
O Teorema de Representação de Kenmotsu para superfícies de revolução com curvatura média prescrita.

Stefani Rose Teixeira

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

stefani.teixeira@aluno.ufop.edu.br

Gil Fidelix de Souza

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

gilsouza@ufop.edu.br

Resumo

Seguindo os passos de Kenmotsu [4], obtemos o conjunto Σ_H das superfícies de revolução com curvatura média constante H como uma família a um parâmetro de superfícies por meios da representação de Kenmotsu para superfícies de revolução com curvatura média dada. Σ_H é composto pelas superfícies de Delaunay, que são os cilindros retos, as esferas, os catenóides, ondulóides e nodóides. Devemos ressaltar que as ferramentas aqui utilizadas para a obtenção destas superfícies se diferem das técnicas apresentadas no trabalho seminal de Delaunay [1].

Palavras-chave

Geometria Diferencial, Superfície de Revolução, Curvatura Média, Curvatura Média Constante, Superfícies do Tipo Delaunay.

1 Introdução

As superfícies de revolução com curvatura média constante (CMC) compõem um tema de grande relevância em Geometria Diferencial. Uma superfície S com curvatura média constante H pode ser descrita em \mathbb{R}^3 , por exemplo, como uma bolha ou película de sabão onde a pressão exterior e interior são forças de tensão que estão balanceadas. A matemática Sophie Germain utilizou esse conceito na Teoria de elasticidade, que contribuiu para a construção da Torre Eiffel [3].

Obter exemplos de superfícies CMC pode ser algo complicado, por isso devemos impor algumas restrições à sua natureza visando facilitar a obtenção de algumas soluções. A restrição proposta neste trabalho é que as superfícies CMC sejam de revolução, isto é, vamos trabalhar com superfícies CMC que são obtidas pela rotação de uma curva geratriz em torno de um eixo. Charles-Eugène Delaunay [1] em 1841, provou que superfícies de revolução CMC são obtidas pela rotação

das *roulettes* das cônicas. Sendo *roulette* a trajetória descrita por um dos focos de uma cônica enquanto ela (a cônica) rola sobre uma reta sem deslizar. Uma superfície de revolução CMC pode ser parametrizada por

$$X(s, t) = (x(s), y(s) \cos(t), y(s) \sin(t)). \tag{1}$$

em que s é o parâmetro comprimento de arco da geratriz $(x(s), y(s), 0)$. Com isso, as funções $x(s)$ e $y(s)$ satisfazem a equação diferencial

$$y(s) \pm 2ay(s)x'(s) \pm b^2 = 0, \tag{2}$$

sendo a e b constantes positivas. Delaunay estudou a trajetória de um dos focos de uma parábola, elipse e da hipérbole que geram, respectivamente, o catenóide, o ondulóide e o nodóide.

O texto deste trabalho está organizado de modo que a segunda seção é dedicada à obtenção de uma fórmula de representação para superfícies de revolução com curvatura média $H(s)$. A teoria desenvolvida nesta seção segue de algumas manipulações da fórmula

$$H = \frac{1}{2} \left[x''y' - x'y'' + \frac{x'}{y} \right] \tag{3}$$

que representa a curvatura média de uma superfície de revolução com geratriz $(x(s), y(s), 0)$, em que s é o parâmetro comprimento de arco.

A análise da fórmula de representação para superfícies com curvatura média constante H é feita na terceira seção. Onde se mostra que se $H \neq 0$, então as possíveis geratrizes dessa superfície regular constituem uma família a 1 parâmetro D de curvas

$$\gamma(s, H, D) = \left(\int_0^s \left[\frac{1+D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht)+1+D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, \frac{[2D \operatorname{sen}(2Hs)+1+D^2]^{\frac{1}{2}}}{2|H|}, 0 \right) \tag{4}$$

em que s é o parâmetro comprimento de arco.

Após a análise da dependência da curva $\gamma(s, H, D)$ em relação a D e H , feita

na quarta seção, concluímos que basta considerar $D \geq 0$ em (4). De modo que $\gamma(s, H, 0)$ é uma reta e o traço de $X(s, t)$ é um cilindro reto de raio $\frac{1}{2H}$. Para $D = 1$, $\gamma(s, H, 1)$ é um semicírculo de raio $\frac{1}{H}$ que gera uma esfera. A análise de (2) e (3), nos leva que para $0 < D < 1$ as superfícies obtidas são as ondulóides e para $D > 1$ as nodóides.

2 Um resultado de Representação de Superfícies de Revolução com curvatura média prescrita

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $s \in I$ o parâmetro comprimento de arco da geratriz γ da superfície de revolução obtida pela rotação de γ em torno do eixo x . A superfície obtida pela revolução da geratriz $(x(s), y(s), 0)$ em torno do eixo x é

$$X(s, u) = (x(s), y(s) \cos(u), y(s) \sin(u)), \quad (s, u) \in I \times (0, 2\pi).$$

A fim de a superfície seja regular, trabalharemos com a hipótese de que $y(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. A seguir, desenvolvemos o cálculo da expressão da curvatura média desta superfície, com

$$\begin{aligned} N(s, u) &= \frac{X_s \times X_u}{\|X_s \times X_u\|} = \frac{(y(s)y'(s), -x'(s)y(s) \cos(u), -x'(s)y(s) \sin(u))}{y(s)} \\ &= (y'(s), -x'(s) \cos(u), -x'(s) \sin(u)), \end{aligned}$$

e os coeficientes da primeira forma quadrática são:

- $E = \langle X_s, X_s \rangle = [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1;$
- $F = \langle X_s, X_u \rangle = 0;$
- $G = \langle X_u, X_u \rangle = [y(s)]^2.$

Para o cálculo dos coeficientes da segunda forma quadrática precisamos das derivadas parciais X_{ss} , X_{su} e X_{uu} .

