Rigor no ensino de funções quadráticas: uma proposta para a sala de aula

Thamyres Ribeiro Medeiros thamyres.medeiros@educacao.mg.gov.br
Rede Estadual de Ensino - SEE Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Brasil

José Barbosa Gomes barbosa.gomes@ufjf.edu.br
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Departamento de Matemática, Juiz de Fora, MG, Brasil

Resumo

Este artigo visa apresentar uma proposta de ensino rigoroso do que é uma parábola, utilizando-se de materiais práticos de baixo custo na sua abordagem. Também são apresentados alguns dados estatísticos feitos com os alunos de diferentes escolas sobre o uso do método apresentado no texto.

Palavras-chave

Função quadrática, Parábola, Gráfico.

1 Introdução

Muitas vezes, os gráficos de funções quadráticas são apresentados nos livros didáticos do Ensino Médio apenas com ideias intuitivas sem nenhum ou pouco rigor matemático e, geralmente, não é apresentada nenhuma relação das propriedades da parábola e o motivo de termos o gráfico daquela forma.

Fizemos uma análise minuciosa de todos os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2018 [1]. Por meio dessa análise, percebemos que nenhum desses livros traz um tratamento rigoroso do esboço do gráfico de funções quadráticas, no sentido de mostrar clara e rigorosamente que esse gráfico é uma parábola.

Compreendendo que o uso de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral seria exagerado para dar esse rigor no Ensino Médio, os autores procuraram uma maneira de apresentar essa justificativa sem o uso dessas ferramentas mais sofisticadas. Assim, foi desenvolvido um material concreto confeccionado com um quadro branco, um esquadro, um barbante e alguns pinos para fixação. A descrição da confecção desse material é apresentada na Subseção 2.2. Esse material auxilia a explicação do professor, orienta o aluno e ilustra a ele, geometricamente, o que se deseja demonstrar. A descrição de como foram as aulas de experiência da proposta é apresentada na Subseção 2.1.

A prova de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola pode ser encontrada, por exemplo, em [2] e [4].

Nota-se que, quando são utilizados materiais práticos com os alunos nas aulas, o interesse e o envolvimento deles na aula, na maioria das vezes, ajuda fortemente a desenvolver o significado dos conceitos, e os resultados ficam mais evidentes. Notou-se essa satisfação nos questionários respondidos pelos alunos ao término das aulas oferecidas com a proposta de uso desse material concreto, conforme a Subseção 3.1.

As aulas da proposta foram desenvolvidas em 3 turmas de Ensino Médio, sendo elas: duas turmas de escola pública e uma turma de escola privada. Os comentários sobre a recepção dos alunos à proposta são apresentados na Subseção 3.1. Antes da apresentação da aula da proposta, não era do conhecimento desses discentes nenhuma demonstração ou justificativa que o gráfico da função quadrática é uma parábola.

A proposta foi apresentada a seis outros docentes que, na época da apresentação, trabalhavam ou já haviam trabalhado como docentes de Matemática no Ensino Médio. Os comentários sobre a recepção dessa proposta por esses docentes são apresentados na Subseção 3.2.

Pensando no início do Novo Ensino Médio, esperamos que a estratégia desenvolvida aqui possa contribuir para a melhoria do ensino de gráficos de funções quadráticas.

2 Materiais e Métodos

Foram dadas duas aulas consecutivas de 50 minutos cada sobre o assunto função quadrática e seu gráfico, para cada uma das três turmas de Ensino Médio, sendo uma de escola pública e duas de escola privada, perfazendo um total de 60 discentes. Após cada uma dessas aulas, procurou-se verificar a recepção desse tipo de aula e o nível de profundidade do entendimento do assunto que foi proporcionado.

Foi explicada, ainda, a cada um de seis outros docentes de Matemática do Ensino Básico a proposta e, então, foi perguntado a eles sobre a receptividade desse método e a prática deles na sala de aula a respeito do esboço do gráfico de função quadrática.

2.1 Proposta de aula

Oferecemos, com esta proposta de aula, um roteiro para se verificar que o gráfico de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola, usando-se de material concreto.

Primeiramente, é feita uma revisão do assunto “distância entre dois pontos do plano”. No caso de uma turma que ainda não tenha visto o assunto, seria dado esse assunto primeiro, que é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras. Em seguida, é apresentado a eles que a distância entre ponto e reta é o comprimento do segmento que sai do ponto e vai até a reta perpendicularmente. No caso de reta horizontal, essa distância é facilmente vista pelos discentes.

