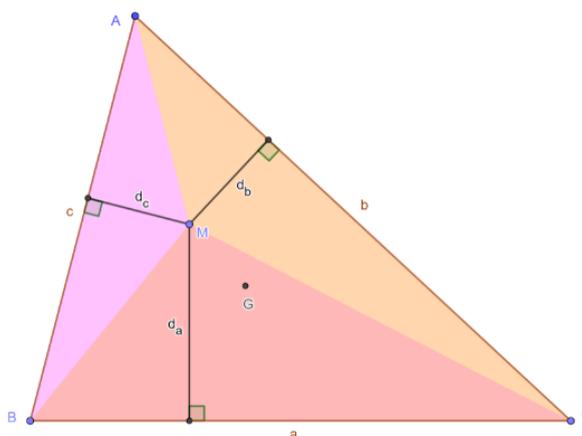


Figura 6: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Iniciamos notando que a desigualdade (1) é equivalente a:

$$\frac{ad_a}{2} \cdot \frac{bd_b}{2} + \frac{bd_b}{2} \cdot \frac{cd_c}{2} + \frac{cd_c}{2} \cdot \frac{ad_a}{2} \leq \frac{S^2}{3}.$$

Sejam $S_a = S(BCM) = \frac{ad_a}{2}$, $S_b = S(CAM) = \frac{bd_b}{2}$ e $S_c = S(ABM) = \frac{cd_c}{2}$. Segue que

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq \frac{S^2}{3}.$$

Como $S = S_a + S_b + S_c$, a desigualdade anterior equivale a

$$3(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a) \leq (S_a + S_b + S_c)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando se encontra

$$S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a \leq S_a^2 + S_b^2 + S_c^2.$$

Multiplicamos toda a desigualdade por 2 e colocamos os termos do lado esquerdo no direito

$$0 \leq 2(S_a^2 + S_b^2 + S_c^2) - 2(S_a \cdot S_b + S_b \cdot S_c + S_c \cdot S_a).$$

A linha anterior pode ser reescrita como:

$$0 \leq (S_a - S_b)^2 + (S_b - S_c)^2 + (S_c - S_a)^2.$$

Como o quadrado de um número é sempre maior o igual a zero a última desigualdade é verdadeira. Todas as transformações usadas foram de equivalência, logo fica provado (1). A igualdade acontece quando $S_a = S_b = S_c$. Pela Proposição 2.2, o anterior significa que $M = G$.

5 Baricentro, lugar geométrico, circunferências. P27 LL IMO 1974.

Problema 3. *Sejam C_1 e C_2 circunferências no mesmo plano, P_1 e P_2 pontos arbitrários sobre C_1 e C_2 , respectivamente, e M_{12} o ponto médio do segmento P_1P_2 . Encontrar o lugar geométrico dos pontos M_{12} quando P_1 e P_2 passam por todas as posições possíveis.*

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erfurt, Alemanha. Esse é o Problema 27 da lista longa e foi proposto pela delegação da Romênia [2].

5.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 7 mostra uma construção geométrica.

onde

$$b = \frac{1}{2}a,$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\delta)},$$

$$\tan(\gamma) = \frac{R_2 \operatorname{sen}(\delta)}{R_1 + R_2 \cos(\delta)}.$$

Fixado δ , quando θ varia o ponto M_{12} descreve uma circunferência C_3 com centro em $B = (b, 0)$, defasagem γ e raio R_3 . Porém, como $-1 \leq \cos(\delta) \leq 1$ teremos que

$$\frac{1}{2}(R_1 - R_2) \leq R_3 \leq \frac{1}{2}(R_1 + R_2),$$

ou seja, o lugar geométrico dos pontos M_{12} é o anel entre as circunferências d e f na Figura 7.

6 Baricentro, lugar geométrico, teorema de Napoleão. SL P12 IMO 1987.

Problema 4. *Dado um triângulo não equilátero ABC , com os vértices listados em sentido anti-horário, encontrar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ (vértices listados em sentido anti-horário) para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' são colineares.*

A IMO 1987 foi realizada na cidade de Havana, Cuba. Esse é o Problema 12 da lista curta e foi proposto pela delegação da Polônia [2].

