Sobre a existência de medidas invariantes que minimizam a ação de Mather

Heric Corrêa da Silva heric-correa@ufmg.br

Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo

Em 1991, no seminal artigo [8], John Mather generaliza para dimensões altas a teoria que hoje é denominada teoria de Aubry-Mather. Em 1996, Ricardo Mañé em [7] traz uma nova abordagem ao problema fazendo avanços significativos para o entendimento global de sistemas Lagrangianos não-autônomos. Neste trabalho, por meio de uma abordagem mista entre os trabalhos de: Ricardo Mañé, John Mather e de seus respectivos alunos Gonzalo Contreras ([2]) e Alfonso Sorrentino ([10]) será mostrado para Lagrangianos autônomos que cada nível de energia não vazio suporta pelo menos uma medida ergódica sobre as quais o funcional da ação de Mather é finita, além disso será provado a existência de medidas invariantes que minimizam a ação.

Palavras-chave

Ação de Mather. Fluxos Lagrangianos, Medidas Holonômicas, Teoria Ergódica,

1 Introdução

Seja $\mathbb{T}^n$ toro n-dimensional e $T\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, em alusão à mecânica clássica usaremos x como variável posição e v como variável velocidade, um ponto no espaço tangente será denotado por (x, v). Um *Lagrangiano* é uma função que a cada (x, v) associa um número real, isto é, $L\colon T\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$. Tal função será chamada *Lagrangiano de Tonelli* se satisfaz três condições

H1 (Regularidade). $L \in C^2(T\mathbb{T}^n)$.

H2 (Convexidade). Para cada $x \in \mathbb{T}^n$ a função $v \mapsto L(x, v)$ é convexa.

H3 (Superlinearidade). Dado $a > 0$ existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, v) \geq a\|v\| - b$ para todo $(x, v) \in T\mathbb{T}^n$

Um problema clássico de Cálculo de Variações consiste em investigar extremais do funcional da Ação

$$\mathcal{A}(\gamma) := \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

sob todas as curvas absolutamente contínuas $\gamma\colon [0,T] \to 0$ com extremos fixos. Com efeito, pode ser verificado em [3] que uma curva γ é extremal para $\mathcal{A}$ se, e somente se,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Esta equação é chamada *Equação de Euler-Lagrange*. Para Lagrangianos tipo Tonelli temos ainda que o fluxo $\phi^t\colon T\mathbb{T}^n \to T\mathbb{T}^n$ gerado por (1) é de classe C^1. Além disso, seja $E\colon T\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$E(x,v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\cdot v - L(x,v).$$

Essa função, denominada *função energia*, é uma integral primeira para o fluxo. De fato, dado $(x_0,v_0) \in T\mathbb{T}^n$ e considerando $(\gamma(t),\dot\gamma(t)) = \phi^t(x_0,v_0)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\gamma(t),\dot\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\cdot\dot\gamma(t) - \frac{d}{dt}L \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\cdot\dot\gamma(t) + \frac{\partial L}{\partial v}\cdot\ddot\gamma(t) - \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot\gamma(t) - \frac{\partial L}{\partial v}\cdot\ddot\gamma(t) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\cdot\dot\gamma(t) - \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\dot\gamma(t) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot\dot\gamma(t) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, para cada $c \in \mathbb{R}$ o nível de energia $E_c = E^{-1}(c)$ é invariante pelo fluxo. Além disso, em [2] é mostrado que da superlinearidade de L segue que E_c é compacto e, portanto o fluxo ϕ^t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Além do nível de energia, em 1991 no seminal artigo [8], John Mather generaliza para dimensões altas a noção de outro conjunto compacto e invariante pelo fluxo que outrora já havia sido estudo por Serge Aubry e o próprio Mather para aplicações do tipo Twist. Esses conjuntos decorrem do mesmo objetivo variacional de minimizar $\displaystyle\int L$, porém agora trocando o problema sobre órbitas particulares para medidas que são invariantes pelo fluxo, isto é, o objetivo passa a ser de minimizar $A(\mu) = \displaystyle\int L\, d\mu$ dentre todas as medidas invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange gerado por L.