- $X_{ss} = (x''(s), y''(s) \cos(u), y''(s) \sin(u));$

- $X_{su} = (0, -y'(s) \operatorname{sen}(u), y'(s) \operatorname{cos}(u));$
- $X_{uu} = (0, -y(s) \operatorname{cos}(u), y(s) \operatorname{sen}(u)),$

enquanto os coeficientes da segunda fórmula quadrática são:

- $e = \langle X_{ss}, N \rangle = x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s);$
- $f = \langle X_{su}, N \rangle = 0;$
- $g = \langle X_{uu}, N \rangle = x'(s)y(s).$

Segue da fórmula da curvatura média de uma superfície,

$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{[x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s)][y(s)]^2 + x'(s)y(s)}{[y(s)]^2}.$$

Portanto,

$$2H(s)y(s) - x'(s) - x''(s)y'(s)y(s) + x'(s)y''(s)y(s) = 0. \tag{5}$$

A demonstração do Teorema principal desta seção, que será apresentado a seguir, segue da manipulação da equação (5).

Teorema 2.1 (Teorema de representação de Kenmotsu para superfícies de revolução com curvatura média prescrita). *Seja $(x(s), y(s), 0)$, $s \in I$, a geratriz parametrizada pelo comprimento de arco, de uma superfície cuja curvatura média no ponto $(x(s), y(s), 0)$ é $H(s)$. Então para algumas constantes c_1, c_2 e c_3 temos $(x(s), y(s), 0) = \gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ em que*

$$\begin{cases} x(s) = \int_0^s \frac{F'(t)(G(t)+c_2) - G'(t)(F(t)+c_1)}{[(F(t)+c_1)^2 + (G(t)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3, \\ y(s) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{6}$$

em que $F(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt$ e $G(s) = \int_0^s \operatorname{cos} \left(2 \int_0^t H(u) du \right) dt$.

Reciprocamente para qualquer função contínua $H(s)$, $s \in I$, e qualquer vetor

$$(c_1, c_2, c_3) \in T \times \mathbb{R} := \{(-F(s), -G(s)), s \in I\}^C \times \mathbb{R},$$

podemos construir uma superfície de revolução por meio da equação (6) de tal modo que sua curvatura média seja $H(s)$ e condições iniciais dadas por:

- $\gamma(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = \left(c_3, [(c_1)^2 + (c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right);$
- $\gamma'(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = \left(c_1[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, c_2[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, 0 \right).$

Dividiremos a demonstração do Teorema 2.1 em 6 passos.

Passo 1. A equação (5) pode ser descrita como

$$2H(s)y(s)x'(s) + (y(s)y'(s))' - 1 = 0. \tag{7}$$

Demonstração. Multiplicando (5) por $x'(s)$,

$$2H(s)y(s)x'(s) - [x'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y'(s)y(s) + [x'(s)]^2y''(s)y(s) = 0.$$

Colocando $[x'(s)]^2$ em evidencia,

$$2H(s)y(s)x'(s) + [x'(s)]^2[y''(s)y(s) - 1] - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) = 0. \tag{8}$$

Como $(x(s), y(s), 0)$ é parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se que:

$$\|\alpha(s)\| = 1 \Rightarrow [x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1 \Rightarrow [x'(s)]^2 = 1 - [y'(s)]^2. \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8),

$$\begin{aligned} \Rightarrow & H(s)y(s)x'(s) + [1 - y'(s)]^2[y(s)y''(s) - 1] - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) \\ = & 2Hy(s)x'(s) - 1 - y(s)y''(s)[y'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) + \underbrace{y(s)y''(s) + [y'(s)]^2}_{(y(s)y'(s))'} \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y''(s)[y'(s)]^2 - x'(s)x''(s)y(s)y'(s) + (y(s)y'(s))' \\ = & 2H(s)y(s)x'(s) - 1 - y(s)y'(s)[x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)] + (y(s)y'(s))' = 0. \end{aligned}$$

Desde que o vetor tangente $t = (x'(s), y'(s))$ é unitário, obtemos que t e $t' = (x''(s), y''(s))$ são ortogonais e, portanto, $\langle t, t' \rangle = x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0$ que ao ser substituída na última equação retorna

$$2H(s)y(s)x'(s) + (y(s)y'(s))' - 1 = 0.$$

□

O **Passo 2** a seguir é uma reformulação da equação (5), com uma estrutura diferente do **Passo 1**.

Passo 2. Podemos reescrever a equação (5) como

$$2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' = 0 \tag{10}$$

Demonstração. Multiplicando (5) por $y'(s)$, teremos

$$2H(s)y(s)y'(s) - x'(s)y'(s) - x''(s)[y'(s)]^2y(s) + x'(s)y'(s)y''(s)y(s) = 0.$$

Utilizando os mesmos argumentos do **Passo 1** e o fato que $[y'(s)]^2 = 1 - [x'(s)]^2$, obtemos o resultado esperado, ou seja $2H(s)y(s)y'(s) - (x'(s)y(s))' = 0$. □

Utilizaremos os **Passos 1 e 2**, para estabelecer uma função auxiliar $Z(s)$, cuja expressão possui as funções coordenadas da geratriz da superfície de revolução com curvatura média $H(s)$ e verificaremos que esta função é a solução de uma equação diferencial ordinária (EDO).

Passo 3. Como $x(s)$ e $y(s)$ são funções coordenadas da geratriz de uma superfície de revolução de curvatura $H(s)$. A função auxiliar

$$Z(s) = y(s)y'(s) + iy(s)x'(s). \tag{11}$$

é a solução da EDO

$$Z'(s) - 2iH(s)Z(s) = 1 \tag{12}$$

Demonstração. De fato, calculando $Z'(s)$, obtemos

$$Z'(s) = y'(s)y'(s) + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)].$$

Somando $-2iH(s)Z(s)$ a ambos os lados da igualdade.

$$\begin{aligned} Z'(s) - 2iH(s)Z(s) &= \\ &= [y'(s)]^2 + y(s)y''(s) + i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s)] - 2iH(s)[y(s)y'(s) + iy(s)x'(s)] \\ &= \underbrace{[y'(s)]^2 + y(s)y''(s) + 2H(s)y(s)x'(s)}_{eq. (7)} + \underbrace{i[y'(s)x'(s) + y(s)x''(s) - 2H(s)y(s)y'(s)]}_{eq. (10)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

No **Passo 4** a seguir, utilizaremos técnicas elementares de equação diferencial ordinária para obter uma solução explícita de (12).

