

---

# Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

**Juan López Linares**

jlopez@usp.br

Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, Pirassununga, São Paulo, Brasil

**João Paulo Martins dos Santos**

jp2@alumni.usp.br

Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

**Alessandro Firmiano de Jesus**

lezandro@gmail.com

Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

---

## Resumo

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas usando o Geogebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e interessem-se em problemas mais desafiadores. Apresentam-se os conceitos básicos relativos ao incentro e ao ex-incentro e as métricas do triângulo associadas com as bissetrizes internas e externas. Uma combinação de outros conteúdos também são estudados: relação de Stewart, distância entre incentro e ortocentro, potência de um ponto relativo a uma circunferência e eixo e centro radical.

## Palavras-chave

Olimpíadas internacionais de Matemática, Incentro, Ex-incentro, Ensino Médio e Universitário, Geometria.

## 1 Introdução

Este material didático foi utilizado durante uma aula de um curso de “Geometria com Geogebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil, ministrado pelos autores, à distância, no primeiro semestre de 2021.

As soluções apresentadas neste texto complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focamos na apresentação mais detalhada

das transições, possibilitando que alunos e professores consigam acompanhar o desenvolvimento do problema. Adicionalmente, uma versão interativa das figuras do texto também é disponibilizada no site do Geogebra.

No Problema 1, P1 IMO 1970, são construídos três incírculos e três ex-incírculos. Solicita-se demonstrar determinada igualdade envolvendo os seis raios. Com o uso das relações métricas, associadas aos segmentos determinados pelos vértices e pelos pés das bissetrizes, e a relação de Stewart resolve-se o desafio.

No Problema 2, P4 IMO 1992, requer-se encontrar o lugar geométrico dos pontos  $P$  partindo de uma circunferência  $k$ , uma reta  $l$  tangente a  $k$ , e um ponto  $M$  sobre  $l$ .  $P$  deve satisfazer determinada propriedade. A solução está ligada à construção das circunferências inscrita e ex-inscrita de um triângulo.

O Problema 3, P5 IMO 1999, apresenta duas circunferências tangentes internamente a uma terceira. Solicita-se mostrar que determinada reta é tangente a uma das circunferências. Utilizando os conceitos de potência de um ponto e as propriedades dos círculos inscritos e ex-inscritos resolve-se o desafio.

O Problema 4, P16 SL IMO 2005, explora as propriedades de um paralelogramo  $ABCD$  e das bissetrizes usadas na construção de dois ex-incírculos. Um ponto  $X$  variável pertence ao segmento  $BC$ . Pedese provar que a medida de determinado ângulo não depende da posição de  $X$ .

O Problema 5, P18 SL IMO 2006, pede para construir o centro do ex-incírculo tangente ao lado  $BC$  num triângulo  $ABC$ . Após algumas outras construções, deseja-se determinar dois ângulos. Resolve-se o desafio mediante o esboço de três circunferências com um ponto em comum, o centro radical das mesmas.

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática [2], [3] e [4]. Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre incírculos e ex-incírculos.

## 2 Conceitos básicos

**Proposição 2.1.** *A Figura 1 mostra um triângulo  $ABC$ . Sejam  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $CA = b$ . Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de interseção da circunferência inscrita  $k$  com*

os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. E seja o semiperímetro  $p = \frac{a + b + c}{2}$ . Então vale que  $AD = AF = p - a$ ,  $BD = BE = p - b$  e  $CF = CE = p - c$ .

*Demonstração.* Como os lados do  $\triangle ABC$  são tangentes à circunferência  $k$  vale que  $AF = AD = x$ ,  $BD = BE = y$  e  $CF = CE = z$ . Isto permite escrever o sistema de equações:

$$x + y = c,$$

$$y + z = a,$$

$$z + x = b,$$

$$p = x + y + z.$$

Colocando em evidência  $x$ ,  $y$  e  $z$  encontram-se as soluções citadas. □

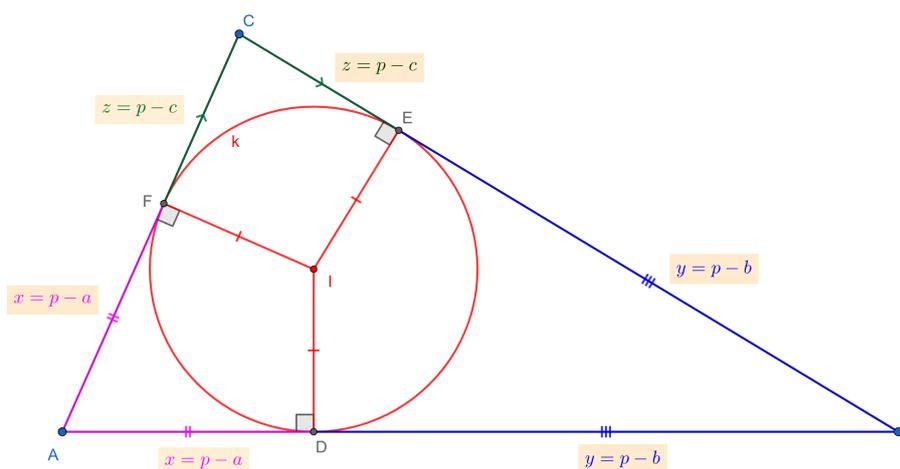


Figura 1: Guia para a demonstração da Proposição 2.1. Versão interativa aqui.