2 As medidas holonômicas de Mañé

Nesta seção, apresentaremos um subconjunto de medidas borelianas com a topologia herdada do espaço dual das funções com crescimento no máximo linear no infinito. Mostraremos que esse espaço é metrizável e contém um importante subconjunto de medidas borelianas chamada *medidas holonômicas* que, por sua vez, contém o conjunto fechado das medidas invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange. Os resultados originais de Mañé ([7]) são para Lagrangianos não-autônomos (que pode depender do tempo), para Lagrangianos autônomos os resultados estão, na maioria, enunciados em [2].

Seja $\mathcal{P}(T\mathbb{T}^n)$ o conjunto das probabilidades borelianas sobre $T\mathbb{T}^n$ e considere o subconjunto

$$\mathcal{M}_\ell := \big\{\mu \in \mathcal{P}(T\mathbb{T}^n) \text{ tal que } \int \ell \; d\mu < \infty\big\},$$

onde $\ell \colon T\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ é a função $\ell(x,v) = \|v\|$. Considere também o espaço de funções contínua com crescimento no máximo linear no infinito, Isto é

$$C_\ell(T\mathbb{T}^n) := \left\{ f \in C(T\mathbb{T}^n) \text{ tal que } \|f\|_\ell := \sup \frac{|f|}{1+\ell} < \infty \right\}.$$

Lema 1. *Se* $g \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ *então* $\int g \; d\mu < \infty$ *para toda* $\mu \in \mathcal{M}_\ell$.

Demonstração. Por definição, existe um $M > 0$ tal que $|g(x,v)|/(1+\|v\|) \leq M$ para todo $(x,v) \in T\mathbb{T}^n$. Consequentemente para cada $\mu \in \mathcal{M}_\ell$ vale

$$\int g \; d\mu \leq M + M \int \|v\| \; d\mu < \infty.$$

□

Observação 2. Para cada $\mu \in \mathcal{M}_\ell$ podemos associar um funcional I_μ no dual de $C_\ell(T\mathbb{T}^n)$. De fato, o mapa $\mu \mapsto I_\mu(f) := \int f d\mu$ é bem definido pois é linear (propriedade da integral) e dado $f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$

$$|I_\mu(f)| \leq \int |f|\ d\mu \leq \|f\|_\ell \int (1+\ell)\ d\mu \implies \|I_\mu\| < \infty,$$

concluindo que $I_\mu \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)^*$

Definição 3 (Topologia Vaga)**.** Seja $(\mu_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{M}_\ell$, será dito que a sequência converge na *topologia vaga* para uma medida $\mu \in \mathcal{M}_\ell$ denotando por $\mu_n \to \mu$ se

$$\int f\ d\mu = \lim_n \int f\ d\mu_n \quad \text{para toda } f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n).$$

Observação 4. Seja $C_C(T\mathbb{T}^n)$ o subconjunto de $C(T\mathbb{T}^n)$ das funções com suporte compacto. Não é difícil verificar que $C_C(T\mathbb{T}^n) \subseteq C_\ell(T\mathbb{T}^n) \subseteq C(T\mathbb{T}^n)$ e em [6] é provado que $C_C(T\mathbb{T}^n)$ é denso em $C(T\mathbb{T}^n)$ na topologia compacto-aberta. Então, na topologia da convergência uniforme sobre compactos, o fecho de $C_C(T\mathbb{T}^n)$ também é $C(T\mathbb{T}^n)$. Além disso, nessa mesma topologia, em [5] é mostrado que o conjunto $C_C(T\mathbb{T}^n)$ é separável.

Considere então $\{f_m\}_m \subset C_C(T\mathbb{T}^n)$ uma sequência densa em $C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ na topologia da convergência uniforme sobre compactos de $T\mathbb{T}^n$. E seja $d\colon \mathcal{M}_\ell \times \mathcal{M}_\ell \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(\mu_1,\mu_2) = \left| \int \ell\ d\mu_1 - \int \ell\ d\mu_2 \right| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{1}{\|f_m\|_\infty} \left| \int f_m\ d\mu_1 - \int f_m\ d\mu_2 \right|.$$

onde $\|f_m\|_\infty := \sup |f_m|$.

