Desigualdade de Ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares jlopez@usp.br
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, Pirassununga, São Paulo, Brasil

João Paulo Martins dos Santos jp2@alumni.usp.br
Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

Alessandro Firmiano de Jesus lezandro@gmail.com
Academia da Força Aérea–AFA, Pirassununga, São Paulo, Brasil

Alexys Bruno-Alfonso alexys.bruno-alfonso@unesp.br
Faculdade de Ciências de Bauru, UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São Paulo, Brasil

Resumo

O Teorema e a Desigualdade de Ptolomeu raramente são citados para os estudantes de Ensino Médio no Brasil. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em competições olímpicas. Neste artigo discutem-se detalhadamente cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). No primeiro, estuda-se um hexágono com dois conjuntos de três lados de comprimentos iguais. É pedido provar uma desigualdade onde se requer a utilização do Teorema de Ptolomeu, da simetria da figura e da construção geométrica do Arco Capaz. No segundo, apresenta-se outro hexágono com três conjuntos de dois lados de comprimentos iguais. Para demonstrar a desigualdade dada utilizam-se as desigualdades de Ptolomeu e das médias aritmética e harmônica. O terceiro mostra que um par de pontos conjugados isogonais satisfaz determinada igualdade. No quarto, descobre-se um critério combinatório para um polígono ser inscritível que remete a definição do operador rotacional. O quinto requer combinar as Desigualdades de Ptolomeu, Triangular e a Relação de Stewart para provar que o Baricentro de um triângulo é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

Palavras-chave

Olimpíada Internacional de Matemática, Teorema de Ptolomeu, Desigualdade de Ptolomeu, Desigualdade Triangular.

1 Introdução

Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C., Alexandria, Egito) publicou o tratado “Almagesto” de treze livros defendendo a teoria geocêntrica do movimento dos planetas, a Lua e o

Sol. Esta prevaleceu por mais de 1400 anos, até que Nicolau Copérnico revolucionou a Astronomia com o modelo heliocêntrico em 1543. No livro I do “Almagesto”, Ptolomeu enunciou o teorema que leva seu nome. A partir do mesmo ele conseguiu calcular a função comprimento de corda (análoga a função seno atual) com intervalo de meio grau e cinco casas decimais de precisão [1]. A fórmula do Teorema de Ptolomeu, quando aplicada a um retângulo, transforma-se na fórmula do Teorema de Pitágoras.

O Teorema e a Desigualdade de Ptolomeu raramente são sequer citados para os estudantes de Ensino Médio no Brasil. Porém, seu conhecimento é importante para o sucesso em Olimpíadas. Neste artigo discutem-se detalhadamente cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), mas sem a pretensão de esgotar o tema.

Embora úteis e proveitosas, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas da IMO não detalham muitas deduções, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas discussões encontram-se frequentemente em inglês.

A apresentação neste artigo visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Espera-se também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as apresentadas aqui utilizam argumentos menos rebuscados e um número menor de passagens a serem preenchidas pelo leitor. Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática em [3], [4] e [5]. Inicia-se com uma introdução dos conceitos básicos sobre a igualdade e desigualdade de Ptolomeu.

2 Conceitos básicos

2.1 Teorema de Ptolomeu

Definição 2.1. *Um quadrilátero é dito inscritível ou cíclico quando seus quatro vértices pertencem a uma mesma circunferência.*

Teorema 2.1 (Teorema de Ptolomeu)**.** *Em um quadrilátero inscritível $ABCD$ o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos (Figura 1). Isto é, vale*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \tag{1}$$

A forma recíproca também é verdadeira. Se (1) *for verdade para o quadrilátero convexo $ABCD$, então ele é inscritível.*

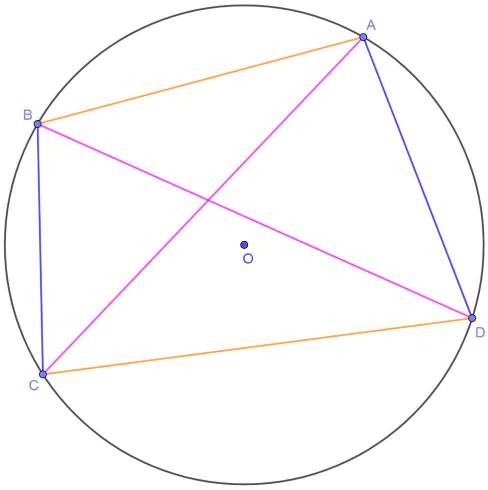

Figura 1: Enunciado do Teorema de Ptolomeu. Para um quadrilátero ser inscritível o produto dos comprimentos das diagonais deve ser igual à soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos e vice-versa. Versão interativa aqui.

Demonstração. i) Forma direta do Teorema de Ptolomeu. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível. Tem-se que $\angle ABC + \angle ADC = 180^{\circ}$. Estende-se a reta CD e coloca-se o ponto $P \in CD$, tal que $\angle BAC = \angle PAD$ (Figura 2).