6.1 Considerações iniciais sobre o Problema 4.

Para poder resolver o problema vamos precisar estudar primeiro uma versão do Teorema de Napoleão e um Lema deste último.

Lema 6.1 (Para o Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros ABC' , BCA' e CAB' , então $AA' = BB' = CC'$.*

Demonstração. A Figura 8 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário

pode ser encontrado em [7].

Por construção temos $AC = AB'$ e $AC' = AB$. De $\angle CAB' = \angle C'AB = 60^\circ$, segue que $\angle CAC' = \angle B'AB$. Por LAL, encontramos $\triangle ACC' \equiv \triangle AB'B$. Logo, $CC' = B'B$. Analogamente, $A'A = CC'$. Concluimos que $AA' = BB' = CC'$. \square

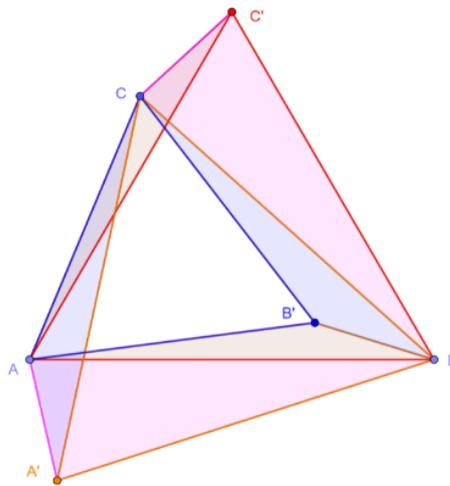


Figura 8: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).

Teorema 6.1 (Teorema de Napoleão). *Se sobre os lados de um triângulo qualquer ABC forem construídos triângulos equiláteros, os ortocentros desses triângulos equiláteros formam igualmente um triângulo equilátero.*

Demonstração. A Figura 9 mostra uma construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. O caso contrário pode ser encontrado em [7].

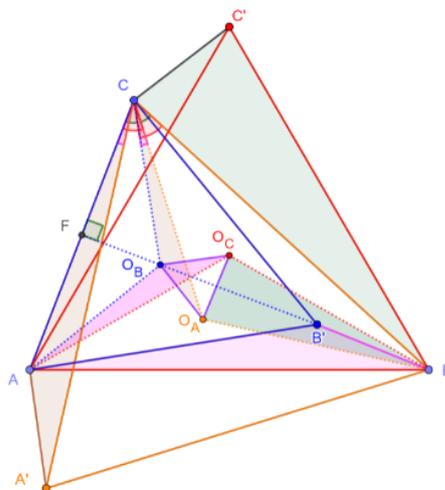


Figura 9: Construção geométrica no caso dos triângulos equiláteros serem construídos na direção interna do $\triangle ABC$. Versão interativa [aqui](#).

Sejam O_A, O_B e O_C os ortocentros dos triângulos equiláteros BCA', CAB' e ABC' , respectivamente. Girando o $\triangle O_BCO_A$ em 30° em sentido horário em torno do vértice C se mostra que é semelhante com o $\triangle ACA'$.

De fato, como $\angle ACO_B = \angle BCO_A = 30^\circ$ e $\angle ACO_A = \angle BCO_B$, então $\angle ACA' = \angle O_BCO_A$.

Seja F o ponto médio do lado AC . Em triângulos equiláteros o ortocentro, o incentro e o baricentro coincidem, logo $FO_B = \frac{1}{3}FB'$. Segue que $CO_B \cdot \text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{3}CB' \cdot \text{sen}(60^\circ)$ e $CA = CB' = \sqrt{3} \cdot CO_B$.

Analogamente, $CA' = CB = \sqrt{3} \cdot CO_A$. Com isto, $\frac{CA'}{CA} = \frac{CO_A}{CO_B}$. Pelo caso de semelhança LAL temos $\triangle ACA' \sim \triangle O_BCO_A$. Segue que $AA' = \sqrt{3} \cdot O_BO_A$.

Similarmente, se mostra que $BB' = \sqrt{3} \cdot O_CO_B$ e $CC' = \sqrt{3} \cdot O_AO_C$. Como, provado no Lema 6.1, vale $AA' = BB' = CC'$, então o $\triangle O_AO_BO_C$ é equilátero. \square

6.2 Resolução do Problema 4.

A Figura 10 mostra uma construção geométrica.