Lema 5. *d é métrica sobre $\mathcal{M}_\ell$.*

Demonstração. Com efeito, se $\mu = \nu$ então $d(\mu,\nu) = 0$.
Reciprocamente, se $d(\mu,\nu) = 0$ então

$$\left| \int f_n\ d\mu - \int f_n\ d\nu \right| = 0 \quad \text{para todo } n.$$

Como $\{f_m\}_m$ é uma sequência densa em $C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ na topologia da convergência uniforme sobre compactos, então dado qualquer compacto mensurável K temos que existe uma sequência $\{f_{m_i}\}_i$ tal que $f_{m_i}|_K \to \chi_K$ uniformemente. Logo,

$$\begin{aligned} |\mu(K) - \nu(K)| &= \left| \int_K d\mu - \int_K d\nu \right| \\ &\leq \left| \int_K d\mu - \int_K f_{m_i} d\mu \right| + \left| \int_K f_{m_i} d\mu - \int_K f_{m_i} d\nu \right| + \left| \int_K f_{m_i} d\nu - \int_K d\nu \right| \end{aligned}$$

que tende pra zero quando $m_i \to \infty$. Então $\mu(K) = \nu(K)$ para todo compacto mensurável. Como as medidas são borelianas sobre $T\mathbb{T}^n$ então elas são regulares, isto é, dado qualquer conjunto mensurável A temos que

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid \text{para } K \subset A \text{ compacto mensurável.}\}$$

Logo, temos para qualquer mensurável A

$$\mu(A) = \sup_K\{\mu(K)\} = \sup_K\{\nu(K)\} = \nu(E),$$

o que prova a igualdade $\mu = \nu$.
A simetria e a desigualdade triangular seguem diretamente das propriedades do módulo sobre números reais. □

Lema 6. *Sejam $(\mu_n)_n$ e μ uma sequência e uma medida em $\mathcal{M}_\ell$. Se $d(\mu_n, \mu) \to 0$ então para todo $K \subset T\mathbb{T}^n$ compacto e f contínua em $T\mathbb{T}^n$ vale*

$$\int_K f \, d\mu_n \to \int_K f \, d\mu \quad \textit{quando} \;\; n \to +\infty.$$

Demonstração. Com efeito, se $d(\mu_n, \mu) \to 0$ então

$$\left| \int \|v\| \, d\mu_n - \int \|v\| \, d\mu \right| \longrightarrow 0,$$

e para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\left| \int f_m \, d\mu_n - \int f_m \, d\mu \right| \longrightarrow 0 \;\; \text{quando} \;\; n \to \infty. \tag{2}$$

Além disso, dada f contínua e qualquer compacto $K \subset T\mathbb{T}^n$, pela densidade na definição da métrica, existe uma sequência $\{f_{m_i}\}_i \subset \{f_m\}_m$ tal que $f_{m_i}|_K \longrightarrow f|_K$ uniformemente. Logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_K f\, d\mu - \int_K f\, d\mu_n\right| \leq \left|\int_K f\, d\mu - \int_K f_{m_i}\, d\mu\right| + \left|\int_K f_{m_i}\, d\mu - \int_K f_{m_i}\, d\mu_n\right| \\ + \left|\int_K f_{m_i}\, d\mu_n - \int_K f\, d\mu_n\right|\end{aligned}$$

Na qual, o primeiro e o último termo tendem para zero pela uniformidade da convergência $f_{m_i}|_K \longrightarrow f|_K$ e o termo intermediário tende para zero por (2). $\square$

Teorema 7. *A topologia gerada pela métrica $d(\cdot,\cdot)$ é equivalente à topologia vaga sobre $C_\ell(T\mathbb{T}^n)$, isto é, para toda sequência (μ_n) em $\mathcal{M}_\ell$*

$$\mu_n \to \mu \ \textit{ na topologia vaga} \quad \Longleftrightarrow \quad d(\mu_n, \mu) \to 0.$$

Demonstração. Suponha $\mu_n \to \mu$ na topologia vaga, isto é,

$$\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu \quad \forall f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n).$$

Primeiro, observe que a segunda parcela da definição da métrica pode ser cotada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\frac{1}{\|f_m\|_\infty}\left|\int f_m\, d\mu_1 - \int f_m\, d\mu_2\right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\frac{1}{\|f_m\|_\infty}\left(\left|\int f_m\, d\mu_1\right| + \left|\int f_m\, d\mu_2\right|\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\Bigg(\frac{1}{\|f_m\|_\infty}\left|\int f_m\, d\mu_1\right| + \frac{1}{\|f_m\|_\infty}\Bigg|\int f_m\, d\mu \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{\|f_m\|_\infty}\|f_m\|_\infty + \frac{1}{\|f_m\|_\infty}\|f_m\|_\infty\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2.\end{aligned}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos tomar um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{m \geq m_0} \frac{1}{2^m} \frac{1}{\|f_m\|_\infty} \left| \int f_m \, d\mu_n - \int f_m \, d\mu \right| \leq \sum_{m \geq m_0} \frac{1}{2^m} \cdot 2 < \epsilon.$$