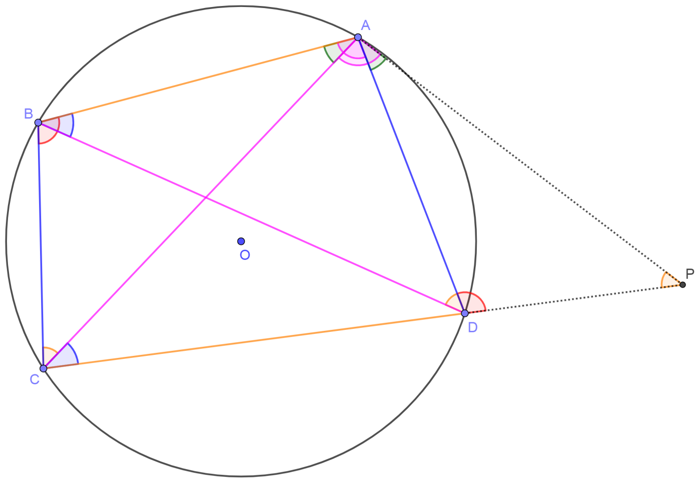

Figura 2: Demostração da forma direta do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui.

Como $\angle ADP + \angle ADC = 180^{\circ}$ segue que $\angle ABC = \angle ADP$. Logo,

$$\triangle ABC \sim \triangle ADP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Consequentemente:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DP} = \frac{AC}{AP} \Rightarrow DP = \frac{AD \cdot BC}{AB}. \tag{2}$$

Adicionalmente, $\angle BAD = \angle PAC$, pois $\angle DAC$ é comum aos dois anteriores, e $\angle ABD = \angle ACD$, devido a "enxergarem", a mesma corda AD. Com isto

$$\triangle ABD \sim \triangle ACP,$$

pelo critério de semelhança ângulo-ângulo. Segue que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AP} = \frac{BD}{CP} \Rightarrow CP = \frac{AC \cdot BD}{AB}. \tag{3}$$

De (2) e (3) tem-se

$$CP = CD + DP = CD + \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BD}{AB}.$$

Multiplicando a última igualdade por AB encontra-se (1).

ii) Recíproca do Teorema de Ptolomeu. A Figura 3 ilustra a construção. Suponha-se que $ABCD$ seja um quadrilátero convexo e vale (1). Esboça-se um ponto E, no interior de $ABCD$, tal que $\angle EDC = \angle ADB$ e

$$\frac{ED}{DC} = \frac{AD}{DB}. \tag{4}$$

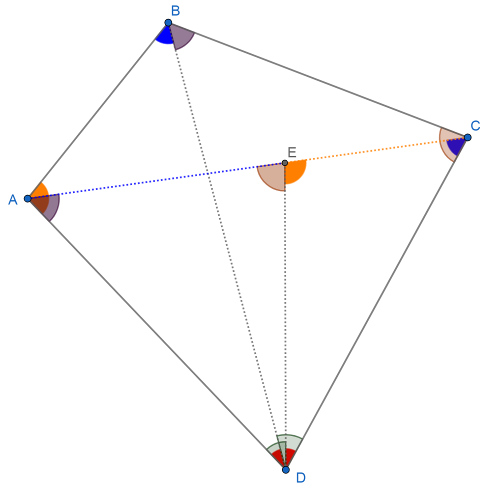

Figura 3: Demostração da recíproca do Teorema de Ptolomeu. Versão interativa aqui.

Como $\angle EDC = \angle ADB$ e, por (4), os lados correspondentes são proporcionais, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, tem-se:

$$\triangle EDC \sim \triangle ADB.$$

Logo, $\angle DAB = \angle DEC$, $\angle ABD = \angle ECD$ e

$$\frac{ED}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{AB}. \tag{5}$$

Nota-se que $\angle BDC = \angle ADE$, pois $\angle EDB$ é comum. Logo, por um par de ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais, (5), tem-se:

$$\triangle BDC \sim \triangle ADE.$$

Segue que $\angle DAE = \angle DBC$, $\angle AED = \angle BCD$ e

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{AE}. \tag{6}$$

Partindo de (1) escreve-se:

$$AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} + \frac{AB \cdot CD}{BD}.$$

Comparando o lado direito da equação anterior com (5) e (6) segue que:

$$AC = AE + EC.$$

Isto é, A, E e C são colineares. Como $\angle ABD = \angle ACD$, concluí-se que o quadrilátero $ABCD$ é cíclico. $\square$

Corolário 2.1. *O Teorema de Ptolomeu aplicado em um retângulo $ABCD$ equivale ao Teorema de Pitágoras aplicado nos triângulos retângulos ABC, BCD, CDA e DAB (Figura 4).*

Demonstração. Todo retângulo $ABCD$ é inscritível pois a soma dos ângulos opostos é 180° (Figura 4). Pelo Teorema de Ptolomeu vale:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

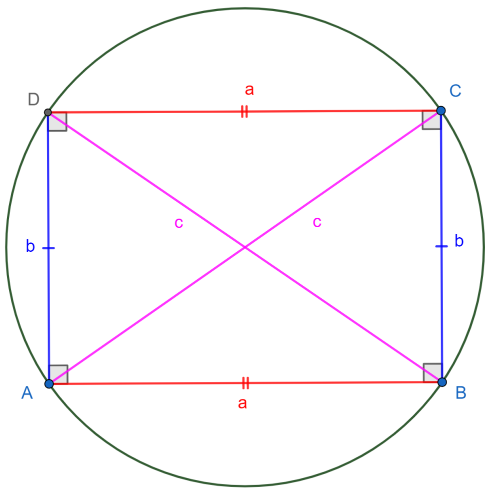

Figura 4: Teorema de Ptolomeu no retângulo $ABCD$. Versão interativa aqui.