Passo 4. A solução de (12) é

$$Z(s) = [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + iC], \tag{13}$$

com:

$$\eta(t) = 2 \int_0^t H(u)du \tag{14}$$

$$F(s) = \int_0^s \text{sen}(\eta(t)) dt; \tag{15}$$

$$F'(s) = \text{sen}(\eta(s)); \tag{16}$$

$$G(s) = \int_0^s \text{cos}(\eta(t)) dt; \tag{17}$$

$$G'(s) = \text{cos}(\eta(s)). \tag{18}$$

Demonstração. Multiplicando os dois membros de (12) por um fator integrante μ , teremos

$$\mu = Z'(s)\mu - 2iH(s)Z(s)\mu = (Z\mu)' = Z'(s)\mu + Z(s)\mu'. \tag{19}$$

Resultando em $Z(s)\mu' = -2iH(s)Z(s)\mu$ ou $\frac{\mu'}{\mu} = -2iH(s)$, portanto

$$\ln(\mu) = -2i \int_0^s H(u)du + K = -i\eta(s) + K. \tag{20}$$

E a escolha $K = 0$ em (20), fornece o fator integrante a seguir

$$\mu = e^{-i\eta(s)}. \tag{21}$$

Como $(Z\mu)' = \mu$, temos $Z(s) = \frac{1}{\mu(s)} \int_0^s \mu(t) dt$ e a substituição de (21) na última expressão nos dá

$$Z = e^{i\eta(s)} \left[\int_0^s e^{-i\eta(t)} dt \right] + C e^{i\eta(s)},$$

em que C é uma constante complexa.

Segue da fórmula de Euler para números complexos que,

$$\int_0^s e^{-i\eta(t)} dt = \int_0^s \text{cos}(\eta(t)) dt - i \int_0^s \text{sen}(\eta(t)) dt = G(s) - iF(s),$$

e

$$e^{i\eta(s)} = G'(s) + iF'(s).$$

Ou seja, as funções $F(s)$, $F'(s)$, $G(s)$ e $G'(s)$ são como em (15), (16), (17) e (18)

e a substituição destas equações em (13) resulta em,

$$\begin{aligned} Z(s) &= [G(s) - iF(s)][G'(s) + iF'(s)] + C[G'(s) + iF'(s)] \\ &= [G'(s) + iF'(s)][G(s) - iF(s) + C] \\ &= (i)(-i)[G'(s) + iF'(s)][G(s) - iF(s) + C] \\ &= (-i)[G'(s) + iF'(s)](i)[G(s) - iF(s) + C] \\ &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + iC]. \end{aligned}$$

□

No próximo passo, escrevemos as coordenadas $x(s)$ e $y(s)$ em termos das funções $F(s)$ e $G(s)$ que foram estabelecidas no **Passo 4**.

Passo 5. *Seja s o parâmetro comprimento de arco da geratriz $(x(s), y(s), 0) = \gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ de uma superfície de revolução cuja curvatura média é $H(s)$, então*

$$x(s) = x(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \int_0^s \frac{F'(t)(G(t)+c_2) - G'(t)(F(t)+c_1)}{[(F(t)+c_1)^2 + (G(t)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3 \quad (22)$$

e

$$y(s) = y(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

com c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Escrevendo $iC = c_1 + ic_2$, obtemos

$$\begin{aligned} Z(s) &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + iG(s) + c_1 + ic_2] \\ &= [F'(s) - iG'(s)][F(s) + c_1 + i(G(s) + c_2)] \end{aligned}$$

e

$$\|Z(s)\|^2 = \|F'(s) - iG'(s)\|^2 \|F(s) + c_1 + i(G(s) + c_2)\|^2. \quad (24)$$

Por (11) teremos,

$$\begin{aligned} \|Z(s)\|^2 &= y^2(s)[(x'(s))^2 + (y'(s))^2] \\ &= y^2(s), \end{aligned}$$

a comparação com (24) resulta em

$$y(s) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Se \bar{Z} é o conjugado de Z , segue de $\frac{Z - \bar{Z}}{2i}$ e (11) que

$$\frac{Z - \bar{Z}}{2i} = y(s)x'(s) = F'(s)(G(s) + c_2) - G'(s)(F(s) + c_1),$$

logo

$$x'(s) = \frac{F'(s)(G(s)+c_2)-G'(s)(F(s)+c_1)}{y(s)} = \frac{F'(s)(G(s)+c_2)-G'(s)(F(s)+c_1)}{[(F(s)+c_1)^2+(G(s)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

e

$$x(s) = x(s, H(s), c_1, c_2, c_3) = \int_0^s \frac{F'(t)(G(t)+c_2)-G'(t)(F(t)+c_1)}{[(F(t)+c_1)^2+(G(t)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3) &= \\ &\left(\int_0^s \frac{F'(t)(G(t)+c_2)-G'(t)(F(t)+c_1)}{[(F(t)+c_1)^2+(G(t)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3, [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right), \end{aligned}$$

com c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$. □

Observação 2.1. *Um significado geométrico para as constantes de integração c_1, c_2 e c_3 é dado por*

$$\gamma(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = \left(c_3, [(c_1)^2 + (c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right), \tag{25}$$

$$\gamma'(0, H(0), c_1, c_2, c_3) = \left(c_1[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, c_2[(c_1)^2 + (c_2)^2]^{-\frac{1}{2}}, 0 \right). \tag{26}$$

Sendo as expressões acima obtidas diretamente da substituição de $s = 0$ em $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ e $\gamma'(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$.