Além disso, por hipótese, pode-se tomar também algum n_0 suficientemente grande tal que para cada $0 \leq m < m_0$ vale

$$\left| \int f_m \, d\mu_n - \int f_m \, d\mu \right| < \epsilon.$$

e

$$\left| \int \ell \, d\mu_n - \int \ell \, d\mu \right| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então para $n \geq n_0$ temos

$$d(\mu_n, \mu) \leq \epsilon + \sum_{m=1}^{m_0} \frac{1}{2^m} \cdot \epsilon + \sum_{m > m_0} \frac{1}{2^m} \cdot 2 \leq 3\epsilon$$

concluindo que $d(\mu_n, \mu) \to 0$.

Reciprocamente, suponha $d(\mu_n, \mu) \to 0$. Considere $\{K_m\}_m \subset T\mathbb{T}^n$ uma família de conjuntos compactos tais que $K_m \uparrow T\mathbb{T}^n$ no sentido que $K_m \subset K_{m+1}$ para todo m e $\cup K_m = T\mathbb{T}^n$. Então, pelo Lema 6, para cada m

$$\int_{K_m} f \, d\mu_n \to \int_{K_m} f \, d\mu, \quad \forall f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$$

e

$$\int \ell \, d\mu_n \to \int \ell \, d\mu$$

O que implica

$$\int_{T\mathbb{T}^n / K_m} \ell \, d\mu_n \to \int_{T\mathbb{T}^n / K_m} \ell \, d\mu \quad \text{para todo } m.$$

Assim, como K_m cresce para $T\mathbb{T}^n$, dado $\epsilon > 0$ pode-se tomar um $m_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_{T\mathbb{T}^n/K_{m_\epsilon}} (1+\ell)\ d\mu < \frac{\epsilon}{4},$$

e podemos tomar um $N > 0$ com

$$\int_{T\mathbb{T}^n/K_{m_\epsilon}} (1+\ell)\ d\mu_n < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ para todo } n > N.$$

Assim, dada $f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ arbitrária se pode supor N grande o suficiente tal que para todo $n \geq N$

$$\left| \int_{K_\epsilon} f\ d\mu_n - \int_{K_\epsilon} f\ d\mu \right| < \epsilon$$

e

$$\left| \int_{T\mathbb{T}^n/K_\epsilon} |f|\ d\mu_n - \int_{T\mathbb{T}^n/K_\epsilon} |f|\ d\mu_n \right| \leq \|f\|_\ell \int_{T\mathbb{T}^n/K_\epsilon} (1+\ell)\ d\mu_n \leq \|f\|_\ell\ \frac{\epsilon}{2}.$$

Usando a mesma estimativa para μ segue de desigualdade triangular para o módulo que

$$\left| \int f\ d\mu_n - \int f\ d\mu \right| \leq \epsilon + \|f\|_\ell (\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4}).$$

Como f e $\epsilon > 0$ são arbitrários está provado que $\mu_n \to \mu$ na topologia vaga. $\square$

Considere uma curva $\gamma\colon \mathbb{R} \to T\mathbb{T}^n$ absolutamente contínua e fechada de período T. Considere o traço $\Gamma := \{(\gamma(t), \dot\gamma(t)) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset T\mathbb{T}^n$ e o funcional definido em $C(\Gamma)$ dado por

$$F_\gamma(f) := \frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t), \dot\gamma(t))\ dt \ \text{ para toda } \ f \in C(\Gamma).$$

Como Γ é compacto e $\|F_\gamma\| = 1$ segue do Teorema de Representação de Riesz que existe ν_γ probabilidade sobre Γ tal que

$$\int f\ d\nu_\gamma = F_\gamma(f) \ \text{ para toda } \ f \in C(\Gamma).$$

Então podemos definir uma medida $\mu_\gamma \in \mathcal{P}(T\mathbb{T}^n)$ pondo $\mu_\gamma = \nu_\gamma$ sobre Γ e

$\nu_\gamma = 0$ caso contrário. Todas as medidas definidas assim pertencem a $\mathcal{M}_\ell$, pois $\displaystyle\int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt < \infty$.

Seja $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_\ell$ o conjunto de todas as medidas μ_γ definidas acima.