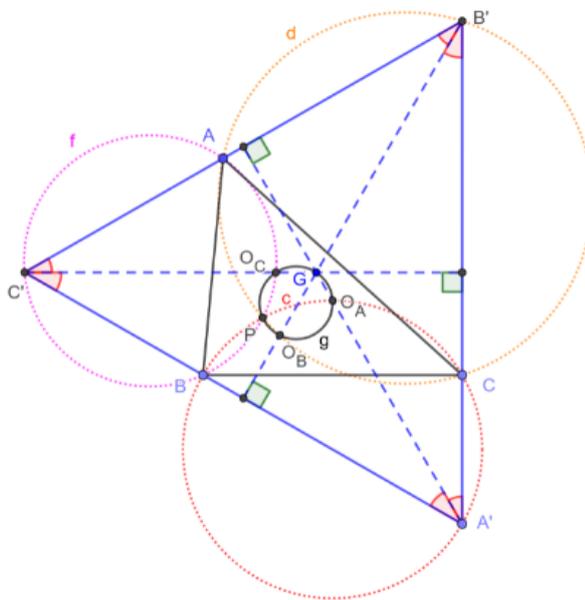


Figura 10: Primeira construção geométrica do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Construímos o ponto O_A no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_A BC = \angle O_A CB = 30^\circ$. Teremos que $\angle BO_A C = 120^\circ$. A seguir esboçamos a circunferência circunscrita c ao $\triangle BO_A C$. Posicionamos o ponto A' sobre c . Construímos as retas $A'B$ e $A'C$. Podemos ter os quadriláteros cíclicos $BA'CO_A$, $BCA'O_A$ e $BCO_A A'$. No primeiro caso $\angle BA'C = 60^\circ$ e nos dois últimos $\angle BA'C = 120^\circ$. A Figura 10 mostra o primeiro caso, o segundo pode ser visto na Figura 11.

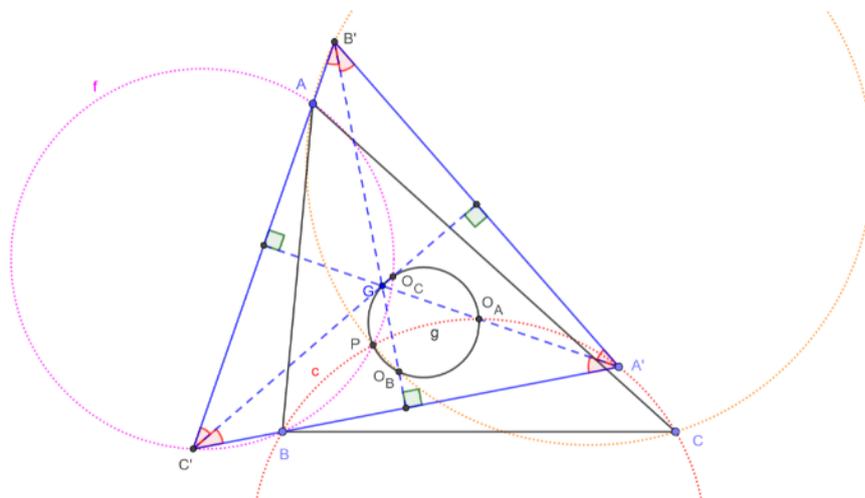


Figura 11: Segunda construção geométrica do Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Analogamente, construímos o ponto O_B no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_B C A = \angle O_B A C = 30^\circ$. Teremos que $\angle C O_B A = 120^\circ$. A seguir esboçamos a circunferência circunscrita d ao $\triangle C O_B A$. Marcamos $B' \neq C$ como a interseção de $A'C$ e d .

Similarmente, construímos o ponto O_C no interior do $\triangle ABC$ de tal forma que $\angle O_C A B = \angle O_C B A = 30^\circ$. Teremos que $\angle A O_C B = 120^\circ$. A seguir esboçamos a circunferência circunscrita f ao $\triangle A O_C B$. Marcamos $C' \neq B$ como a interseção de $A'B$ e f .