No próximo passo verificaremos que dada uma função contínua, com a escolha de (c_1, c_2, c_3) apropriado podemos construir a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média $H(s)$.

Passo 6. *Dados uma função contínua $H(s)$, $s \in I$, e a escolha de um vetor*

$$(c_1, c_2, c_3) \in \{(-F(s), -G(s)), s \in I\}^C \times \mathbb{R}.$$

Então podemos construir uma superfície de revolução com geratriz dada por (6) de modo que sua curvatura média seja $H(s)$ e as condições iniciais são dadas por (25) e (26).

Demonstração. Com efeito, para qualquer função contínua $H(s)$, $s \in I$, existe um subconjunto $T \subset \mathbb{R}^2$ tal que $(c_1, c_2) \in T$, nos dá

$$(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2 > 0, s \in I,$$

desde que podemos tomar T como o complementar da curva (regular) $(F(s), G(s))$, $s \in I$, em \mathbb{R}^2 . Então para qualquer vetor $(c_1, c_2, c_3) \in T \times \mathbb{R}$ e função contínua $H(s)$ dada, definimos uma curva $\gamma(s, H(s), c_1, c_2, c_3)$ por (6) e por um cálculo direto verificamos que esta curva é parametrizada pelo comprimento de arco e satisfaz (25) e (26). \square

Juntando os **Passos** 1 até 6, concluímos a demonstração do teorema 2.1.

3 Um Teorema de Representação de Superfícies de Revolução CMC

Nesta seção vamos analisar um caso particular do Teorema 2.1 em que a superfície de revolução possui curvatura média constante $H(s) = H$.

Começamos com o caso em que a curvatura média é nula.

Proposição 3.1. *A curva geratriz*

$$\gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3) = \left(\int_0^s -c_1[(c_1)^2 + (t + c_2)^2]^{-\frac{1}{2}} dt + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

com $c_1 \neq 0$, $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ e $s > 0$, é uma catenária que gera uma superfície com

curvatura média nula que é o Catenóide.

Demonstração. Tomando $H = 0$ nas expressões de $F(s)$ e $G(s)$ dadas por (15) e (17), respectivamente

$$F(s) = \int_0^s \text{sen} \left(2 \int_0^t 0 \, du \right) dt = \int_0^s \text{sen}(0) dt = 0;$$

$$G(s) = \int_0^s \text{cos} \left(2 \int_0^t 0 \, du \right) dt = \int_0^s \text{cos}(0) dt = \int_0^s dt = s.$$

Substituindo os valores de $F(s)$ e $G(s)$ em (6) obtemos,

$$\begin{aligned} \gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3) &= \left(\int_0^s -c_1 [(c_1)^2 + (t + c_2)^2]^{-\frac{1}{2}} dt + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \\ &= \left(\pm c_1 \left[\text{arcsenh} \left(\frac{s+c_2}{c_1} \right) - \text{arcsenh} \left(\frac{c_2}{c_1} \right) \right] + c_3, [(c_1)^2 + (s + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right); \end{aligned}$$

$c_1, c_2, c_3, s \in \mathbb{R}$, tal que $c_1 \neq 0$ e $s > 0$. Pondo

$$c_4 = \pm c_1 \text{arcsenh} \left(\frac{c_2}{c_1} \right) + c_3$$

e considerando a mudança de variável $\text{senh}(t) = \frac{s + c_2}{c_1}$, reescrevemos a curva $\gamma(s, 0, c_1, c_2, c_3)$ como:

$$\bar{\gamma}(t, 0, c_1, c_2, c_3) = (\pm c_1 t + c_4, c_1 \cosh(t), 0),$$

ou seja, é uma catenária que ao ser rotacionada em torno do eixo x produz o catenóide que está representado na figura 1.

□

Na proposição 3.2 a seguir, analisaremos o caso $H(s) = c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Proposição 3.2. *A curva regular $\gamma(s, 0, 0, 0, 0) = (0, s, 0)$, $s > 0$, é uma semirreta que, ao ser rotacionada em torno do eixo x , produz um plano.*

Demonstração. De acordo com os cálculos realizados na demonstração da Proposição 3.1, temos $F(s) = 0$ e $G(s) = 0$ Substituindo $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ nas

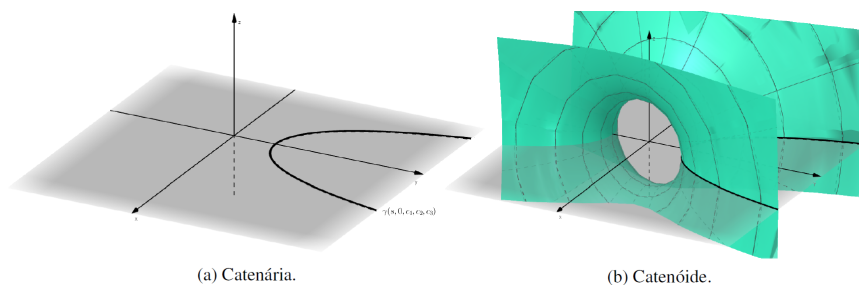


Figura 1: $H = 0$

equações (22) e (23), temos

$$x(s) = x(s, 0, 0, 0, 0) = 0$$

e

$$y(s) = y(s, 0, 0, 0, 0) = |s| = s,$$

consequentemente, $\gamma(s, 0, 0, 0, 0) = (0, s, 0)$ é uma semirreta que quando rotacionada em torno do eixo x produz um plano, como caracterizado na figura 2.