Definição 8 (Medidas Holonômicas)**.** O fecho de $\mathcal{H}$ com respeito a topologia de $\mathcal{M}_\ell$, denotado por $\overline{\mathcal{H}}$, é nomeado o conjunto das *Medidas Holônomicas* sobre $\mathbb{T}^n$.

Proposição 9. *O conjunto das Medidas Holonômicas $\overline{\mathcal{H}}$ é convexo.*

Demonstração. Sejam $\gamma_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n$, $i \in \{1, 2\}$, curvas fechadas absolutamente contínuas de período T_i. Suponha que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ satisfaz $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Será mostrado que $\alpha_1\mu_{\gamma_1} + \alpha_2\mu_{\gamma_2} \in \overline{\mathcal{H}}$. Sejam $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ e considere uma curva C^1, $\eta \colon [0, 1] \to \mathbb{T}^n$ com $\eta(0) = \gamma_1(0)$ e $\eta(1) = \gamma_2(0)$. Defina uma curva $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^n$ de período $m_1T_1 + m_2T_2 + 2$ pondo

- $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ para $t \in [0, m_1T_1]$
- $\gamma(m_1T_1 + t) = \eta(t)$ para $t \in [0, 1]$
- $\gamma(m_1T_1 + 1 + t) = \gamma_2(t)$ para $t \in [0, m_2T_2]$
- $\gamma(m_1T_1 + m_2T_2 + 1 + t) = \eta(1 - t)$ para $t \in [0, 1]$

observe que para qualquer m_1, m_2 a medida μ_γ está em $\mathcal{H}$, logo podemos tomar m_1, m_2 grande o suficiente tal que $\dfrac{m_i}{m_1 + m_2}$ se aproxima de α_i, $i = 1, 2$. Logo μ_γ se aproxima de $\alpha_1\mu_{\gamma_1} + \alpha_2\mu_{\gamma_2}$. □

3 Existência de medidas ergódicas para o fluxo de Euler-Lagrange

Nesta seção será mostrado que cada nível de energia não vazio suporta ao menos uma medida ergódica que torna o lagrangiano integrável, isto é $\displaystyle\int L < \infty$.

Considere o conjunto das medidas de probabilidades borelianas que são invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange, em outras palavras:

$$\mathcal{M}_{inv}(L) := \big\{\mu \in \mathcal{P}(T\mathbb{T}^n) \ \text{ tal que } \ \phi^t_*\mu = \mu \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Teorema 10. *Para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que o nível de energia E_c é não vazio, existe uma medida ergódica $\mu \in \mathcal{M}_\ell$ com suporte contido em E_c. Mais que isso, L é integrável com respeito a μ.*

Demonstração. Dado $c \in \mathbb{R}$ tal que $E_c \neq \emptyset$, tome $(x_0, v_0) \in E_c$ e considere $\gamma(t) := \pi\phi^t(x_0, v_0)$ para todo t, onde $\pi\colon T\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é a projeção canônica na primeira variável. Para cada $T > 0$ defina o seguinte elemento de $C_\ell(E_c)^* = C(E_c)^*$ pondo

$$G_T(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt \quad \text{para todo } f \in C(E_c).$$

Observe que cada funconal $G_T\colon C(E_c) \to \mathbb{R}$ é bem definido desde que $\big\{(\gamma(t), \dot\gamma(t))\big\}_{t\in\mathbb{R}} \subset E_c$. Além disso, como $\|G_T\| = 1$, pelo Teorema de Representação de Riesz existe uma única probabilidade ν_T sobre E_c tal que $I_{\nu_T} = G_T$, isto é

$$\int f\, d\nu_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt \quad \text{para todo } f \in C(E_c).$$

Ainda pelos resultados de Análise Funcional, o conjunto $\big\{I_{\nu_T}\big\}_T$ é sequencialmente compacto pois $B' := \{F \in C(E_c)^* : \|F\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca* (Teorema de Alaoglu) e $B' \supset \{I_{\nu_T}\}_T$. Segue então que existe uma subsequência $\big\{I_{\nu_{T_k}}\big\}_k$ convergente. Como $S^+ := \{F \in C(E_c)^* : \|F\| = 1, F \text{ positivo}\}$ é fechado [11, pág 20] segue que existe uma única ν_0 probabilidade sobre E_c tal que $I_{\nu_{T_k}} \to I_{\nu_0}$ quando $k \to \infty$.