Construímos as medianas do $\triangle A'B'C'$ e marcamos o ponto em que concorrem: G . Em todo triângulo equilátero o baricentro coincide com o ortocentro, o circuncentro e o incentro. Segue que $\angle A' G B' = \angle B' G C' = \angle C' G A' = 120^\circ$. Adicionalmente os pontos O_A, O_B e O_C pertencem as bissetrizes dos ângulos em A', B' e C' , respectivamente. O $\triangle O_A O_B O_C$ é o triângulo napoleônico interno do $\triangle ABC$, Teorema 6.1 (Napoleão). Isto é, o $\triangle O_A O_B O_C$ é equilátero e $\angle O_A O_B O_C = 60^\circ$. Com isto, temos $\angle O_A O_B O_C + \angle O_A G O_C = 180^\circ$, ou seja, o quadrilátero $O_A G O_C O_B$ é cíclico.

Construímos a circunferência g circunscrita ao $\triangle O_A O_B O_C$. O lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ é g . Marcamos o ponto P ,

de Fermat ou Torricelli, na interseção de c , d e f . Quando $A' = P$ o $\triangle A'B'C'$ é reduzido ao ponto P . O ponto de Fermat de um triângulo é aquele que minimiza a soma das distâncias aos vértices.

7 Baricentro, Simson-Wallace, homotetia. P5 SL IMO 1998.

Problema 5. *Seja ABC um triângulo, H seu ortocentro, O seu circuncentro, e R seu circunraio. Seja D a reflexão de A em BC , E de B em CA , e F de C em AB . Provar que D , E , e F são colineares se, e somente se, $OH = 2R$.*

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. Esse é o Problema 5 da lista curta e foi proposto pela delegação da França [2].

7.1 Considerações iniciais para o Problema 5.

Definição 7.1 (Triângulo pedal). *Sejam P um ponto do plano, ABC um triângulo e D , E e F as projeções de P sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Então DEF é chamado de triângulo pedal de P em relação ao $\triangle ABC$.*

Teorema 7.1 (Teorema de Simson-Wallace). *Dados um $\triangle ABC$, c sua circunferência circunscrita e um ponto P no mesmo plano de ABC , o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado (D , E e F são colineares) se, e somente se, $P \in c$.*

A Figura 12 mostra uma construção geométrica.

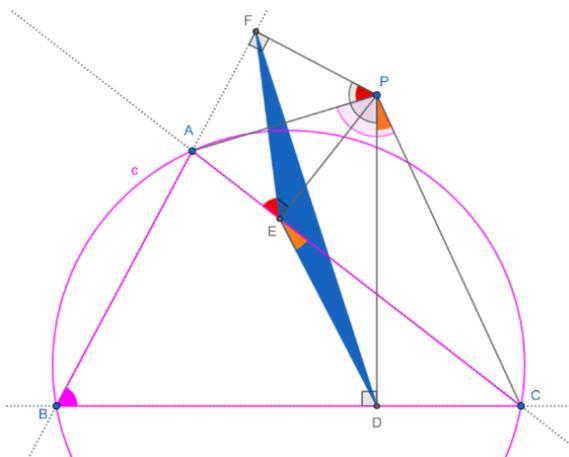


Figura 12: Construção geométrica para a prova do Teorema 7.1. Versão interativa [aqui](#).

Demonstração. Como $\angle PFA = \angle PEA = 90^\circ$, então $PFAE$ é um quadrilátero cíclico. Segue que $\angle FPA = \angle FEA$. De $\angle PEC = \angle PDC = 90^\circ$ temos que $PEDC$ é um quadrilátero cíclico. Logo, $\angle DPC = \angle DEC$. Adicionalmente, $\angle PDB = \angle PFB = 90^\circ$ implica que $PDBF$ é um quadrilátero cíclico. Consequentemente $\angle DPF = 180^\circ - \angle ABC$.

Notamos que:

$$\angle APC - \angle DPF = \angle DPC - \angle FPA = \angle DEC - \angle FEA.$$

Ou seja, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle DEC = \angle FEA$. Adicionalmente, $\angle DEC = \angle FEA$ se, e somente se, D, E e F são colineares. Mas neste caso, $\angle APC = \angle DPF$ se, e somente se, $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$. Finalmente, $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$ se, e somente se, $ABCP$ é cíclico. \square

7.2 Resolução do Problema 5.

A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial.