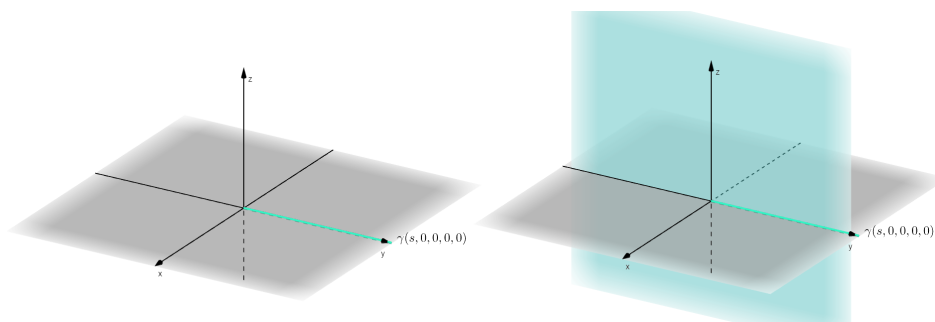


Figura 2: Plano.

□

Daqui por diante, iremos estudar o caso para a curvatura não nula ($H \neq 0$).

Teorema 3.1 (Teorema de representação de Kenmotsu para superfícies de revolução CMC). *Com as hipóteses do Teorema 2.1, se $H(s) = H \neq 0$, então para $D \neq \pm 1$,*

$$\gamma(s, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D), 0), \quad s > 0,$$

em que

$$x(s, H, D) = \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \quad (27)$$

e

$$y(s, H, D) = \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média H .

Demonstração. Com a curvatura média $H \neq 0$, segue de (15) e (17), que as funções $F(s)$ e $G(s)$ são dadas por

$$F(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \left(2 \int_0^t H \, du \right) dt = \int_0^s \operatorname{sen}(2Ht) \, dt = \frac{-\cos(2Hs) + 1}{2H},$$

$$G(s) = \int_0^s \cos \left(2 \int_0^t H \, du \right) dt = \int_0^s \cos(2Ht) \, dt = \frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H},$$

$$F'(s) = \operatorname{sen}(2Hs) \quad \text{e} \quad G'(s) = \cos(2Hs).$$

Substituindo F , G e suas derivadas nas expressões de $x(s)$ e $y(s)$ em (6).

$$y(s) = [(F(s) + c_1)^2 + (G(s) + c_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{-\cos(2Hs)+1}{2H} + c_1 \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}(2Hs)}{2H} + c_2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2|H|} [(-2 - 4Hc_1) \cos(2Hs) + 4Hc_2 \operatorname{sen}(2Hs) + 2 + 4Hc_1 + 4H^2((c_1)^2 + (c_2)^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Definindo $A = 4Hc_2$ e $B = -2 - 4Hc_1$, $y(s)$ pode ser reescrita como

$$y(s) = \frac{1}{2|H|} \left[B \cos(2Hs) + A \operatorname{sen}(2Hs) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2|H|} \left[\sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos(2Hs) + \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \operatorname{sen}(2Hs) \right) - B + \frac{(B+2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que as funções seno e cosseno satisfazem $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e são sobrejetoras no intervalo $[-1, 1]$, podemos afirmar que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sin(r) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ e } \cos(r) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

então

$$y(s) = \frac{1}{2|H|} \left[\sqrt{A^2 + B^2} (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) - B + \frac{(B + 2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $2D = \sqrt{A^2 + B^2}$.

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{2|H|} \left[2D (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) - B + \frac{(B + 2)^2}{4} + \frac{A^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} [2D (\sin(r) \cos(2Hs) + \cos(r) \sin(2Hs)) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} [2D \sin(2Hs + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Obtemos que

$$y(s) = \frac{1}{2|H|} [2D \sin(2Hs + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \frac{F'(t)(G(t)+c_2)-G'(t)(F(t)+c_1)}{[(F(t)+c_1)^2+(G(t)+c_2)^2]^{\frac{1}{2}}} dt + c_3 \\ &= \int_0^s \left[\frac{\sin(2tH) \left(\frac{\sin(2Ht)}{2H} + c_2 \right) - \cos(2Ht) \left(\frac{-\cos(2Ht)+1}{2H} + c_1 \right)}{y(t)} \right] dt + c_3 \\ &= \int_0^s \left[\frac{1+2c_2H \sin(2Ht)+(-1-2c_1H) \cos(2Ht)}{2Hy(t)} \right] dt + c_3. \end{aligned}$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2 na última equação, teremos

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \left[\frac{\left(1 + \frac{A}{2} \operatorname{sen}(2Ht) + \frac{B}{2} \cos(2Ht)\right)}{2Hy(t)} \right] dt + c_3 \\ &= \int_0^s \left[\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2} (\cos(r) \operatorname{sen}(2Ht) + \operatorname{sen}(r) \cos(2Ht))\right)}{2Hy(t)} \right] dt + c_3. \\ &= \int_0^s \left[\frac{\left(1 + D (\cos(r) \operatorname{sen}(2Ht) + \operatorname{sen}(r) \cos(2Ht))\right)}{2Hy(t)} \right] dt + c_3 \\ &= \int_0^s \left[\frac{\left(1 + D \operatorname{sen}(2Ht + r)\right)}{2Hy(t)} \right] dt + c_3. \end{aligned}$$

Pela equação (29), $y(t) = \frac{1}{2H} [2D \operatorname{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}$ e sua substituição na equação anterior, retorna

$$x(s) = \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht + r)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3.$$

Logo,

$$(x(s), y(s), 0) = \left(\int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht+r)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht+r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3, \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs + r) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}, 0 \right).$$

Definindo $t = \frac{-r}{2H} + \bar{t}$ em $x(s)$,

$$x(s) = \int_{\frac{r}{2H}}^{\frac{r}{2H} + s} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2H\bar{t})}{[2D \operatorname{sen}(2H\bar{t}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} + c_3.$$

Como \bar{t} é variável de integração podemos redefinir $\bar{t} = t$, de modo que

$$x(s) = \int_{\frac{r}{2H}}^{\frac{r}{2H} + s} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3.$$