A seguir, apresentamos a definição de uma parábola, no caso particular de reta diretriz horizontal: dados, no plano, um ponto F e uma reta horizontal r que não o contém, a parábola é o conjunto dos pontos desse plano que distam igualmente de F e de r.

Com o uso do quadro branco, de um esquadro, de um barbante e de um pincel, dados um ponto F e uma reta horizontal r, os alunos poderão observar o experimento do esboço da parábola. Ver as fotografias da Subseção 2.2.

Sabemos que o gráfico da função f dada por $f(x) = ax^2$, para todo x real, é o conjunto de pontos $P = (x, y = f(x))$ tais que a distância de P até $F = (0, \frac{1}{4a})$ é a mesma que a distância de P até a reta $r : y = -\frac{1}{4a}$, em que a é qualquer número real diferente de zero.

Inicialmente, mostramos que um ponto $P = (x, ax^2)$ qualquer do gráfico de f dista igualmente de F e de r, para concluir, então, que todo ponto do gráfico de f está na parábola determinada por F e a reta r. Temos:

$$d(P,F) = \sqrt{(0-x)^2 + (\frac{1}{4a} - ax^2)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16a^2} - \frac{2ax^2}{4a} + a^2x^4}$$

$$= \sqrt{a^2x^4 + \frac{2ax^2}{4a} + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} = ax^2 + \frac{1}{4a} = d(P,r).$$

Agora, provamos que dado um ponto $P = (x, y)$, na parábola, tal que $d(P,F) = d(P,r)$, este ponto P é da forma $P = (x, ax^2)$, ou seja, P pertence ao gráfico de f, para concluir, então, que todo ponto da parábola determinada por F e a reta r é um ponto do gráfico de f. Vale:

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,r) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{1}{4a})^2} = y + \frac{1}{4a} \\ &\Rightarrow \quad x^2 + (y - \frac{1}{4a})^2 = (y + \frac{1}{4a})^2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{2y}{4a} + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{2y}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\ &\Rightarrow \quad y = ax^2. \end{aligned}$$

Portanto, $P = (x, ax^2)$.

Para visualização do aluno, utilizamos o material prático. A título de exemplo, construímos o gráfico da função f dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{20}$, para todo x real, em que temos $F = (0, 5)$ e $r : y = -5$.

Para generalizarmos o resultado a todos os casos $f(x) = ax^2 + bx + c,\ x \in \mathbb{R}$, foi dito à classe que utilizamos a translação do gráfico, que se obtém observando que

$$\begin{array}{rrcl} & y & = & ax^2 + bx + c \\ \Leftrightarrow & y & = & a(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \\ \Leftrightarrow & y & = & a(x - x_V)^2 + y_V \end{array}$$

em que $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Ou seja, podemos fazer uma translação horizontal do gráfico de $y = ax^2$ para obtermos o gráfico de $y = a(x - x_V)^2$ e fazermos uma translação vertical deste último para obtermos o gráfico de $y = a(x - x_V)^2 + y_V$, de maneira que basta sabermos como é o gráfico de $y = ax^2$ para sabermos como é o gráfico no caso geral de $y = ax^2 + bx + c$.

2.2 Construção do material

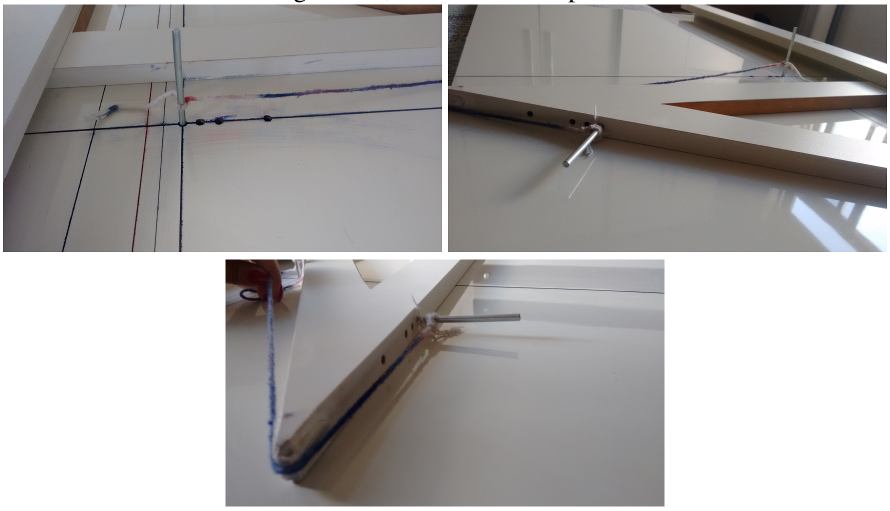
Pela visualização, desejamos que a aprendizagem ficasse mais significativa para o aluno, uma vez que percebe-se a real aplicação dos conceitos envolvidos de forma prática.