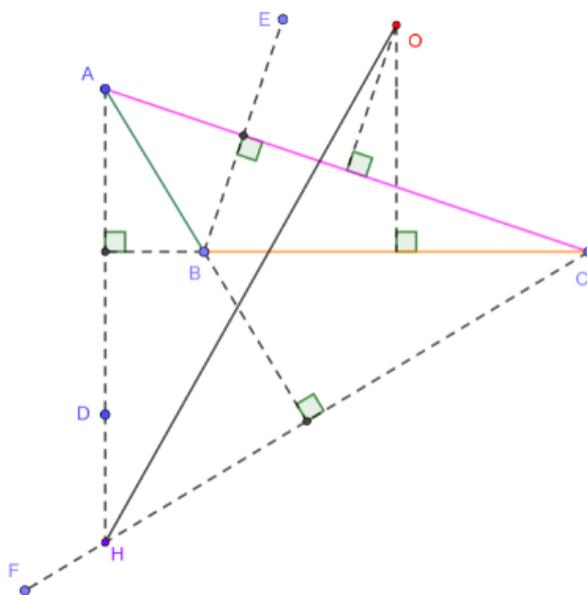


Figura 13: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Seja G o baricentro do $\triangle ABC$ e \mathbb{H} uma homotetia com centro em G e razão $-\frac{1}{2}$. Sejam $A' = \mathbb{H}(A)$, $B' = \mathbb{H}(B)$ e $C' = \mathbb{H}(C)$.

Pela Proposição 2.1 sabemos que a distância de um vértice ao baricentro é duas vezes a distância do baricentro ao pé da mediana correspondente. Logo A' , B' e C' são os pontos médios de BC , CA e AB , respectivamente. Adicionalmente, de $HG = 2GO$ (Proposição 2.3) temos $O = \mathbb{H}(H)$.

Construímos o $\triangle A_2B_2C_2$ tal que A , B e C sejam os pontos médios de B_2C_2 , C_2A_2 e A_2B_2 , respectivamente. Isto é, $AB \parallel B_2A_2$, $BC \parallel C_2B_2$ e $CA \parallel A_2C_2$ e $B_2A_2 = 2AB$, $C_2B_2 = 2BC$, e $A_2C_2 = 2CA$. Com isto, $A = \mathbb{H}(A_2)$, $B = \mathbb{H}(B_2)$ e $C = \mathbb{H}(C_2)$.

Como D é a reflexão de A em BC , então $D' = \mathbb{H}(D)$ é a reflexão de A' em $B'C'$. Segue que $D' \in B_2C_2$ e $A'D' \perp B_2C_2$. Por outro lado, da definição de circuncentro e $BC \parallel C_2B_2$ temos que OA' e B_2C_2 são ortogonais. Os dois resultados anteriores permitem afirmar que O , D' e A' são colineares e D' é a projeção de O em B_2C_2 . Analogamente, $E' = \mathbb{H}(E)$ e $F' = \mathbb{H}(F)$ são as projeções

de O em C_2A_2 e A_2B_2 .

Pelo Teorema 7.1 (Simson-Wallace), D', E' e F' são colineares (o qual equivale por \mathbb{H} a D, E e F serem colineares) se, e somente se, o ponto O está sobre a circunferência d circunscrita ao $\triangle A_2B_2C_2$. Como $c = \mathbb{H}(d)$ e $O = \mathbb{H}(H)$, d tem centro em H e raio $2R$. Esta última condição é equivalente a $HO = 2R$. A Figura 14 mostra uma construção geométrica.