A escolha de

$$c_3 = \int_0^{\frac{r}{2H}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt$$

e de um novo parâmetro comprimento de arco \bar{s} dado por $s = -r/2H + \bar{s}$, bem como as devidas substituições destas relações nas expressões de x e y nos dão

$$\begin{aligned} x(\bar{s}) &= \int_{\frac{r}{2H}}^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + c_3 \\ &= \int_{\frac{r}{2H}}^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt + \int_0^{\frac{r}{2H}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \int_0^{\bar{s}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt. \end{aligned}$$

e

$$y(\bar{s}) = \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2H\bar{s}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Para limpar a notação, utilizamos o fato de que \bar{s} é um parâmetro comprimento de arco para redefinir $\bar{s} = s$, ficando com

$$x(s, H, D) = \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt$$

e

$$y(s, H, D) = \frac{1}{2|H|} [2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, a curva

$$\gamma(s, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D), 0)$$

é a geratriz de uma superfície de revolução com curvatura média constante $H \neq 0$. □

4 Análise de $\gamma(s, H, D)$.

Nesta seção estudaremos a dependência da aplicação $\gamma(s, H, D)$, dada por (4), (27) e (28), em termos de s , H e D .

Proposição 4.1. *A aplicação $\gamma(s, H, D)$ satisfaz a igualdade*

$$\gamma(s, -H, D) = \gamma(s, H, -D).$$

Demonstração. Basta verificar que

$$x(s, -H, D) = x(s, H, -D) \text{ e } y(s, -H, D) = y(s, H, -D).$$

De fato,

$$\begin{aligned} x(s, -H, D) &= \int_0^s \left[\frac{1+D \operatorname{sen}(-2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(-2Ht)+1+D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt = \int_0^s \left[\frac{1-D \operatorname{sen}(2Ht)}{[-2D \operatorname{sen}(2Ht)+1+D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \int_0^s \left[\frac{1+(-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht)+1+(-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt = x(s, H, -D). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y(s, -H, D) &= \frac{1}{2|-H|} [2D \operatorname{sen}(-2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|H|} [2(-D) \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}} = y(s, H, -D). \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

No próximo resultado, analisaremos o comportamento de γ em relação a deslocamentos do parâmetro comprimento de arco s .

Proposição 4.2. *Para $\gamma(s, H, D)$ como no Teorema 3.1 vale a igualdade*

$$\gamma\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) = \gamma(s, H, -D) - \vec{a}$$

em que

$$\vec{a} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1+(-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht)+1+(-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt, 0, 0 \right).$$

Demonstração. Tomando $t = \bar{t} + \frac{\pi}{2H}$ na expressão a seguir

$$\begin{aligned}
 x\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) &= \int_0^{s - \frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2H\bar{t} + \pi)}{[2D \operatorname{sen}(2H\bar{t} + \pi) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 + D[\operatorname{sen}(2H\bar{t}) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2H\bar{t})]}{[2D[\operatorname{sen}(2H\bar{t}) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2H\bar{t})] + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2H}}^s \left[\frac{1 - D \operatorname{sen}(2H\bar{t})}{[-2D \operatorname{sen}(2H\bar{t}) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] d\bar{t} \\
 &= \int_0^s \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt - \int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\
 &= x(s, H, -D) - \int_0^{\frac{\pi}{2H}} \left[\frac{1 + (-D) \operatorname{sen}(2Ht)}{[2(-D) \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + (-D)^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\
 &= x(s, H, -D) - a.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) &= \left[2D \operatorname{sen}\left(2H\left(s - \frac{\pi}{2H}\right)\right) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2D \operatorname{sen}(2Hs - \pi) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2D[\operatorname{sen}(2Hs) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(2Hs)] + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[-2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[2(-D) \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + (-D)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= y(s, H, -D).
 \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \gamma\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right) &= \left(x\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), y\left(s - \frac{\pi}{2H}, H, D\right), 0\right) \\ &= \left(x(s, H, -D) - a, y(s, H, -D), 0\right) \\ &= \left(x(s, H, -D), y(s, H, -D), 0\right) + (-a, 0, 0) \\ &= \left(x(s, H, -D), y(s, H, -D), 0\right) - (a, 0, 0) \\ &= \gamma(s, H, -D) - \vec{a}. \end{aligned}$$

□

Na próxima proposição vamos analisar o comportamento do parâmetro H em $\gamma(s, H, D)$ em relação à multiplicação por um número real positivo.

Proposição 4.3. *Seja $\gamma(s, H, D)$ como no Teorema 3.1, a igualdade*

$$\gamma(s, \lambda H, D) = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \gamma(\lambda s, H, D), \quad \lambda > 0.$$

é válida.

Demonstração. Tem-se que,

$$\gamma(s, \lambda H, D) = (x(s, \lambda H, D), y(s, \lambda H, D), 0).$$

Primeiramente vamos verificar para a primeira coordenada da curva,

$$\begin{aligned} x(s, \lambda H, D) &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2\lambda H t)}{[2D \operatorname{sen}(2\lambda H t) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt \\ &= \int_0^s \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2\lambda H t)}{[2D \operatorname{sen}(2\lambda H t) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dt. \end{aligned}$$

Realizando substituição simples $u = \lambda t$ com $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} x(s, \lambda H, D) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda s} \left[\frac{1 + D \operatorname{sen}(2Hu)}{[2D \operatorname{sen}(2Hu) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}} \right] du \\ &= \frac{1}{\lambda} x(\lambda s, H, D). \end{aligned}$$

Vamos analisar a segunda coordenada da curva,

$$\begin{aligned} y(s, \lambda H, D) &= \frac{1}{2|\lambda H|} [2D \operatorname{sen}(2\lambda H s) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\lambda > 0}{=} \frac{1}{2\lambda|H|} [2D \operatorname{sen}(2\lambda H s) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\lambda} y(\lambda s, H, D). \end{aligned}$$

Obtemos que,

$$\begin{aligned} \gamma(s, \lambda H, D) &= (x(s, \lambda H, D), y(s, \lambda H, D), 0) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} x(\lambda s, H, D), \frac{1}{\lambda} y(\lambda s, H, D), 0 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} (x(\lambda s, H, D), y(\lambda s, H, D), 0) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} \right) \gamma(\lambda s, H, D), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

□

Observação 4.1. *Segue das Proposições (4.1), (4.2) e (4.3) que é suficiente e considerar $D \geq 0$ e $H > 0$ no Teorema 3.1.*

Daqui por diante, analisaremos o comportamento da curva geratriz $\gamma(s, H, D)$ para diversos valores de D . Começamos com $D = 0$.