Mas num retângulo $ABCD$ os lados opostos e as diagonais são congruentes entre si. Isto é, $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ e $AC = BD = c$. Segue a fórmula do Teorema de Pitágoras relativa aos triângulos retângulos ABC, BCD, CDA e DAB:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

2.2 Desigualdade de Ptolomeu

A desigualdade de Ptolomeu generaliza o resultado anterior.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Ptolomeu)**.** *Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível) o produto dos comprimentos das diagonais é menor ou igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos. Isto é, vale:*

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD. \tag{7}$$

Ocorre a igualdade se, e somente se, $ABCD$ é um quadrilátero inscritível, conforme o Teorema 2.1 (Ptolomeu).

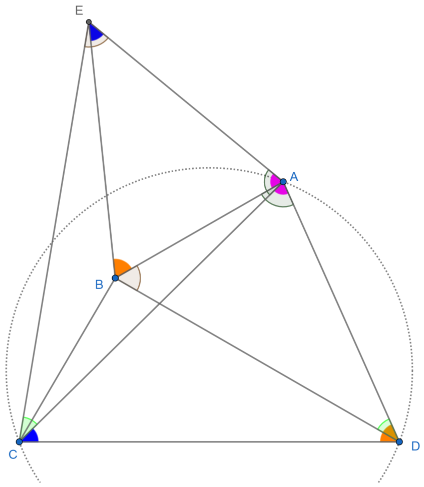

Figura 5: Construção geométrica para auxiliar na demonstração da Desigualdade de Ptolomeu. Versão interativa aqui.

Demonstração. A Figura 5 permite acompanhar a explicação. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo (não necessariamente inscritível), com diagonais AC e BD.

Inicia-se construindo um ponto E tal que $\angle ADC = \angle ABE$ e $\angle ACD = \angle AEB$. Pelo critério de semelhança ângulo-ângulo segue que $\triangle ACD \sim \triangle AEB$. Com o qual resulta na proporcionalidade dos lados:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{EB}{CD}. \tag{8}$$

Da segunda igualdade em (8) encontra-se:

$$EB = \frac{AB \cdot CD}{AD}. \tag{9}$$

Por outro lado, tem-se que $\angle BAD = \angle EAC$. Adicionalmente, da primeira igualdade em (8) segue que:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}. \tag{10}$$

Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado pode-se afirmar que:

$$\triangle BAD \sim \triangle EAC.$$

Segue que $\angle AEC = \angle ABD$ e $\angle ACE = \angle ADB$. Adicionalmente, além de (10), ganha-se outra proporcionalidade de lados:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{EC}. \tag{11}$$

De (11) segue que:

$$EC = \frac{AC \cdot BD}{AD}. \tag{12}$$

A seguir foca-se no triângulo EBC. Utilizando a Desigualdade Triangular tem-se:

$$EC \leq EB + BC. \tag{13}$$

Substituindo (12) e (9) em (13) encontra-se:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} \leq \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC. \tag{14}$$

Multiplicando (14) por AD concluí-se a validez de (7).

A igualdade ocorre se, e somente se, $EC = EB + BC$. Ou seja, E, B e C são colineares. Isso equivale ao quadrilátero $ABCD$ ser inscritível. $\square$

A desigualdade também é válida se o quadrilátero não é convexo [1]. Uma verificação numérica no site do GeoGebra pode ser vista aqui. Outra demonstração da Desigualdade de Ptolomeu encontra-se, por exemplo, em [6].

3 Problemas

3.1 Teorema de Ptolomeu. Arco Capaz. Triângulo Equilátero. P5 IMO 1995.

Problema 1. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo com:*

$$AB = BC = CD,$$

$$DE = EF = FA,$$

$$\angle BCD = \angle EFA = \pi/3.$$

Sejam G e H dois pontos no interior do hexágono, tais que os ângulos AGB e DHE são ambos $2\pi/3$. Provar que:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

A IMO 1995 foi realizada na cidade de Toronto, Canada. O problema acima foi proposto por A. McNaughton da delegação da Nova Zelândia, P11 da lista curta (SL) e escolhido como o quinto da competição [2].

3.1.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 6 mostra uma construção geométrica. Os triângulos BCD e EFA são equiláteros pelas hipóteses do problema. Para poder "encaixar"a parte superior ($ABCD$, em azul) com a parte inferior ($DEFA$, em vermelho) a linha BE deve ser a mediatriz dos pontos A e D. Isto é, os triângulos ABD e AED são isósceles de base AD. Para localizar as posições dos pontos G e H deve ser feita a construção do Arco Capaz (parte das circunferências c e f no interior do hexágono) sobre os segmentos AB e DE, respectivamente.