Pensando nisso, precisávamos de um instrumento para construir o esboço da parábola de forma a atender a representação dos conceitos envolvidos e que fosse de fácil utilização e manuseio pelos professores. A ideia de construir parábolas, utilizando-se de barbante e esquadro já é conhecida, mas tão pouco divulgada que temos dificuldades de encontrar livros didáticos de matemática voltados ao Ensino Médio, em particular, geometria analítica, que a mencionam. Porém, procuramos construir um material de forma a facilitar sua utilização em sala de aula com mais possibilidades de construções de parábolas, facilidade de manuseio e durabilidade.

Para confecção do material, foram necessários uma placa de MDF na cor branca, com um lado liso e brilhante (como um quadro branco) com 1 metro de comprimento por 50 centímetros de largura, um esquadro móvel de preferência da mesma altura da placa de MDF (50 centímetros), barbante, dois pinos de metal e pincel. Para que o esquadro deslizasse, foi necessário anexar um suporte na base inferior da placa de MDF, com abertura (“gaveta”) onde o esquadro se encaixasse exatamente.

Fizemos o experimento em um isopor para perceber quais seriam os melhores exemplos a serem utilizados com o material, e, em seguida, com ajuda de um marceneiro, confeccionamos o material em MDF.

Fotografias 1, 2 e 3 - Material prático.



(1) Foto superior à esquerda (2) Foto superior à direita (3) Foto inferior

Fonte: Arquivo Pessoal - foto do material prático.

De início, procuramos marcar no MDF o plano cartesiano de forma que o eixo OY ficasse centralizado e o eixo OX ficasse na razão de 4 para 1, ou seja, 40 centímetros em sua parte positiva e 10 centímetros em sua parte negativa.

Levando em conta a dimensão do material, foram marcadas as retas $y = -1, y = -2$ e $y = -5$, possíveis retas r, além da reta $y = 0$. Dessa forma, também foram marcados os seguintes respectivos pontos $(0, 1), (0, 2)$ e $(0, 5)$, possíveis pontos F, além do ponto $(0, 0)$, para fixação de um dos pinos de metal. Ver Figuras (1), (4) e (5).

No esquadro, em sua lateral inclinada, foram marcados também quatro pontos de fixação, possíveis localizações do segundo pino. Esses pontos tinham distâncias, respectivamente, de 5, 8, 9 e 10 centímetros, a contar da ponta superior do esquadro. Na ponta do esquadro, foi necessária uma placa de alumínio dobrada para que o barbante atingisse um ponto fixo e ficasse firme para o tracejado da parábola. Ver Figuras (2), (3), (4) e (5).

Nas extremidades do barbante, estão os dois pinos de metal amarrados: o primeiro pino em um ponto F, o segundo pino em um ponto de fixação do esquadro e o comprimento do barbante, entre esses pinos, de 50 centímetros.

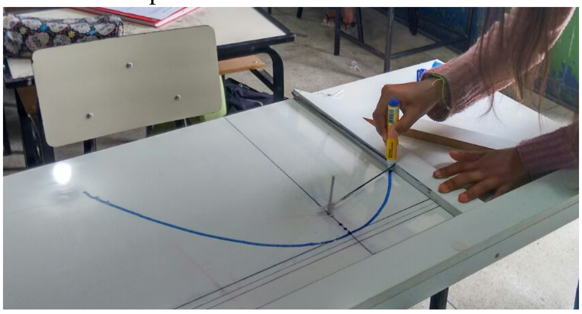
Se o primeiro pino estiver em $F = (0, 1)$, a distância considerada no esquadro para a localização do segundo pino será 9 cm, pois o comprimento do barbante é de 50 cm, a altura da parte do esquadro acima da reta $y = 0$ é 40 cm e a distância da reta $y = 0$