**Proposição 2.2.** A Figura 2 mostra um triângulo  $ABC$ . Sejam  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $CA = b$ . Sejam  $J$ ,  $L$  e  $E$  os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita  $k'$  com os prolongamentos dos lados  $AB$  e  $BC$  e com o lado  $CA$ , respectivamente. E seja o semiperímetro  $p = \frac{a + b + c}{2}$ . Então vale que  $BL = BJ = p$ ,  $CL = CE = p - a$  e  $AJ = AE = p - c$ .

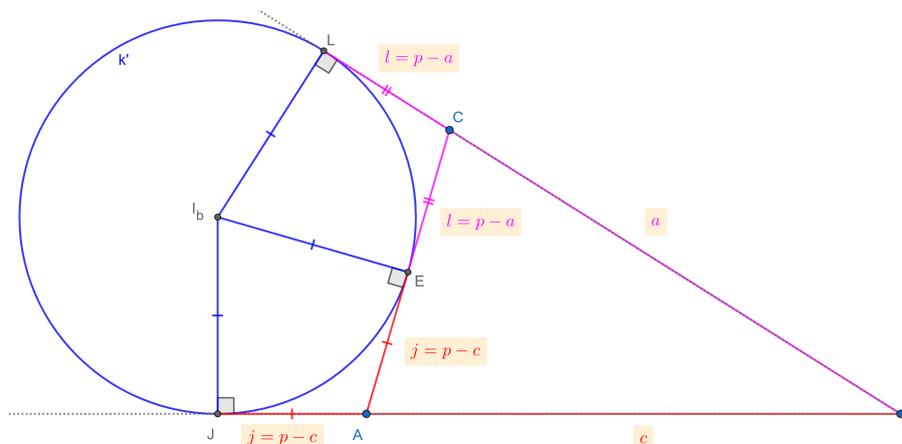


Figura 2: Guia para a demonstração da Proposição 2.2. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Como os lados do  $\triangle ABC$  são tangentes à circunferência  $k$  vale que  $BL = BJ$ ,  $CL = CE = l$  e  $AJ = AE = j$ . Consideramos a soma:

$$BL + BJ = a + l + j + c = a + b + c = 2p.$$

Do resultado anterior segue que  $BL = BJ = p$ . Como  $AB = c$  e  $BC = a$  temos  $AJ = AE = j = p - c$  e  $CL = CE = l = p - a$ . □

**Corolário 2.1.** A Figura 3 mostra um triângulo  $ABC$ . Sejam  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $CA = b$ . Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos de interseção da circunferência inscrita  $k$  com os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , respectivamente. Sejam  $J$ ,  $L$  e  $N_b$  os pontos de interseção da circunferência ex-inscrita  $k'$  com os prolongamentos dos lados  $AB$  e  $BC$  e com o lado  $CA$ , respectivamente. E seja o semiperímetro  $p = \frac{a + b + c}{2}$ . Então vale que o ponto  $M$ , médio de  $A$  e  $C$ , também é ponto médio de  $F$  e  $N_b$ . Adicionalmente,

$$FM = MN_b = \frac{|a - c|}{2}.$$

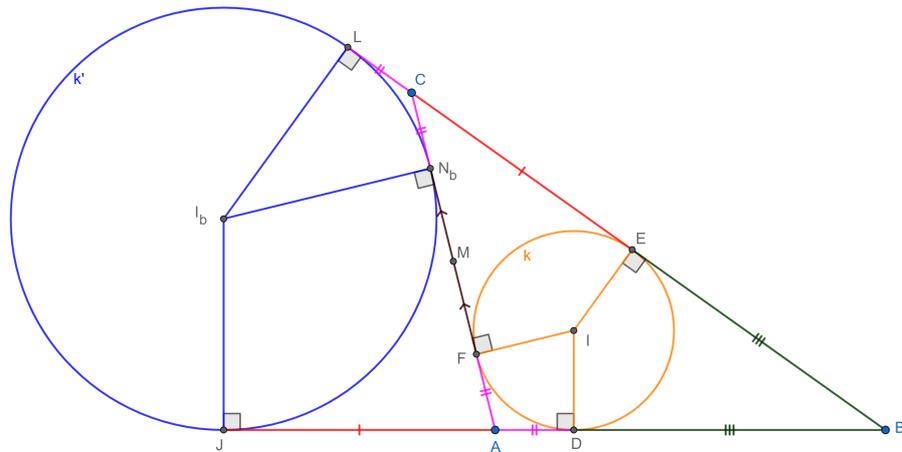


Figura 3: Guia para a demonstração do Corolário 2.1. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Isto é consequência de  $AF = CN_b = p - a$ , resultados provados nas Proposições 2.1 e 2.2. □

**Proposição 2.3.** *A Figura 4 mostra um triângulo  $ABC$ . Seja  $I$  seu incentro e  $I_a$  o centro da ex-circunferência correspondente ao lado  $BC$ . Seja  $E$  o ponto de interseção de  $AI$  com a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Então*

$$EB = EC = EI = EI_a.$$

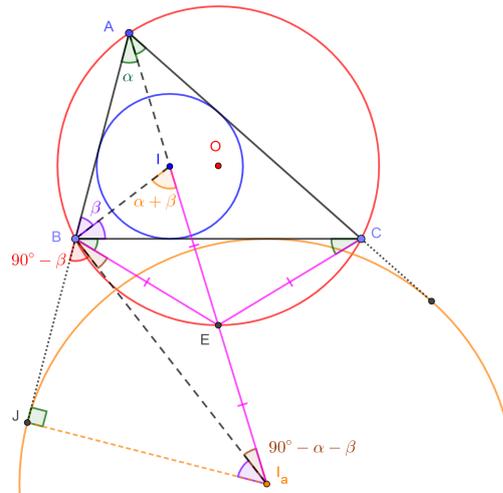


Figura 4: Guia para a demonstração da Proposição 2.3. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Pela bissetriz em  $A$  e o quadrilátero cíclico  $ACEB$  temos  $\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha$ . Portanto, o  $\triangle EBC$  é isósceles de base  $BC$  e  $EB = EC$ .