Defina para cada $k \geq 0$ uma medida $\mu_k \in \mathcal{P}(T\mathbb{T}^n)$ pondo $\mu_k = \nu_k$ sobre E_c e $\mu_k = 0$ caso contrário. Por construção temos $\operatorname{supp}(\mu_k) \subset E_c$. Além disso, $\displaystyle\int L\, d\mu_k < \infty$ uniformemente sobre k. Pois

$$\int L\, d\mu_k = \int_{E_c} L\, d\mu_k + \int_{T\mathbb{T}^n/E_c} L\, d\mu_k = \int_{E_c} L\, d\mu_k \leq \max_{E_c} |L(x,v)|.$$

Da superlinearidade, segue que $\mu_k \in \mathcal{M}_\ell$.

A fim de provar que $\mu_0 \in \mathcal{M}_{inv}(L)$ falta verificar que μ_0 é invariante pelo fluxo. Com efeito, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ vale a seguinte desigualdade triangular

$$\begin{aligned}\left|\int f\ d\phi_*^t\mu_0 - \int f\ d\mu_0\right| \leq \left|\int f\ d\phi_*^t\mu_0 - \int f\ d\phi_*^t\mu_k\right| &+ \left|\int f\ d\phi_*^t\mu_k - \int f\ d\mu_k\right| \\ &+ \left|\int f\ \mu_k - \int f\ d\mu_0\right|.\end{aligned}$$

Como

$$\left|\int f\ \mu_k - \int f\ d\mu_0\right| \longrightarrow 0,$$

$$\left|\int f\ d\phi_*^t\mu_0 - \int f\ d\phi_*^t\mu_k\right| = \left|\int f\circ\phi^t\ d\mu_0 - \int f\circ\phi^t\ d\mu_k\right| \longrightarrow 0$$

e, por último

$$\begin{aligned}\left|\int f\ d\phi_*^t\mu_k - \int f\ d\mu_k\right| &= \left|\int f\circ\phi^t\ d\mu_k - \int f\ d\mu_k\right| \\ &= \frac{1}{T_k}\left|\int_0^{T_k} f\big(\phi_L^t(\gamma(s),\dot\gamma(s))\big)\ ds - \int_0^{T_k} f(\gamma(s),\dot\gamma(s))\ ds\right| \\ &= \frac{1}{T_k}\left|\int_t^{T_k+t} f(\gamma(s),\dot\gamma(s))\ ds - \int_0^{T_k} f(\gamma(s),\dot\gamma(s))\ ds\right| \\ &\leq \frac{2|t|}{T_k}\max_{E_c}|f| \longrightarrow 0 \text{ quando } T_k \to +\infty.\end{aligned}$$

Segue a igualdade

$$\left|\int f\ d\phi_*^t\mu_0 - \int f\ d\mu_0\right| = 0.$$

Consequentemente $\phi_*^t\mu_0 = \mu_0$. Mais do que isso, μ_0 é ergódica pois

$$\begin{aligned}\int f\ d\mu_0 &= \lim_{k\to\infty}\int f\ d\mu_k \\ &= \lim_{T_k\to\infty}\frac{1}{T_k}\int_0^{T_k} f(\gamma(t),\dot\gamma(t))dt\end{aligned}$$

para toda f integrável com respeito a μ_0. □

Proposição 11. $\mathcal{M}_{inv}(L) \subseteq \overline{\mathcal{H}}$

Demonstração. O teorema anterior garante que $\mathcal{M}_{inv}(L)$ é não vazio. É suficiente provar a inclusão para o caso que $\mu \in \mathcal{M}_\ell$ é ergódica, uma vez que toda medida invariante pode ser decomposta em componentes ergódicas [9, pág 138]. Ademais, o conjunto de medidas invariantes é um conjunto convexo cujos pontos extremais são medidas ergódicas, logo qualquer medida invariante pode ser escrita como uma soma convexa de medidas ergódicas. Será mostrado então que para toda $f \in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ existe uma sequência $\{\mu_T\} \subset \mathcal{H}$ tal que

$$\int f \, d\mu_T \to \int f \, d\mu.$$

Como pelo Lema 1 f é integrável com respeito a μ, o Teorema Ergódico de Birkhoff garante que existe uma solução $x\colon \mathbb{R} \to T\mathbb{T}^n$ da equação de Euler-Lagrange tal que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x(t), \dot{x}(t)) \, dt = \int f \, d\mu.$$