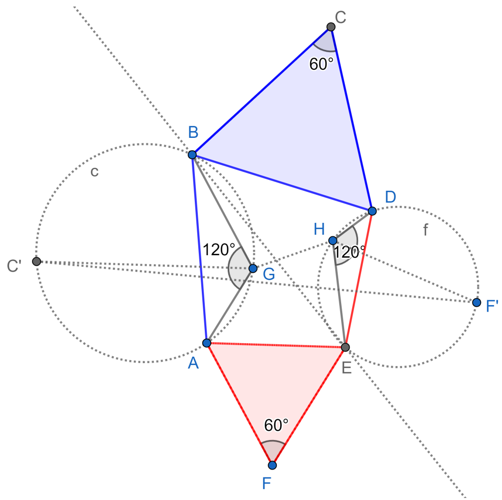

Figura 6: Uma construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui.

Para resolver o problema são construídos os pontos C' e F', simétricos de C e F em relação a reta BE, respectivamente. Nota-se que $CF = C'F'$.

Pela simetria em relação a linha BE os triângulos ABC' e DEF' são equiláteros. Segue que os ângulos $BC'A$ e $DF'E$ medem $60°$, com o qual os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ são inscritíveis ($\angle AGB + \angle BC'A = 180°$ e $\angle DHE + \angle EF'D = 180°$).

Utilizando o Teorema 2.1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $AGBC'$ tem-se:

$$AG \cdot BC' + BG \cdot AC' = GC' \cdot AB.$$

Como $BC' = AC' = AB$ segue:

$$AG + BG = GC'. \tag{15}$$

Analogamente, utilizando o Teorema 2.1 (Ptolomeu) no quadrilátero inscritível $DHEF'$ tem-se:

$$HE \cdot DF' + HD \cdot EF' = HF' \cdot DE.$$

Como $DF' = EF' = DE$ segue:

$$HE + HD = HF'. \tag{16}$$

Somando (15) e (16) encontra-se:

$$AG + BG + HE + HD = GC' + HF'.$$

Adicionando GH nos dois lados da equação anterior tem-se:

$$AG + BG + GH + HE + HD = GC' + GH + HF'. \tag{17}$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada nos triângulos HGC' e $HC'F'$ segue que:

$$(GC' + GH) + HF' \geq HC' + HF' \geq C'F' = CF. \tag{18}$$

A igualdade acontece quando os pontos G e H pertencem ao segmento $C'F'$.

De (17) e (18) encontra-se o que queria-se demonstrar:

$$AG + BG + GH + HE + HD \geq CF. \tag{19}$$

Pela Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 2.2) pode ser eliminada a restrição dos ângulos AGB e DHE serem $120°$. Neste caso, os quadriláteros $AGBC'$ e $DHEF'$ não serão necessariamente inscritíveis nem convexos. As igualdades (15) e (16) devem ser substituídas por:

$$AG + BG \geq GC',$$

$$HE + HD \geq HF'.$$

Repetindo o raciocínio feito anteriormente a desigualdade (19) continuará sendo válida.

3.2 Desigualdade de Ptolomeu. Desigualdade das médias aritmética e harmônica. P7 SL IMO 1997.

Problema 2. *Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Provar que:*

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Quando acontece a igualdade?

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. O problema acima foi proposto por Valentina Kirichenko da delegação da Rússia, P7 da SL [2].

3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 7 mostra uma construção geométrica. Para facilitar a interpretação também foram construídos os segmentos $AC = a$, $CE = b$ e $AE = c$.

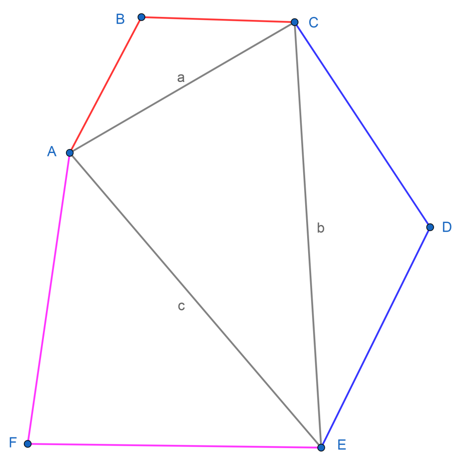

Figura 7: Uma construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui.