Além disso, da bissetriz em  $B$ , sejam  $\angle IBA = \angle IBC = \beta$ . Pela propriedade do ângulo externo,  $\angle BIE = \alpha + \beta$ . Segue que,  $\angle BIE = \angle IBE$ , o  $\triangle EBI$  é isósceles de base  $BI$  e  $EB = EI$ .

Pela bissetriz externa em  $B$ , sejam  $\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma$ . Como o  $\angle JBA = 180^\circ$  temos que  $\gamma = 90^\circ - \beta$ . Do  $\triangle BJI_a$  retângulo em  $J$  temos  $\angle JI_aB = \beta$ . Pela soma dos ângulos internos no  $\triangle AJI_a$  e o ângulo raso em  $B$  encontramos  $\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta$ . Isto é, o  $\triangle EBI_a$  é isósceles, de base  $BI_a$ , e  $EB = EI_a$ . Concluimos que  $EB = EC = EI = EI_a$ .  $\square$

**Proposição 2.4** (Fórmula de Euler). *A Figura 5 mostra um triângulo  $ABC$ . Seja  $I$  seu incentro,  $k$  sua circunferência inscrita de raio  $r$ . Adicionalmente, seja  $m$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ , de centro  $O$  e raio  $R$ . Então*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

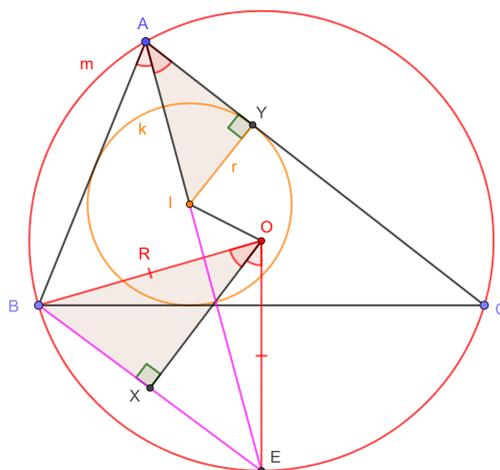


Figura 5: Guia para a demonstração da Proposição 2.4. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Seja  $E$  o ponto de interseção da bissetriz  $AI$  com  $m$ . Pela potência do ponto  $I$  em relação a  $m$  temos

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \tag{1}$$

Sejam  $X$  e  $Y$  os pés das perpendiculares de  $O$  e  $I$  até  $BE$  e  $AC$ , respectivamente. Como o  $\triangle OBE$  é isósceles de base  $BE$ , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda  $BE$ , segue que  $\angle AIY = \angle OBX$ .

Logo, pelo caso de semelhança AA, temos  $\triangle AIY \sim \triangle OBX$ . Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI} \text{ ou } AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{2Rr}{EB}.$$

Vimos na Proposição 2.3 que  $EB = EI$ , segue que

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1) encontramos  $R^2 - OI^2 = 2Rr$ . Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

□

### 3 Ex-incírculos, incentro, relação de Stewart. P1 IMO 1970.

**Problema 1.** *Dado um ponto  $M$  no lado  $AB$  do triângulo  $ABC$ , sejam  $r_1$  e  $r_2$  raios das círculos inscritos nos triângulos  $ACM$  e  $BCM$ , respectivamente e sejam  $\rho_1$  e  $\rho_2$  os raios dos ex-incírculos dos triângulos  $ACM$  e  $BCM$  nos lados  $AM$  e  $BM$ , respectivamente. Sejam  $r$  e  $\rho$  os raios do círculo inscrito e do ex-incírculo no lado  $AB$  do  $\triangle ABC$ , respectivamente. Provar que*

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

A IMO 1970 foi realizada na cidade de Keszthely, Hungria. Problema 8 da lista curta, proposto pela delegação da Polônia e escolhido como primeiro da competição [1].

#### 3.1 Considerações iniciais para o Problema 1.

**Teorema 3.1** (Relação de Stewart). *Seja  $D$  um ponto no lado  $BC$  do  $\triangle ABC$ . Sejam  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $BD = x$ ,  $CD = y$  e  $AD = z$ . Vale que:*

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

*Ou equivalentemente:*

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \tag{3}$$

Esta relação nos permite encontrar o comprimento de uma ceviana  $AD$  sem precisarmos conhecer ângulos por ela determinados ou usar trigonometria. A Figura 6 permite acompanhar a prova.