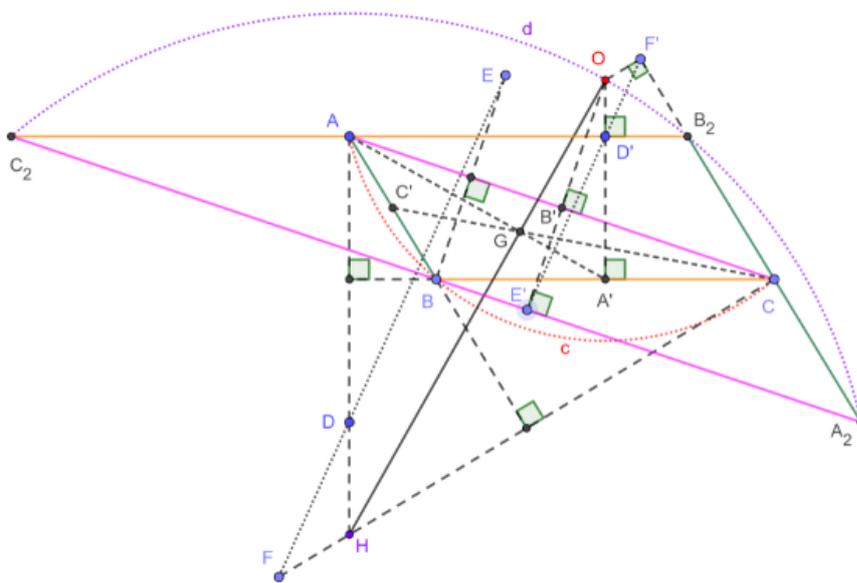


Figura 14: Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

8 Conclusão

Problemas de olimpíadas são classificados como de elevado nível de dificuldade. Isto é traduzido em uma solução em múltiplos passos que combinam análise e planejamento. Foi feita uma introdução dos conceitos básicos sobre baricentro, reta de Euler e os teoremas de Napoleão e de Simson-Wallace.

No primeiro problema foi dado um quadrilátero cíclico $ABCD$ e pedido para mostrar que os baricentros dos triângulos ABC , BCD , CDA e DAB pertencem a uma mesma circunferência. Primeiro se provou que o centroide do quadrilátero coincide com o centroide dos baricentros dos triângulos citados. A seguir, uma

homotetia com centro no centroide comum resolveu o problema.

O segundo problema apresentou um triângulo arbitrário ABC e um ponto M no interior deste. Foi pedido para provar a validade de certa desigualdade e mostrar quando acontece a igualdade. O desafio foi interpretado como uma soma de áreas. Várias transformações de equivalência levaram a desigualdade dada a uma soma de quadrados.

O terceiro problema apresentou dois pontos P_1 e P_2 que foram colocados arbitrariamente sobre duas circunferências (um em cada uma). Foi pedido encontrar o lugar geométrico dos pontos médios de P_1 e P_2 , quando estes passam por todas as posições possíveis. Uma construção geométrica dinâmica no Geogebra sugeriu a resposta e uma justificativa algébrica foi dada.

No quarto problema se explorou a geometria do triângulo Napoleônico interno de um $\triangle ABC$ arbitrário. Se solicitava determinar o lugar geométrico dos centroides dos triângulos equiláteros $A'B'C'$ para os quais as triplas de pontos A', C, B' ; B', A, C' e C', B, A' eram colineares.

O problema cinco combinou transformações de reflexão e homotetia e as propriedades do ortocentro, circuncentro e baricentro. Se usou o teorema de Simson-Wallace para demonstrar uma condição necessária e suficiente para três pontos serem colineares.

Referências

- [1] Emanuel Carneiro and Frederico Girão. Centro de massa e aplicações à geometria. *Revista Eureka!*, 1(21):29–37, 2005. (Seção 2)
- [2] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, and Dušan Djuki'. *The IMO Compendium*. Springer-Verlag GmbH, May 2011. (Seção 3, 4, 5, 6, 7)
- [3] Juan López Linares. *Geometria: soluções detalhadas para 20 problemas de Olimpíadas Internacionais de Matemática*. Universidade de São Paulo. Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, sep 2020. (Seção 1)

- [4] Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso, and Grazielle Feliciani Barbosa. Três problemas sobre série harmônica na olimpíada internacional de matemática. *C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 17:127–138, feb 2020. (Seção 1)
- [5] Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso, and Grazielle Feliciani Barbosa. Bases numéricas na olimpíada internacional de matemática. *Revista Professor de Matemática On line*, 7(02), 2019. (Seção 1)
- [6] Antonio Caminha Muniz Neto. *Geometria*. SBM, 2013. (Seção 2)
- [7] Adriano Regis Rodrigues. Napoleão e as “revoluções” no plano euclidiano. *É Matemática, Oxente!*, 2019. (Seção 6.1, 6.1)