Além disso pelo Teorema de Recorrência de Poincaré [9, pág 6] podemos encontrar uma sequência $s_T \to \infty$ de reais positivos tais que

$$(x(s_T), \dot{x}(s_T)) \to (x(0), \dot{x}(0)) \quad \text{quando } \ T \to \infty. \tag{3}$$

Tome $\gamma_T\colon \mathbb{R} \to T\mathbb{T}^n$ periódica de período s_T definida por $\gamma_T(t) = x(t)$ para todo $t \in [0, s_T - 1]$ e $\gamma_T|_{[s_t-1, s_T]}$ sendo uma curva C^1 ligando $x(s_T - 1)$ a $x(0)$ satisfazendo

$$\|\dot{\gamma}_T(t)\| \leq \tilde{d}(x(s_T - 1), x(0)). \tag{4}$$

Para todo T, em que $\tilde{d}$ é o comprimento da curva x entre os pontos no argumento. Então

$$\begin{aligned}
&\left| \int f d\mu_T - \frac{1}{s_T} \int_0^{s_T} f(x(t), \dot{x}(t)) dt \right| \\
&\qquad \leq \frac{1}{s_T} \int_0^{s_T} |f(\gamma_T(t), \dot{\gamma}_T(t)) - f(x(t), \dot{x}(t))| \, dt \\
&\qquad \leq \frac{1}{s_T} \int_{s_T - 1}^{s_T} |f(\gamma_T(t), \dot{\gamma}_T(t))| dt + \frac{1}{s_T} \int_{s_T - 1}^{s_T} |f(x(t), \dot{x}(t))| \, dt. \quad (5)
\end{aligned}$$

Por (3) vale

$$\sup_T \|\dot{x}(s_T)\| < +\infty,$$

então

$$M := \sup\big\{\|\dot{x}(t)\| \ : \ |t - s_T| < 1, T \in \mathbb{R}\big\} < +\infty.$$

Logo

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{s_T}\int_{s_T-1}^{s_T} |f(x(t),\dot{x}(t))|dt &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{\|f\|_\ell}{s_T}\int_{s_T-1}^{S_T} (1+\|\dot{x}(t)\|)dt\\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{\|f\|_\ell}{s_T}(1+M) = 0.\end{aligned}$$

Além disso, de (3) e (4) segue que $\|\dot{\gamma}_T(t)\|$ é uniformemente limitado para $|t - s_T| < 1$ para todo T. Logo, por razão semelhante ao feito acima, tem-se

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{s_T}\int_{s_{T-1}}^{s_T} |f(\gamma_T(t),\dot{\gamma}_T(t))|\, dt = 0.$$

Então (5) vai pra zero quando $T \to \infty$, então

$$\int f\ d\mu_T \to \int f\ d\mu.$$

Como f é arbitrária está provado a proposição. □

4 Existência de medidas que minimizam o funcional de Mather

Nesta seção será definido o funcional da Ação de Mather e mostrado que existe medidas invariantes que a minimizam.

Proposição 12. *O conjunto $\mathcal{M}_{inv}(L)$ é fechado com a métrica induzida como subconjunto de $(\mathcal{M}_\ell, d)$.*

Demonstração. Se (μ_n) é uma sequência em $\mathcal{M}_{inv}(L)$ tal que $d(\mu_n,\mu) \to 0$ para algum $\mu \in \mathcal{M}_\ell$, é suficiente mostrar que $\mu \in \mathcal{M}_{inv}(L)$. Como $d(\mu_n,\mu) \to 0$ então claramente $d\big(\phi^t_*\mu_n, \phi^t_*\mu\big) \to 0$ e segue de $\mu_n = \phi^t_*\mu_n$ que

$$d\big(\phi^t_*\mu,\mu\big) \leq d\big(\mu,\mu_n\big) + d\big(\mu_n,\phi^t_*\mu_n\big) + d\big(\phi^t_*\mu_n,\phi^t_*\mu\big) \longrightarrow 0$$

logo $d\big(\phi_*^t\mu,\mu\big)=0$ que implica $\phi_*^t\mu=\mu$. $\square$

Definição 13. O *funcional da ação de Mather*, ou *Ação Média* associado a L é a função

$$\begin{aligned} A_L\colon \mathcal{M}_{inv}(L) &\longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\\ \mu &\longmapsto A_L(\mu)=\int L\,d\mu. \end{aligned}$$

Das hipóteses sobre o Lagrangiano, L é limitado inferiormente e portanto a ação está bem definida, é possível verificar que $L\notin C_\ell(T\mathbb{T}^n)$. Contudo, podemos *truncar* o lagrangiano e obter novas funções com crescimento constante no infinito, a saber dado $K\in\mathbb{R}$ defina as seguintes funções sobre $T\mathbb{T}^n$, $L_K(x,v):=\min\{L(x,v),K\}$. Observe que $L_K\in C_\ell(T\mathbb{T}^n)$ e que $L=\sup\limits_K L_K$.