*Demonstração.* Sejam  $\angle ADC = \alpha$  e  $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$ . Pela Lei dos Cossenos aplicada no  $\triangle ABD$  temos:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha).$$

Mas  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ . Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha),$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \tag{4}$$

Pela Lei dos Cossenos aplicada no  $\triangle ACD$  temos:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha),$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \tag{5}$$

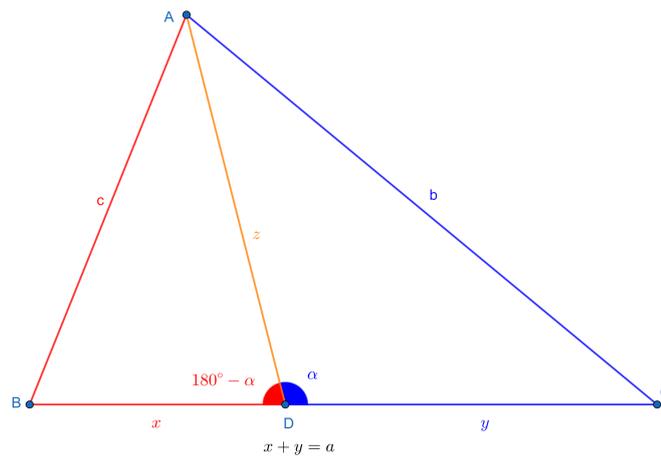


Figura 6: Guia para a demonstração do Teorema 3.1. Versão interativa aqui.

Somando (4) e (5) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy},$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy},$$

$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy.$$

□

**Observação 3.1.** Ainda na Figura 6, no caso em que  $D$  é o ponto médio de  $BC$  vale  $x = y = \frac{a}{2}$  e  $z = m_a$  (mediana relativa ao vértice  $A$ ). Utilizando (3) encontra-se:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

### 3.2 Resolução do Problema 1.

A Figura 7 mostra uma construção geométrica.

Sejam  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AM = x$ ,  $MB = y$  e  $CM = l$ . Denotamos com  $I_1$  o incentro e com  $S_1$  o ex-incentro do ex-incírculo do  $\triangle AMC$ . Sejam  $P_1$  e  $Q_1$  os pés das perpendiculares de  $I_1$  e  $S_1$ , respectivamente, à reta  $AC$ . Então  $\triangle I_1CP_1 \sim \triangle S_1CQ_1$  e  $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{CP_1}{CQ_1}$ . Seja  $p_1$  o semiperímetro do  $\triangle ACM$ . Sabemos das Proposições 2.1 e 2.2 que  $CP_1 = p_1 - x = \frac{b+l-x}{2}$  e  $CQ_1 = p_1 = \frac{b+l+x}{2}$ . Logo,

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{b+l-x}{b+l+x}. \tag{6}$$

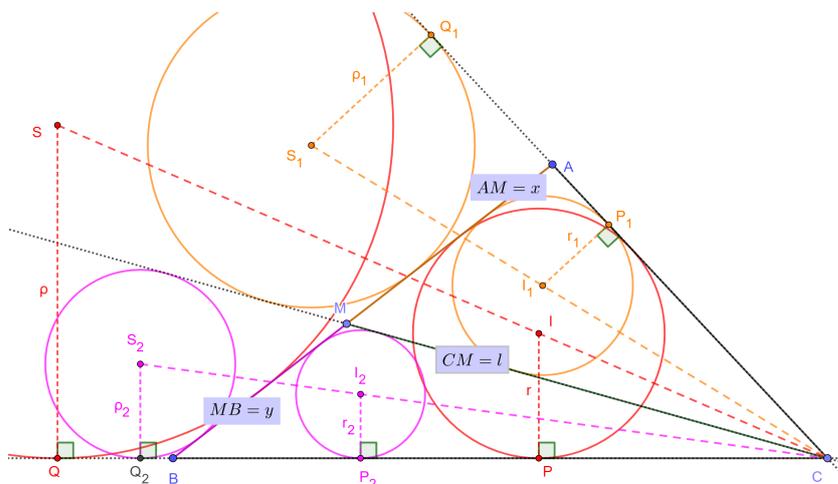


Figura 7: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui.

Analogamente, denotamos com  $I_2$  o incentro e com  $S_2$  o centro do ex-incírculo do  $\triangle BMC$ . Sejam  $P_2$  e  $Q_2$  os pés das perpendiculares de  $I_2$  e  $S_2$ , respectivamente, à reta  $BC$ . Então  $\triangle I_2CP_2 \sim \triangle S_2CQ_2$  e  $\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{CP_2}{CQ_2}$ . Seja  $p_2$  o semiperímetro do  $\triangle BCM$ . Sabemos das Proposições 2.1 e 2.2 que  $CP_2 = p_2 - y = \frac{a + l - y}{2}$  e  $CQ_2 = p_2 = \frac{a + l + y}{2}$ . Logo,

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a + l - y}{a + l + y}. \tag{7}$$

Do mesmo modo, denotamos com  $I$  o incentro e com  $S$  o centro do ex-incírculo do  $\triangle ABC$ . Sejam  $P$  e  $Q$  os pés das perpendiculares de  $I$  e  $S$ , respectivamente, à reta  $BC$ . Então  $\triangle ICP \sim \triangle SCQ$  e  $\frac{r}{\rho} = \frac{CP}{CQ}$ . Seja  $p$  o semiperímetro do  $\triangle ABC$ . Sabemos das Proposições 2.1 e 2.2 que  $CP = p - c = \frac{a + b - c}{2}$  e  $CQ = p = \frac{a + b + c}{2}$ . Logo,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{a + b - c}{a + b + c}. \tag{8}$$

Do enunciado do Problema 1 e as equações (6), (7) e (8) resta provar que:

$$\left(\frac{b+l-x}{b+l+x}\right) \cdot \left(\frac{a+l-y}{a+l+y}\right) = \frac{a+b-c}{a+b+c}.$$