Inicia-se aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 2.2) ao quadrilátero $ACEF$:

$$AC \cdot EF + FA \cdot CE \geq AE \cdot FC.$$

Como $FA = EF$ segue que:

$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}. \tag{20}$$

Analogamente, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 2.2) no quadrilátero $AEDC$ tem-se:

$$AE \cdot CD + AC \cdot DE \geq DA \cdot CE.$$

Mas $CD = DE$, logo

$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{a+c}. \tag{21}$$

Mais uma vez, aplicando a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 2.2) no quadrilátero $ABCE$ segue:

$$AB \cdot CE + AE \cdot BC \geq AC \cdot BE.$$

Com $AB = BC$, encontra-se:

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}. \tag{22}$$

Somando (20), (21) e (22) tem-se:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Para resolver o problema basta provar a Desigualdade de Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \tag{23}$$

Sejam

$$x = b + c, \tag{24}$$

$$y = a + c, \tag{25}$$

$$z = a + b, \tag{26}$$

$$p = a + b + c. \tag{27}$$

Das quatro equações anteriores pode-se escrever a, b e c como função de x, y, z e p:

$$a = p - x, \tag{28}$$

$$b = p - y, \tag{29}$$

$$c = p - z. \tag{30}$$

Substituindo (24), (25), (26), (28), (29) e (30) em (23) encontra-se que (23) equivale a:

$$p\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3 \geq \frac{3}{2}.$$

E após algumas manipulações fica-se com a desigualdade:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{2p}. \tag{31}$$

Da soma de (24), (25), (26) e da definição de p em (27) tem-se que o valor $2p$ pode ser escrito como:

$$2p = x + y + z. \tag{32}$$

Substituindo (32) em (31) e reagrupando conclui-se que (31) é equivalente a:

$$M.A.\left\{x, y, z\right\} = \frac{x + y + z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = M.H.\left\{x, y, z\right\}. \tag{33}$$

Em (33) reconhece-se a desigualdade (verdadeira) entre as médias aritmética (M.A.) e harmônica (M.H.) do conjunto de valores positivos $\{x, y, z\}$.

A igualdade em (20), (21) e (22) acontece, pelo Teorema 2.1 (Ptolomeu), quando os quadriláteros $ACEF$, $AEDC$ e $ABCE$ são inscritíveis. Da igualdade em (23) segue que $a = b = c$, isto equivale a $x = y = z$ (igualdade na Desigualdade das Médias). Neste caso o hexágono é regular.

3.3 Teorema de Ptolomeu. Conjugados Isogonais. Semelhança de triângulos. P4 SL IMO 1998.

Problema 3. *Sejam M e N pontos no interior do $\triangle ABC$, tais que $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$. Provar que:*

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

A IMO 1998 foi realizada na cidade de Taipé, Taiwan. O problema acima foi proposto pela delegação da Armênia, P4 da lista curta [2].

3.3.1 Resolução do Problema 3.

A Figura 8 mostra uma construção geométrica inicial.

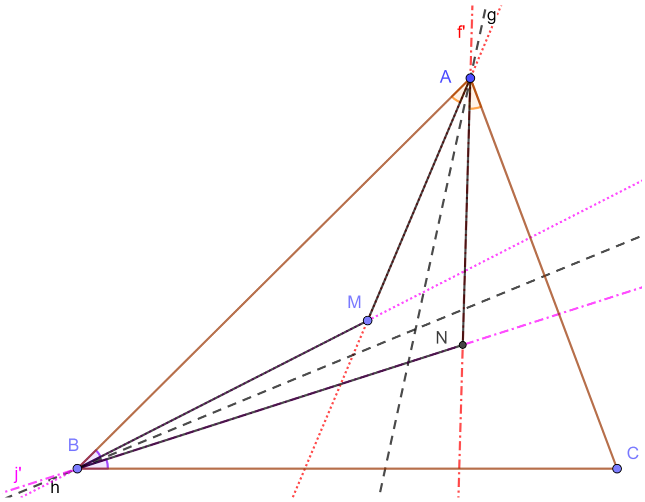

Figura 8: Uma construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui.

Devido as igualdades $\angle MAB = \angle NAC$ e $\angle MBA = \angle NBC$, os pontos M e N são conjugados isogonais. Pelo Teorema Fundamental dos conjugados isogonais também é válido que $\angle MCB = \angle NCA$.

Para a construção posiciona-se um ponto M no interior do $\triangle ABC$. Traçam-se as retas AM, BM e as bissetrizes g e h dos ângulos CAB e ABC, respectivamente. A seguir encontra-se a reflexão f' da reta AM relativo a g e a reflexão j' da reta BM relativo a h. Marca-se o ponto $N = f' \cap j'$.

Seja um ponto $K \in BN$ tal que $\angle BCK = \angle BMA$ (Figura 9). Como $\angle KBC = \angle ABM$, tem-se $\triangle BCK \sim \triangle BMA$. Segue que $\angle BKC = \angle BAM$ e

$$\frac{BC}{BM} = \frac{BK}{BA} = \frac{CK}{MA}. \tag{34}$$

Da primeira igualdade em (34) e $\angle MBC = \angle ABK$, pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que $\triangle MBC \sim \triangle ABK$. Logo, $\angle MCB = \angle AKB$, $\angle BMC = \angle BAK$ e

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{AK} = \frac{BC}{BK}. \tag{35}$$

Como $\angle NKC = \angle BKC = \angle BAM = \angle NAC$, então o quadrilátero $ANCK$ é inscritível. Aplicando o Teorema 2.1 (Ptolomeu) tem-se:

$$AC \cdot NK = AC \cdot (BK - BN) = AN \cdot CK + CN \cdot AK,$$

$$AC \cdot BK = AC \cdot BN + AN \cdot CK + CN \cdot AK. \tag{36}$$

De (34) e (35) encontra-se:

$$\begin{cases} AK = \dfrac{AB \cdot CM}{BM} \\ BK = \dfrac{AB \cdot BC}{BM} \\ CK = \dfrac{AM \cdot BC}{BM} \end{cases}.$$