Proposição 14. *A_L é semicontínua inferiormente com respeito a métrica d.*

Demonstração. Para cada $K\in\mathbb{R}$ defina $A_{L_K}(\mu):=\displaystyle\int L_K d\mu$. Com efeito, cada $A_{L_K}(\mu)$ é contínua pois dada qualquer sequência $\mu_n\in\mathcal{M}_{inv}(L)$ tal que $d(\mu_n,\mu)\to 0$ então pelo Teorema 5

$$\big|A_{L_K}(\mu_n)-A_{L_K}(\mu)\big|\to 0.$$

Como $L_k\uparrow L$ segue do Teorema da Convergência Monótona que $A_{L_K}\uparrow A_L$ quando $K\to\infty$, portanto A_L é semicontínua inferiormente pois o supremo de funções semicontínuas inferiormente também é semicontínua inferiormente. $\square$

Em geral A_L pode não ser contínua, veja [2, observação 2-3.4].

Como o conjunto das medidas invariantes é fechado com respeito ao espaço métrico $(\mathcal{M}_\ell,d)$ e A_L é limitada e semicontínua inferiormente então o seguinte e importante corolário se verifica.

Corolário 15. *Existe $\mu\in\mathcal{M}_{inv}(L)$ tal que*

$$A_L(\mu)=\min_{\nu\in\mathcal{M}_{inv}(L)}A_L(\nu).$$

Denote o conjunto dessas *medidas minimizantes* por $\mathcal{M}_{min}(L)$. O *conjunto de Mather* consiste no fecho da união dos suportes das medidas minimizantes, isto é,

$$\mathcal{M} = \overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{inv}(L)} \operatorname{supp} \mu}.$$

Esse conjunto é compacto, invariante e está contido em outros conjuntos igualmente importantes na teoria. Nomeadamente, nos conjuntos de Aubry ($\mathcal{A}$), de Mañé ($\tilde{\mathcal{N}}$) e o nível de energia

$$\acute{\mathcal{E}} := \{E = \min_{\nu \in \mathcal{M}_{inv}(L)} A_L(\nu)\}.$$

Esses conjuntos formam uma inclusão proposital em homenagem ao memorável matemático Ricardo Mañé:

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{N}} \subseteq \acute{\mathcal{E}}.$$

5 Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus orientadores de Iniciação Científica que me acompanharam ao longo da minha graduação, de 2016 até 2021, professores José Antônio Miranda e Carlos Carballo, ambos da UFMG. Agradeço também à FAPEMIG pelo suporte financeiro no período de 2016 e 2018 e à professora Katrin Gelfert da UFRJ pelos excelentes conselhos, sugestões e correções sobre a escrita matemática.

Referências

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Gonzalo Contreras and Renato Iturriaga. *Global minimizers of autonomous Lagrangians*. 22^{o} Colóquio Brasileiro de Matemática. [22nd Brazilian Mathe-

matics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1999.

[3] Albert Fathi. Weak kam theorem in lagrangian dynamics. *Preliminary Version*, 2008.

[4] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[5] Liaqat Ali Khan. Separability in function spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 113(1):88–92, 1986.

[6] Liaqat Ali Khan. Some approximation results for the compact-open topology. *Period. Math. Hungar.*, 30(1):81–86, 1995.

[7] Ricardo Mañé. Generic properties and problems of minimizing measures of lagrangian systems. *Nonlinearity*, 9(2):273–310, mar 1996.

[8] John N. Mather. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math. Z.*, 207(2):169–207, 1991.

[9] K. Oliveira and M. Viana. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. SBM, 2019.

[10] Alfonso Sorrentino. *Action-minimizing methods in Hamiltonian dynamics*, volume 50 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015. An introduction to Aubry-Mather theory.

[11] Onno van Gaans. Probability measures on metric spaces. *notas de aula disponivel no site pessoal do autor em 2021*.