Após multiplicar pelos denominadores na equação anterior, lembrando que  $c = x + y$  e várias simplificações, encontramos a Relação de Stewart 3.1 para a ceviana  $CM = l$  do  $\triangle ABC$  :

$$\frac{b^2}{x} + \frac{a^2}{y} = c + l^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

#### 4 Ex-incírculo, incírculo, semelhança de triângulos. P4 IMO 1992.

**Problema 2.** *No plano, sejam dadas uma circunferência  $k$ , uma reta  $l$  tangente a  $k$ , e um ponto  $M$  sobre  $l$ . Encontrar o lugar geométrico dos pontos  $P$  que têm a seguinte propriedade: Existem dois pontos  $Q$  e  $R$  sobre  $l$  tais que  $M$  é o ponto médio de  $QR$  e  $k$  é o incírculo de  $PQR$ .*

A IMO 1992 foi realizada na cidade de Moscou, Rússia. Problema 20 da lista curta, proposto pela delegação da França e escolhido como o P4 da competição [1].

##### 4.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 8 mostra uma construção geométrica inicial.

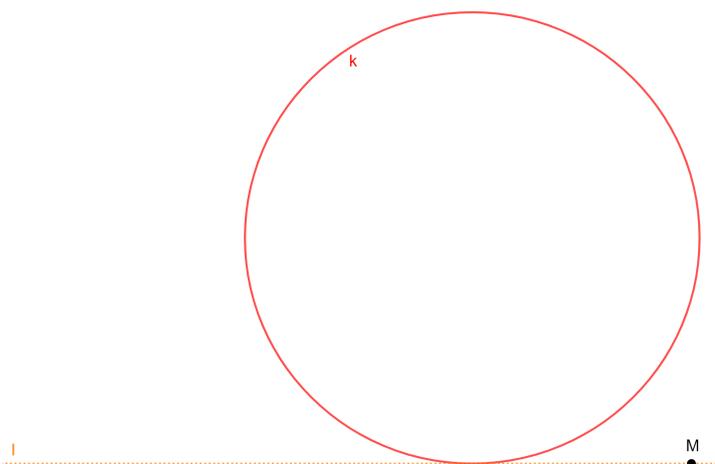


Figura 8: Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa aqui.

Denotamos por  $U$  o ponto de tangência da circunferência  $k$ , de centro  $S$ , e a reta  $l$ . Sejam  $X$  e  $U'$  os pontos simétricos de  $U$  com relação a  $S$  e  $M$ , respectivamente.  $X$  e  $U'$  não dependem da escolha de  $P$ . Provaremos que o lugar geométrico dos pontos  $P$  é a parte da semi-reta orientada  $U'X$  além do ponto  $X$ .

Colocamos um ponto variável  $Q \in l$ . A posição do ponto  $R \in l$  fica determinada pela equação  $QM = MR$ . Construímos as retas tangentes a  $k$ , diferentes de  $l$ , partindo de  $Q$  e  $R$ . Marcamos  $P$  na interseção destas tangentes. Adicionalmente, seja  $k'$  o ex-incírculo do  $\triangle PQR$ ,  $S'$  o centro de  $k'$ , e  $W$  e  $W'$  os pontos de tangência de  $k$  e  $k'$  com a reta  $PQ$ , respectivamente. A reta  $PS'$  é a bissetriz do  $\angle QPR$ . Note que, pelo Corolário 2.1, o ponto  $U'$  é o ponto de tangência de  $k'$  com a reta  $QR$ .

Como  $WS \parallel W'S'$  e  $\angle WPS = \angle W'PS'$  temos que  $\triangle WSP \sim \triangle W'S'P$ . Logo,

$$\frac{WS}{W'S'} = \frac{SP}{S'P} = \frac{WP}{W'P}.$$

Mas  $WS = SX$  e  $W'S' = S'U'$ . Segue que

$$\frac{SX}{S'U'} = \frac{SP}{S'P}.$$

Adicionalmente, de  $SX \parallel S'U'$ , então  $\angle PSX = \angle PS'U'$ . Pelo critério de semelhança LAL temos que  $\triangle PSX \sim \triangle PS'U'$  e o ponto  $X$  é colinear com  $P$  e  $U'$ . Isto é,  $P$  é o centro de homotetia externo das circunferências  $k$  e  $k'$ , e o ponto  $X$  é levado em  $U'$  por esta homotetia.

Dada a configuração inicial do problema basta construir os pontos  $X$  e  $U'$  para localizar o ponto  $P$  na semirreta  $U'X$ , além de  $X$ . A Figura 9 mostra uma construção geométrica. No link interativo indicado é possível deslocar o ponto  $Q$  para observar o rastro deixado pelo ponto  $P$ .

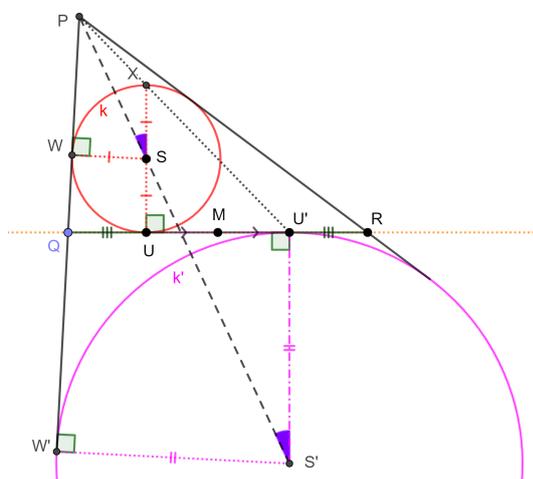


Figura 9: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui.