Substituindo os resultados anteriores para AK, BK e CK em (36) tem-se:

$$\frac{AC \cdot AB \cdot BC}{BM} = AC \cdot BN + \frac{AN \cdot AM \cdot BC}{BM} + \frac{CN \cdot AB \cdot CM}{BM}. \tag{37}$$

Multiplicando (37) por $\dfrac{BM}{AB \cdot BC \cdot CA}$ chega-se a:

$$1 = \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB}.$$

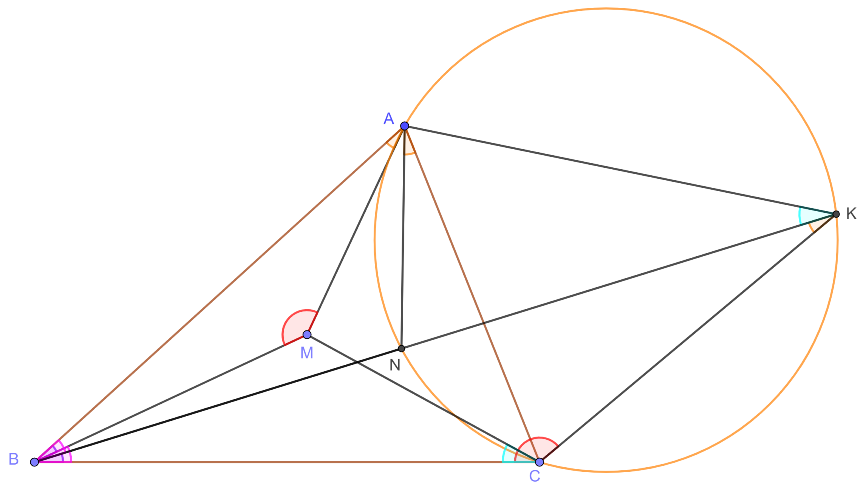

Figura 9: Uma construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.

3.4 Polígono inscritível. Teorema de Ptolomeu. P4 da SL da IMO 2000.

Problema 4. *Seja $A_1A_2...A_n$ um polígono convexo com $n \geq 4$. Provar que $A_1A_2...A_n$ é inscritível por uma circunferência se, e somente se, a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j), $j = 1, 2, ...n$, tais que*

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j, \tag{38}$$

para todo i, j com $1 \leq i < j \leq n$. A_iA_j é a distância entre os pontos A_i e A_j.

A IMO 2000 foi realizada na cidade Daejeon, Coreia do Sul. Problema proposto pela delegação da Rússia, P4 da lista curta [2].

3.4.1 Resolução do Problema 4.

Primeiro, suponha-se que a cada vértice A_j pode ser associado um par de números reais (b_j, c_j), $j = 1, 2, ...n$, tal que $A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j$ para todo i, j, com $1 \leq i < j \leq n$.

Para provar que o polígono $A_1A_2...A_n$ é inscritível basta provar que os quadriláteros $A_1A_2A_3A_i$, com $4 \leq i \leq n$, são inscritíveis. Ou, pela forma recíproca do Teorema 2.1 (Ptolomeu), que:

$$A_1A_3 \cdot A_2A_i = A_1A_i \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_i. \tag{39}$$

Nota-se, de (38), que:

$$A_1A_3 = b_3c_1 - b_1c_3,$$

$$A_2A_i = b_ic_2 - b_2c_i,$$

$$A_1A_i = b_ic_1 - b_1c_i,$$

$$A_2A_3 = b_3c_2 - b_2c_3,$$

$$A_1A_2 = b_2c_1 - b_1c_2,$$

$$A_3A_i = b_ic_3 - b_3c_i.$$

Substituindo-se as seis equações anteriores em (39)

$$(b_3c_1 - b_1c_3) \cdot (b_ic_2 - b_2c_i) = (b_ic_1 - b_1c_i) \cdot (b_3c_2 - b_2c_3) + (b_2c_1 - b_1c_2) \cdot (b_ic_3 - b_3c_i),$$

$$b_3c_1b_ic_2 - b_3c_1b_2c_i - b_1c_3b_ic_2 + b_1c_3b_2c_i = b_ic_1b_3c_2 - b_ic_1b_2c_3 - b_1c_ib_3c_2 + b_1c_ib_2c_3 +$$
$$+ b_2c_1b_ic_3 - b_2c_1b_3c_i - b_1c_2b_ic_3 + b_1c_2b_3c_i,$$

$$b_3b_ic_1c_2 - b_2b_3c_1c_i - b_1b_ic_2c_3 + b_1b_2c_3c_i = b_3b_ic_1c_2 - \cancel{b_2b_ic_1c_3} - \cancel{b_1b_3c_2c_i} + b_1b_2c_3c_i +$$
$$+\cancel{b_2b_ic_1c_3} - b_2b_3c_1c_i - b_1b_ic_2c_3 + \cancel{b_1b_3c_2c_i},$$

verifica-se a igualdade.