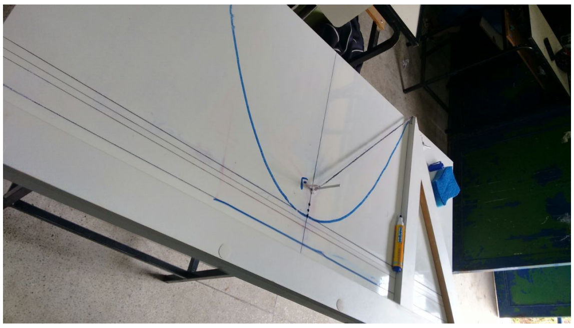
até a reta $y = -1$ é 1 cm. Neste caso, o exemplo a ser trabalhado é $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$. Se o primeiro pino estiver em $F = (0, 2)$, analogamente a distância considerada no esquadro para a localização do segundo pino será 8 cm. Neste caso, o exemplo a ser trabalhado é $f(x) = \dfrac{x^2}{8}$. Se o primeiro pino estiver em $F = (0, 5)$, a distância considerada no esquadro para a localização do segundo pino será 5 cm. Neste caso, o exemplo a ser trabalhado é $f(x) = \dfrac{x^2}{20}$, o da aula da proposta.

A posição do pincel, conforme ilustrado na Figura (4), precisa ser de apoio no barbante, sem ser preso, deixando uma parte do barbante esticada junto ao esquadro e outra parte do barbante esticada do pincel até o pino correspondente ao ponto F, de forma que, ao deslizarmos o esquadro, o pincel faça o traço da parábola no material.

É necessário o procedimento de deslizar o esquadro nos dois primeiros quadrantes, trocando a posição do esquadro para traçar as partes simétricas direita e esquerda da parábola.

Fotografias 4 e 5 - Material prático. Fotos da aula de desenvolvimento da proposta.





(4) Foto superior (5) Foto inferior

Fonte: Arquivo Pessoal - foto do material prático.

3 Resultados e Discussão

A aula foi lecionada para três turmas, sendo duas turmas de 1ª Série do Ensino Médio e uma turma de 2ª Série do Ensino Médio do ano de 2017. As duas turmas de 1ª Série do Ensino Médio eram de um colégio privado, e uma turma de 2ª Série do Ensino

Médio, de um colégio público.

É importante ressaltar que todas as três turmas já tinham visto, de acordo com o livro didático seguido, o estudo do gráfico da função quadrática. Mas, os alunos não tinham visto ainda a justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola.

O fato de quase sempre não se justificar aos discentes os conteúdos torna-se um incômodo. Este incômodo foi uma motivação para o desenvolvimento da proposta.

Vale atentar ao fato de que foi notado, pela participação dos discentes na aula, que eles puderam reforçar os conhecimentos já adquiridos sobre o gráfico da função quadrática com a aula da proposta.

3.1 Questionário aos discentes

Após a aula referente à proposta, os alunos responderam um questionário individual em que uma das perguntas era:
- *Em comparação ao estudo da parábola feito anteriormente e a explicação e experimento feito nessa aula, o que você tem a dizer sobre a justificativa do gráfico da função quadrática ser uma parábola?*

Foram realizadas aulas da proposta para as turmas A e B do Colégio A e Turma 1 do Colégio B, sendo duas aulas consecutivas de 50 minutos para cada turma. Na turma A do Colégio A tinham 19 alunos, na Turma B do Colégio A tinham 25 alunos e na Turma 1 do Colégio B tinham 16 alunos. O Colégio A é uma escola privada e o Colégio B é uma escola pública estadual. O total de discentes participantes das aulas da proposta foram 60 alunos, dos quais apenas 1, da turma A do Colégio A, não quis preencher o questionário.

Em relação à pergunta acima, do total 60 discentes, foram obtidos os seguintes percentuais de discentes que afirmaram que preferem a explicação e experimento feitos nessa aula para justificar o gráfico e/ou não estavam seguros anteriormente (a essa proposta) para essa justificativa e agora estão:
- Turma A do Colégio A: 84,2 % .
- Turma B do Colégio A: 96 % .
- Turma 1 do Colégio B: 87,5 % .