Reciprocamente, dado um ponto  $P$  na semirreta  $U'X$ , além de  $X$ , é possível construir as tangentes a  $k$  partindo de  $P$  e marcar suas interseções com  $l$ . Isto é, encontrar os pontos  $Q$  e  $R$ . A homotetia que leva o incírculo de  $PQR$  em seu ex-incírculo leva o ponto  $X$  em  $U'$ , pois eles são colineares por hipótese e este é o ponto de tangência do ex-incírculo com a reta  $QR$ . A simetria de  $Q$  e  $R$  em relação à  $M$  segue do Corolário 2.1 novamente.

**5 Incírculo, ex-incírculo, potência de um ponto relativo a uma circunferência. P5 IMO 1999.**

**Problema 3.** *Sejam duas circunferências  $k_1$  e  $k_2$  que intersectam-se nos pontos  $X$  e  $Y$  e são tangentes internamente a circunferência  $k$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Adicionalmente, o centro de  $k_2$  está sobre  $k_1$ . Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção da reta  $XY$  com  $k$ . As retas  $MA$  e  $MB$  intersectam  $k_1$  em  $C$  e  $D$ , respectivamente. Provar que  $k_2$  é tangente a  $CD$ .*

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 12 da lista curta, e escolhido como P5 da competição, proposto pela delegação da Rússia [1].

**5.1 Resolução do Problema 3.**

A Figura 10 mostra uma construção geométrica inicial. Esboçamos primeiro a circunferência  $k$ , de centro  $O$ , e colocamos o ponto  $M \in k$ . Segundo, o centro  $O_1$ , da circunferência  $k_1$ , deve ser posicionado sobre o segmento  $OM$ , para garantir a tangência interna, em  $M$ , de  $k$  e  $k_1$ . Terceiro, colocamos o centro  $O_2 \in k_1$ , e encontramos  $N = OO_2 \cap k$ , assegurando a tangência interna de  $k$  e  $k_2$ .

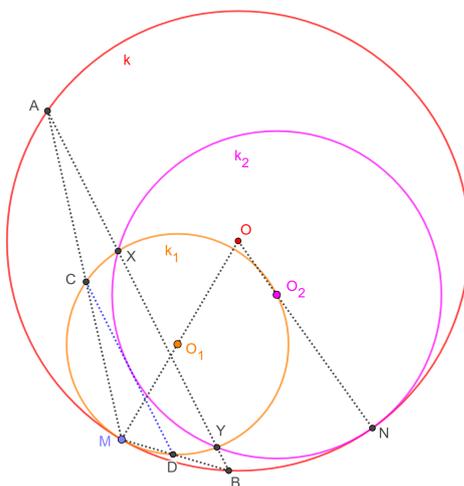


Figura 10: Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui.

**Lema 5.1.** *Sejam duas circunferências  $k_1$  e  $k_2$  que intersectam-se nos pontos  $X$  e  $Y$  e são tangentes internamente a circunferência  $k$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Seja  $A$  um dos pontos de interseção da reta  $XY$  com  $k$ . As retas  $AM$  e  $AN$  intersectam  $k_1$  e  $k_2$  em  $C$  e  $E$ , respectivamente. Então  $CE$  é uma tangente comum de  $k_1$  e  $k_2$ .*

Para a construção da Figura 11 primeiro esboçamos a circunferência  $k$ , de centro  $O$ . Segundo, colocamos os pontos  $M \in k$  e  $N \in k$  e traçamos os segmentos  $OM$  e  $ON$ . Os centros das circunferências  $k_1$  e  $k_2$  são  $O_1 \in OM$  e  $O_2 \in ON$ . Para o Lema 5.1  $N$  é um ponto semi-livre. Isto é, pode variar sobre a circunferência  $k$ . No problema principal  $N \in k$ , mas sua posição é fixa pela construção.

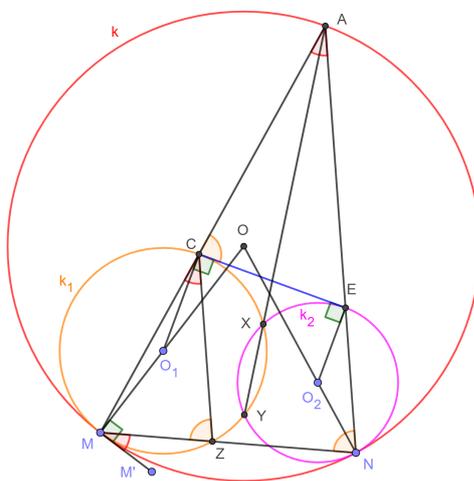


Figura 11: Guia para a demonstração do Lema 5.1. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* O ponto  $A$  está no eixo radical das circunferências  $k_1$  e  $k_2$ . Logo,  $AC \cdot AM = AX \cdot AY = AE \cdot AN$ . A equação anterior significa que o quadrilátero  $MNEC$  é inscritível.

Seja  $Z$  a segunda interseção de  $MN$  com  $k_1$ . E seja  $M'$  um ponto na tangente comum a  $k$  e  $k_1$  em  $M$ . Então, pela igualdade entre ângulo inscrito e de segmento, temos  $\angle MCZ = \angle M'MZ = \angle M'MN = \angle MAN$  (como ângulos orientados). Isto significa que  $CZ \parallel AN$ .