Segundo, suponha-se que $A_1A_2...A_n$ seja inscritível. Logo, os quadriláteros $A_1A_2A_iA_j$ com $3 \leq i < j \leq n$ são inscritíveis. Pela forma direta do Teorema 2.1 (Ptolomeu) vale que:

$$A_1A_i \cdot A_2A_j = A_1A_j \cdot A_2A_i + A_1A_2 \cdot A_iA_j.$$

Segue que:

$$A_iA_j = A_2A_j \cdot \frac{A_1A_i}{A_1A_2} - A_2A_i \cdot \frac{A_1A_j}{A_1A_2}.$$

A equação anterior sugere que basta utilizar:

$$b_i = \begin{cases} -A_1A_2, & \text{se } i = 1 \\ A_2A_i, & \text{se } 2 \leq i \leq n \end{cases},$$

$$c_i = \frac{A_1A_i}{A_1A_2},\ 1 \leq i \leq n.$$

Fazendo isto, segue que para todo i, j, com $1 \leq i < j \leq n$,

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j.$$

Isso conclui a prova do problema.

Como exemplo da segunda parte nota-se que a associação de pares para os quatro primeiros pontos de um polígono inscritível seria da forma:

$$A_1 \to (-A_1A_2, 0),$$

$$A_2 \to (0, 1),$$

$$A_3 \to (A_2A_3, \frac{A_1A_3}{A_1A_2}),$$

$$A_4 \to (A_2A_4, \frac{A_1A_4}{A_1A_2}).$$

Este problema faz lembrar a definição do operador Rotacional do Cálculo Vetorial. Seja o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)).$$

Seja ainda o operador $\vec{\nabla}$ formalmente representado como um vetor de derivadas parciais:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

O Rotacional $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é um campo vetorial calculado como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right).$$

Isto é, cada uma das componentes do Rotacional é da forma:

$$\frac{\partial}{\partial j} F_i - \frac{\partial}{\partial i} F_j,$$

com $i, j \in \{x, y, z\}$ e $i \neq j$. Ou seja, uma fórmula que lembra a (38).

3.5 Desigualdades de Ptolomeu e Triangular. Baricentro. Relação de Stewart. P17 SL IMO 2001.

Problema 5. *Denotar o ponto G, centroide do $\triangle ABC$. Determinar a posição de um ponto P tal que*

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \tag{40}$$

seja mínimo. Expressar este mínimo em função dos comprimentos dos lados do triângulo ABC.

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, EUA. O problema acima foi proposto pela delegação do Reino Unido, P17 da lista curta [2].

3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 10 mostra uma construção geométrica inicial.

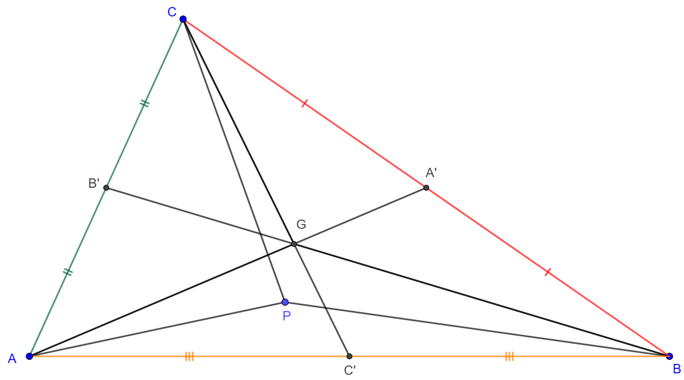

Figura 10: Uma construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui. Observe que ao mover o ponto P para diferentes posições somos levados a conjecturar que o mínimo ocorre quando $P = G$.

Sejam C', B' e A' os pontos médios dos segmentos $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, respectivamente. Considera-se a circunferência k circunscrita ao $\triangle BCG$ e o ponto F a segunda interseção da reta AG com k (Figura 11). Como o quadrilátero $BFCG$ é inscritível têm-se:

$$\angle BFC = \angle BGC' = \alpha,$$

$$\angle FBC = \angle FGC = \angle C'GA = \beta.$$

Pela Lei dos Senos aplicada no $\triangle BCF$ segue:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}. \tag{41}$$

Seja $\angle GC'B = \gamma$. Pela Lei dos Senos aplicada nos $\triangle GC'B$ e $\triangle GC'A$ encontram-se:

$$\frac{BC'}{BG} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\gamma)}, \tag{42}$$

$$\frac{AC'}{AG} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(180^\circ - \gamma)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\gamma)}. \tag{43}$$

Como $AC' = BC'$, dividindo (42) por (43) resulta em:

$$\frac{AG}{BG} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)}. \tag{44}$$

Logo, da comparação de (41) e (44) chega-se a:

$$\frac{BC}{CF} = \frac{AG}{BG}. \tag{45}$$

Analogamente, mostra-se que:

$$\frac{BC}{BF} = \frac{AG}{CG}. \tag{46}$$

Reescrevem-se os dois últimos somandos de (40) utilizando (45) e (46):

$$BP \cdot BG + CP \cdot CG = BP \cdot \frac{CF \cdot AG}{BC} + CP \cdot \frac{BF \cdot AG}{BC},$$

$$BP \cdot BG + CP \cdot CG = \frac{AG}{BC}(BP \cdot CF + CP \cdot BF). \tag{47}$$

Aplica-se a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 2.2) ao quadrilátero $PBFC$:

$$BP \cdot CF + CP \cdot BF \geq PF \cdot BC. \tag{48}$$

Vale a igualdade quando $PBFC$ é inscritível.