Proposição 4.4. *A superfície gerada pela rotação de*

$$\gamma(s, H, 0) = \left(s, \frac{1}{2H}, 0 \right),$$

em torno do eixo x é um cilindro circular reto de raio $\frac{1}{2H}$.

Demonstração. Fazendo $D = 0$ em (3),

$$\gamma(s, H, 0) = (x(s, H, 0), y(s, H, 0), 0) = \left(\int_0^s dt, \frac{1}{2H}, 0 \right) = \left(s, \frac{1}{2H}, 0 \right)$$

que forma uma linha reta que ao ser rotacionada em torno do eixo x gera um cilindro de raio $\frac{1}{2H}$, como está na figura 3.

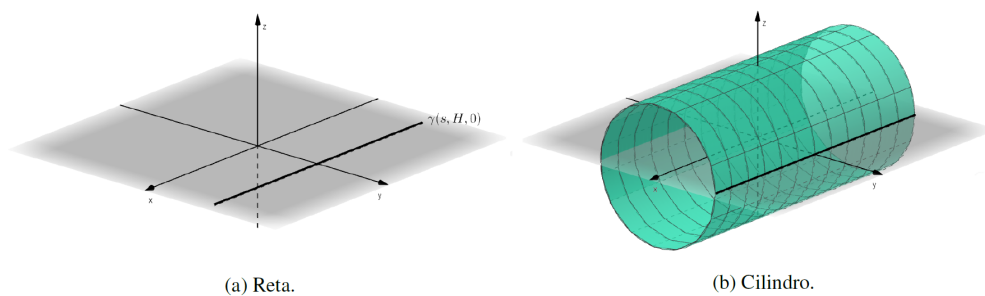


Figura 3: $D = 0$

□

Restringindo a variação do parâmetro comprimento de arco no intervalo $\left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$, podemos analisar o caso quando $D = 1$.

Proposição 4.5. *A rotação da curva*

$$\gamma(s, H, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2H}} - \frac{\sqrt{1 - \text{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2H}}, \frac{1}{\sqrt{2H}} [\text{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

$s \in \left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$, em torno do eixo x é uma esfera de raio $\frac{1}{H}$ e centro $\left(\frac{1}{\sqrt{2H}}, 0, 0\right)$.

Demonstração. Pondo $D = 1$ em (3), teremos

$$\gamma(s, H, 1) = (x(s, H, 1), y(s, H, 1), 0).$$

Analisando a coordenada $x(s, H, 1)$,

$$\begin{aligned} x(s, H, 1) &= \int_0^s \frac{1 + \operatorname{sen}(2Ht)}{\sqrt{2 + 2 \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2Ht)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2Ht)}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^s \frac{\cos(2Ht)}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}} dt \end{aligned}$$

em que escolhemos $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2Ht)} = \sqrt{(\cos(2Ht))^2} = \cos(2Ht)$, pois por (27), $x(s, H, 1) \geq 0$. Fazendo a substituição $u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Ht)}$ na última integral e a resolvendo, teremos

$$x(s, H, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}H} - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2}H}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y(s, H, 1) &= \frac{1}{2H} [2 \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + 1]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}H} [\operatorname{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Portanto, a equação da curva geratriz com $D = 1$ é dada por

$$\gamma(s, H, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}H} - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2Hs)}}{\sqrt{2}H}, \frac{1}{\sqrt{2}H} [\operatorname{sen}(2Hs) + 1]^{\frac{1}{2}}, 0 \right),$$

em que s pertence ao intervalo $\left(0, \frac{3\pi}{4H}\right)$ consequentemente a geratriz é regular ($\gamma'(s, H, 1) \neq 0$). Geometricamente $\gamma(s, H, 1)$ é um semi-círculo com centro em $\left(\frac{1}{\sqrt{2}H}, 0, 0\right)$ e raio $\frac{1}{H}$, quando rotacionada em torno do eixo x gera uma esfera como está representado na figura 4. \square

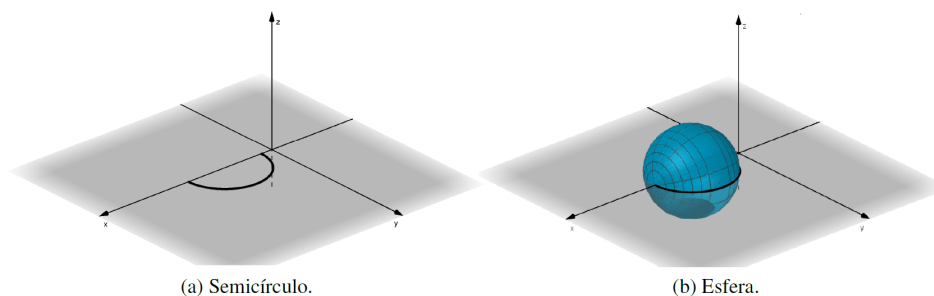


Figura 4: $D = 1$

A trajetória de um dos focos de uma cônica que rola sem deslizar sobre uma reta tangente é denominada como a *roulette* de uma cônica. Considerando o eixo x como a reta tangente às cônicas, os trabalhos *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* de Ch. Delaunay [1] e *The Surfaces of Delaunay* de J. Eells [2] provam que a rotação das roulettes das cônicas geram superfícies de revolução CMC. Além disso, a roulette da elipse com a, b positivos é a ondulária caracterizada pela equação