Por correspondentes entre paralelas  $\angle ANM = \angle CZM$ . Como  $MNEC$  é

cíclico também temos que  $\angle ACE = \angle ANM$ . Como  $\angle MO_1C = 2\angle CZM$ , e o  $\triangle CO_1M$  é isósceles, a igualdade  $\angle CZM = \angle ACE$  significa que  $CE$  é tangente a  $k_1$ . Analogamente prova-se que  $k_2$  é tangente a  $CD$ .  $\square$

Retomando o problema principal, a Figura 12 mostra uma construção geométrica. Sejam  $E$  e  $F$ , respectivamente, as interseções de  $NA$  e  $NB$  com  $k_2$ . Aplicando o Lema 5.1,  $CE$  e  $DF$  são as tangentes externas comuns a  $k_1$  e  $k_2$ .

Quando  $k_1$  e  $k_2$  têm o mesmo raio a reta  $CD$  passa pelo ponto  $O_1$ , ponto de tangência com  $k_2$ , o quadrilátero  $DFEC$  é um retângulo e o resultado procurado fica provado. Para os outros casos, seja  $G = CE \cap DF$ .

Os centros  $O_1$  e  $O_2$  estão sobre a bissetriz do  $\angle CGD$ , devido a  $k_1$  e  $k_2$  serem tangentes a  $GC$  e  $GD$ . Como  $O_1D = O_1C$  e  $\angle O_1DG = \angle O_1CG = 90^\circ$ , segue que  $O_1$  é o ponto médio do menor arco  $CD$  da circunferência circunscrita do  $\triangle CDG$ .

Pela Proposição 2.3 encontramos que  $O_2$  é o ex-incentro do  $\triangle CDG$  oposto a  $G$  ou o incentro. Isto é,  $k_2$  é um ex-incírculo ou o incírculo do  $\triangle CDG$ . Nos dois casos concluímos que  $CD$  é tangente a  $k_2$ .

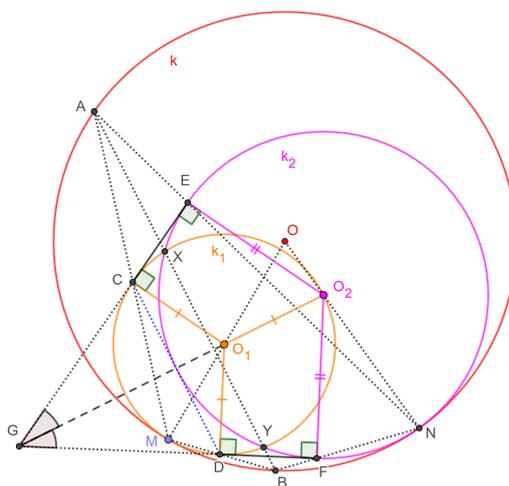


Figura 12: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.

**6 Bissetrizes, paralelogramo, semelhanças de triângulos. P16 SL IMO 2005.**

**Problema 4.** *Seja  $ABCD$  um paralelogramo e  $X$  um ponto do segmento  $BC$ , com  $X \neq B$ . A semi-reta orientada  $\overrightarrow{AX}$  intersecta a semi-reta orientada  $\overrightarrow{DC}$  no ponto  $Y$ . Sejam  $K$  e  $L$  os centros dos ex-incírculos dos triângulos  $ABX$  e  $ADY$ , que tocam os lados  $BX$  e  $DY$ , respectivamente. Provar que a medida do ângulo  $KCL$  não depende da posição do ponto  $X$ .*

A IMO 2005 foi realizada na cidade de Mérida, México. Problema 16 da lista curta, proposto pela delegação da Ucrânia [1]. Adaptado pelos autores deste artigo.

**6.1 Resolução do Problema 4.**

A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial.

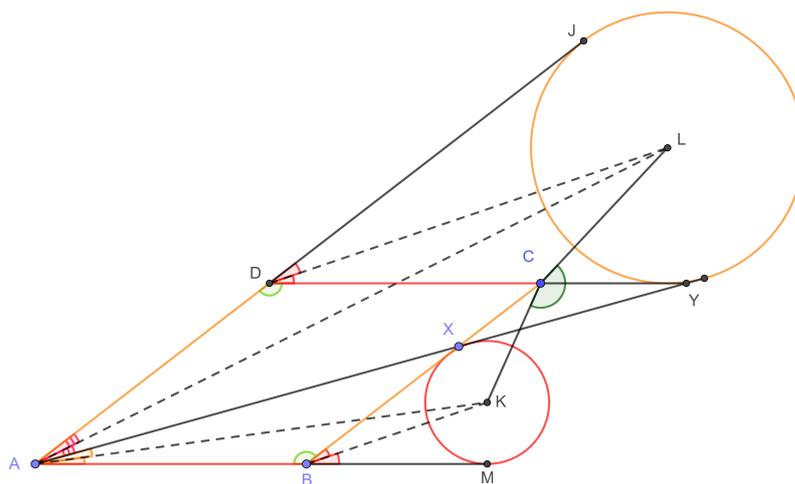


Figura 13: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui.

Primeiro notamos que por  $ABCD$  ser um paralelogramo temos  $AB = CD$ ,  $BC = DA$ ,  $\angle ABC = \angle CDA$  e  $\angle DAB = \angle BCD = \angle CBM = \angle YDJ$ . Adicionalmente, como  $DL$ ,  $BK$ ,  $AL$  e  $AK$  são bissetrizes vale que  $\angle YDL = \angle LDJ = \angle XBK = \angle KBM$ ,  $\angle YAL = \angle LAJ$  e  $\angle BAK = \angle KAX$ .