De (47) e (48) segue:

$$BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq \frac{AG}{BC}(PF \cdot BC) = AG \cdot PF. \tag{49}$$

Para recuperar (40) adiciona-se $AP \cdot AG$ nos dois lados de (49):

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AP \cdot AG + AG \cdot PF = AG(AP + PF). \tag{50}$$

Pela Desigualdade Triangular aplicada no $\triangle APF$ tem-se:

$$AP + PF \geq AF. \tag{51}$$

Vale a igualdade quando $P \in AF$.

De (50) e (51) segue:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG \cdot AF. \tag{52}$$

A utilização das duas desigualdades (Ptolomeu e Triangular) leva a concluir que o mínimo de (40) acontece quando $P = G$. Isto é, (52) pode ser escrito como:

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG \geq AG^2 + BG^2 + CG^2.$$

O anterior implica que

$$(AP - AG)^2 + (BP - BG)^2 + (CP - CG)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AP^2 + BP^2 + CP^2 \geq 2(AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG) - (AG^2 + BG^2 + CG^2) \geq$$
$$\geq AG^2 + BG^2 + CG^2,$$

de onde segue que o baricentro é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

Com o auxilio da Relação de Stewart calcula-se o quadrado da mediana AA' :

$$AA'^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \tag{53}$$

De (53) e $AG = \dfrac{2}{3}AA'$, então:

$$AG^2 = \frac{2}{9}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{9}. \tag{54}$$

Analogamente, vale que:

$$BG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + c^2) - \frac{b^2}{9}, \tag{55}$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{9}. \tag{56}$$

Somando (54), (55) e (56) encontra-se:

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

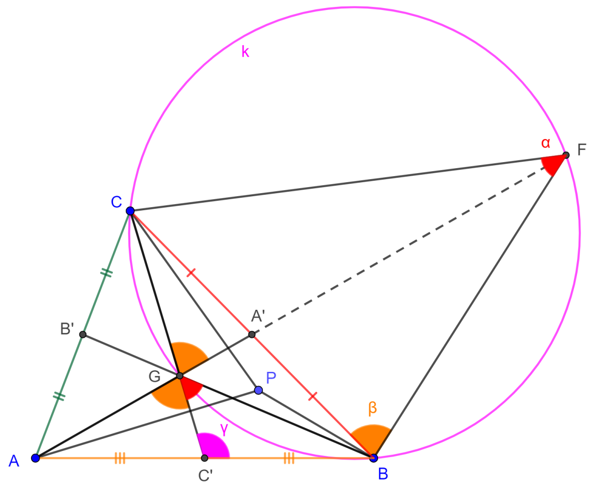

Figura 11: Uma construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui.

4 Comentários Finais

Após uma apresentação da teoria mais relevante, discutiram-se detalhadamente cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. No primeiro (P5 IMO 1995, Canadá) estudou-se um hexágono com dois conjuntos de três lados de comprimentos iguais. Foi provada uma desigualdade com a utilização do Teorema de Ptolomeu, da simetria da figura e da construção geométrica do Arco Capaz.

No segundo problema (P7 SL IMO 1997, Argentina) apresentou-se outro hexágono com três conjuntos de dois lados de comprimentos iguais. Para a demonstração utilizaram-se as desigualdades de Ptolomeu e das médias aritméticas e harmônica. O terceiro (P4 SL IMO 1998, Taiwan) mostrou que um par de pontos conjugados isogonais satisfazem determinada igualdade. Para tal foram usados o Teorema de Ptolomeu e duas semelhanças de triângulos.

No quarto problema (P4 SL IMO 2000, Coreia do Sul) descobriu-se um critério combinatório para um polígono ser inscritível. O quinto (P17 SL IMO 2001, EUA) requereu utilizar conjuntamente as Desigualdades de Ptolomeu, Triangular e a Relação de Stewart. Isto permitiu provar que o Baricentro de um triângulo é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices.

Referências

[1] Tom M. Apostol. Ptolemy's inequality and the chordal metric. *Mathematics Magazine*, 40(5):233–235, nov 1967. (Seção 1, 2.2)

[2] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, and Nikola Petrovic. *The IMO Compendium*. Springer-Verlag GmbH, May 2011. (Seção 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5)

[3] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto*, 2(2-2021):46–69, July 2021. (Seção 1)

[4] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em olimpíadas internacionais de matemática. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 20:22–40, jul 2021. (Seção 1)

[5] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)*, 2:117–139, November 2021. (Seção 1)

[6] Antonio Caminha Muniz Neto. *Geometria*. SBM, 2013. (Seção 2.2)