3.2 Questionário aos docentes

Algumas perguntas foram feitas aos professores participantes da pesquisa, observando a prática da proposta ou apenas os que tiveram conhecimento teórico da mesma, destacando-se:

a) *Comente sobre a proposta apresentada sobre o gráfico da função quadrática.*

b) *Considera válida a proposta para os alunos? Justifique.*

A proposta foi apresentada a seis docentes, sendo três da rede estadual e os outros três da rede privada. Todos os docentes que participaram da pesquisa já tinham trabalhado, ou estavam trabalhando, com a 1ª Série do Ensino Médio. Alguns deles trabalhavam com a EJA (Educação de Jovens e Adultos). Mediante as questões respondidas pelos colegas, temos as conclusões abaixo.

Na questão a), referente ao comentário sobre a proposta, os professores consideraram, do ponto de vista da Matemática, uma boa referência para explicar a construção do gráfico da função quadrática. Além disso, tivemos comentários positivos a respeito do conteúdo ser explicado e exemplificado de forma concreta, de modo a facilitar a aprendizagem do aluno.

Na questão b), que pergunta se a proposta é válida aos alunos, todos responderam que sim, julgam importante a visão concreta dos conceitos, valorizam a utilização de metodologias práticas em sala de aula e compreendem que os discentes ficam mais interessados com materiais práticos na aula.

4 Conclusão

Desenvolver uma proposta de um conteúdo tão relevante no ensino da matemática durante o Ensino Médio, como é o caso do gráfico de funções, sem dúvida, é um desafio, visto que os alunos não possuem conhecimentos prévios de introdução ao cálculo para acompanhar uma explicação rigorosa deste conceito.

Após as análises de vários livros didáticos do Ensino Médio, pesquisas e conversas informais com docentes de matemática, percebeu-se a necessidade de insistir no tema e surgiu um roteiro de aula com auxílio de material prático para enriquecer a explicação dos gráficos de funções. No decorrer dos estudos para elaboração da proposta, elevou-se a curiosidade de aprofundar a explicação do gráfico da função quadrática, a parábola.

Durante a preparação do plano de aula, todo cuidado com os conceitos e justificativas foi atentamente executado, de forma a auxiliar o professor em sua explicação e também o discente em seu entendimento.

No questionário respondido pelos professores, notou-se de forma unânime que o recurso visual, concreto, nas aulas, auxilia a aprendizagem e torna a explicação mais significativa. Com a realidade que temos nas escolas, alguns professores não utilizariam das demonstrações com rigor matemático em suas aulas, mas o material prático desenvolvido teve boa aceitação de uso por parte deles.

Durante as aulas da proposta, notou-se o interesse dos discentes na justificativa da construção do gráfico e foi despertado em alguns discentes o interesse em entender a matemática, usando mais demonstrações. Foi possível relacionar conceitos de geometria com a álgebra das funções de forma a representar a todo momento com o uso do material prático o que os cálculos algébricos representavam. Foi, ainda, uma experiência positiva, podendo ser confirmada nas respostas desses discentes em questionários.

Por fim, queremos destacar que consideramos que cada escola possui seu Projeto Político Pedagógico, cada turma sua necessidade, e cada docente, sua metodologia. Neste trabalho, procuramos sugerir uma nova abordagem da construção do gráfico da função quadrática, com utilização de um material prático que auxilia o entendimento, que envolve cálculo algébrico e representação geométrica. Com a flexibilidade apresentada pelo Novo Ensino Médio (conforme [3]), esperamos que essa proposta e a experiência descrita possam ser replicadas (e até melhoradas) nas salas de aula de muitas escolas, favorecendo o assunto "gráfico de função quadrática" quanto a um tratamento mais aprofundado.

5 Agradecimentos

Agradecemos à CAPES/PROFMAT pela bolsa de estudos recebida, a qual ajudou a proporcionar este trabalho.

Referências

[1] BRASIL. *Portaria nº 62, 01 de agosto de 2017*. Diário Oficial da União, Poder Executivo, Brasília, DF, 02 ago. 2017. Seção 1, p. 16-17.

[2] J. J. Delgado, K. R. Frensel e L. S. Crissaff. *Geometria Analítica,* 2^a *edição*. SBM, Rio de Janeiro, 2017.

[3] BNCC do Ensino Médio. Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf`. Acesso em: 28 out. 2021.

[4] E. L. Lima. *Números e Funções Reais*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.