$$y^2 \pm 2ayx' + b^2 = 0, \quad a > b. \tag{30}$$

Por outro lado, a nodária (roulette da hipérbole) gera a nodóide que satisfaz

$$y^2 \pm 2ayx' - b^2 = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

A seguir, estabelecemos uma relação entre as constantes $a, b \in \mathbb{R}$ referentes às equações (30) e (31) e os resultados obtidos neste trabalho. Com uma simples manipulação das expressões de x, y dadas por (27) e (28) e suas derivadas x' e y' , obtemos

$$y^2(s) - \frac{1}{H}y(s)x'(s) + \frac{1 - D^2}{4H^2} = 0. \tag{32}$$

Se D pertence ao intervalo aberto $(0, 1)$, teremos as relações

$$\pm a = \frac{1}{H} \text{ e } b^2 = \frac{1 - D^2}{4H^2},$$

e ao associá-las à equação (30), podemos afirmar $\gamma(s, H, D)$ é uma ondulária. Por outro lado, se $D > 1$, a comparação entre as equações (31) e (32), fornecem

$$\pm a = \frac{1}{H} \text{ e } b^2 = - \left[\frac{1 - D^2}{4H^2} \right],$$

verificando que $\gamma(s, H, D)$ é uma nodária. As proposições 4.6 e 4.7, a seguir, resumizam as afirmações anteriores.

Proposição 4.6. Para $0 < D < 1$, $\gamma(s, H, D)$ é uma ondulária que gera o Ondulóide.

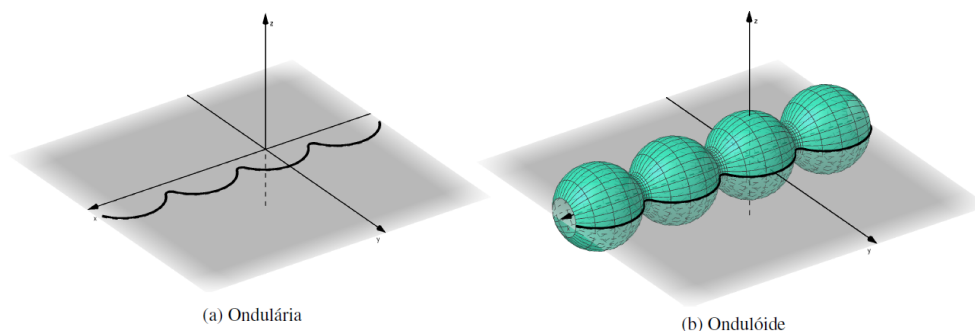


Figura 5: $0 < D < 1$

Proposição 4.7. Para $D > 1$, $\gamma(s, H, D)$ é uma nodária que gera o Nodóide.

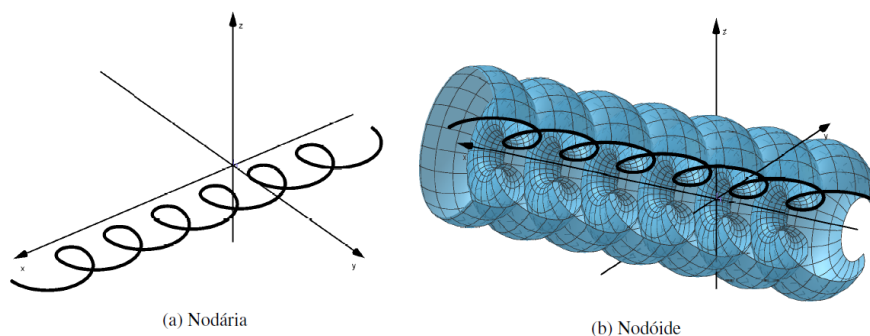


Figura 6: $D > 1$

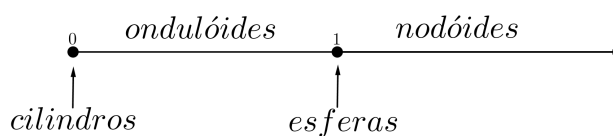
5 Conclusão

Seja Σ_H o conjunto das superfícies de revolução com curvatura média constante H , também conhecidas como superfícies do tipo Delaunay com curvatura média H . Unindo os resultados fornecidos pelo Teorema 2.1 e as Proposições 4.1 até 4.7, verificamos que a rotação de

$$\gamma(s, H, D) = \left(\int_0^s \frac{1 + D \operatorname{sen}(2Ht)}{[2D \operatorname{sen}(2Ht) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}}, \frac{[2D \operatorname{sen}(2Hs) + 1 + D^2]^{\frac{1}{2}}}{2H}, 0 \right),$$

em torno do eixo x , fornece uma família a 1-parâmetro de superfícies do tipo Delaunay Σ_H em que:

1. se $D = 0$, temos cilindros retos de raio $\frac{1}{2H}$;
2. se $0 < D < 1$, temos ondulóides;
3. se $D = 1$, temos esferas de raio $\frac{1}{H}$;
4. se $D > 1$, temos nodóides.



Ou seja, dada

$$X(s, t, H, D) = (x(s, H, D), y(s, H, D) \cos(t), y(s, H, D) \operatorname{sen}(t))$$

a aplicação

$$\begin{aligned} X(s, t, H, \cdot) : [0, \infty) &\longrightarrow \Sigma_H \\ D &\mapsto X(s, t, H, D) \end{aligned}$$

é sobrejetiva.

Referências

- [1] Ch. Delaunay. Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 309–314, 1841.
- [2] James Eells. The surfaces of delaunay. In *Mathematical Conversations*, pages 159–165. Springer, 2001.
- [3] I. V. Viana & C. S. Fernandez. A Vida de Sophie Germain. Disponível em: <http://mulheresnamatematica.sites.uff.br/wp-content/uploads/sites/237/2018/07/A-Vida-de-Sophie-Germain.pdf>, Acesso em: 21 setembro. 2020.
- [4] Katsuei Kenmotsu. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 32(1):147–153, 1980.