Como  $\angle ABC = \angle CDA$  e  $\angle XBK = \angle CDL$  segue que  $\angle ABK = \angle LDA$ .

Adicionalmente, pela análise dos ângulos dos triângulos  $ADY$  e  $ADL$  encontra-se que  $\angle ALD = \frac{1}{2}\angle AYD$ . Por alternos entre paralelas  $\angle AYD = \angle BAY$  e devido a bissetriz  $AK$  tem-se  $\angle ALD = \angle KAB$ . Logo, por AA,

$$\triangle ABK \sim \triangle LDA$$

e

$$\frac{AB}{LD} = \frac{BK}{DA} = \frac{AK}{LA}.$$

De  $CB = DA$  e  $DC = AB$  e da primeira parte da igualdade de frações anterior segue

$$\frac{DC}{LD} = \frac{BK}{CB}.$$

Adicionalmente,  $\angle LDC = \angle CBK$ . Pelo caso de semelhança LAL,

$$\triangle LDC \sim \triangle CBK.$$

Logo,  $\angle DCL = \angle BKC$  e  $\angle CLD = \angle KCB$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \angle KCL &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle DCL + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (\angle BKC + \angle KCB) = \\ &= 360^\circ - \angle BCD - (180^\circ - \angle CBK) = \\ &= 180^\circ - \angle BCD + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK, \end{aligned}$$

que é constante. Isto é, o  $\angle KCL$  somente depende da construção do paralelogramo  $ABCD$  e não da posição do ponto  $X$ . A Figura 14 mostra uma construção geométrica.



$\omega_1$  [4] podemos escrever

$$JC_1^2 = JD \cdot JE.$$

Adicionalmente, de  $JA_1 = JB_1 = JC_1$ , raios do ex-incírculo  $k'$ , também vale que

$$JA_1^2 = JD \cdot JE,$$

$$JB_1^2 = JD \cdot JE.$$

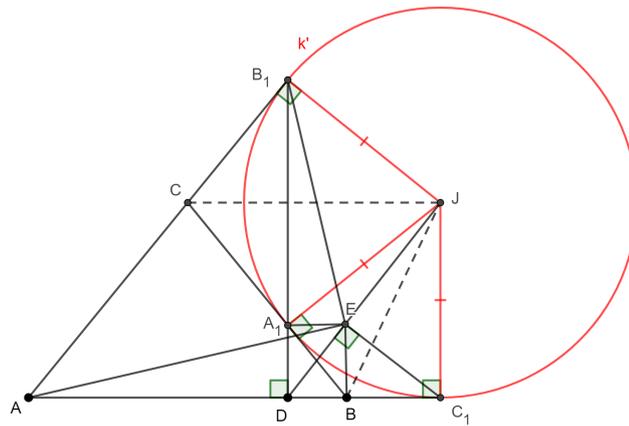


Figura 15: Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui.

Mas pela inversa do teorema das cordas [4] as igualdades anteriores significam que  $E \in \omega_2$  e  $E \in \omega_3$  e  $\angle BEA_1 = \angle AEB_1 = 90^\circ$ . O ponto  $E$  é centro radical de  $\omega_1, \omega_2$  e  $\omega_3$ . A Figura 16 mostra uma construção geométrica.

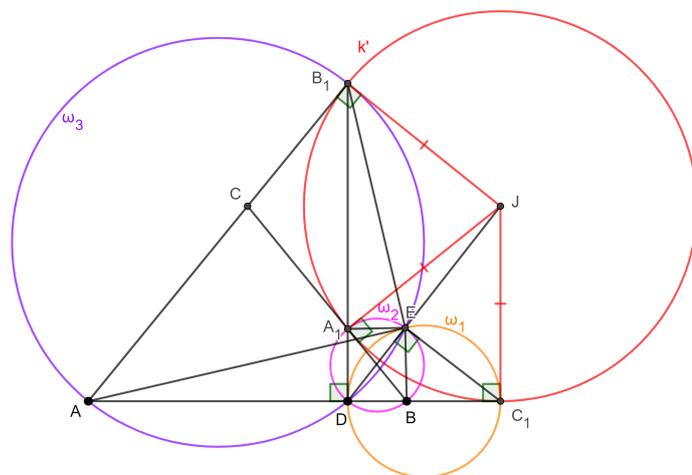


Figura 16: Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui.

## 8 Comentários finais

Discutiram-se em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Esperamos que os mesmos sirvam de apoio para estudantes e professores do Ensino Médio e Universitário. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o Geogebra. O computador é uma ferramenta poderosa pois permite explorar diversas configurações de uma construção geométrica. Apresentaram-se os conceitos básicos relativo ao incentro e ao ex-incentro e as métricas do triângulo associadas com as bissetrizes internas e externas. Uma combinação de outros conteúdos também foi estudada: relação de Stewart, distância entre incentro e ortocentro, potência de um ponto relativo a uma circunferência e eixo radical.

## Referências

- [1] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, and Nikola Petrovic. *The IMO Compendium*. Springer-Verlag GmbH, May 2011. (Seção 3, 4, 5, 6, 7)
- [2] Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso, and Grazielle Feliciani Barbosa. Três problemas sobre série harmônica na olimpíada internacional de matemática.

tica. *C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 17:127–138, feb 2020. (Seção 1)

[3] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto*, 2(2-2021):46–69, July 2021. (Seção 1)

[4] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em olimpíadas internacionais de matemática. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 20:22–40, jul 2021. (Seção 1, 7.1, 7.1)