Medida de Lebesgue: uma análise especifica por meio dos conjuntos de Cantor

Natiely Sampaio Costa theosamcosta@gmail.com
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa, BA, Brazil

Felipe Fonseca dos Santos felipefonseca@ufrb.edu.br
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa, BA, Brazil

Resumo

A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, é uma generalização da medida de comprimento usual. O presente trabalho apresenta uma discussão sobre medida de Lebesgue fazendo uma análise de suas propriedades utilizando subconjuntos pouco intuitivos da reta. Para tanto, por meio de uma ampla revisão de literatura, são apresentados conceitos introdutórios sobre a teoria de medida, a construção da medida de Lebesgue e as construções dos conjuntos de Cantor e "tipo Cantor". Esses conjuntos possibilitam extrair informações sobre a medida de Lebesgue, e como consequência, confrontam as relações métricas e topológicas desses conjuntos.

Palavras-chave

Teoria da medida, Medida de Lebesgue, Conjunto de Cantor.

1 Introdução

A ideia de medida sempre teve papel fundamental na organização e desenvolvimento das sociedades. Em muitos casos, cada sociedade utilizava uma forma e uma escala diferente para medir o mesmo objeto, o que gerava muitas divergências, como por exemplo, medidas diferentes para a mesma área de terra. Durante a Revolução Francesa em 1795, visando resolver os conflitos gerados pelos diferentes valores obtidos por cada medida para um mesmo objeto, foram estabelecidas algumas medidas padrões para toda a região (que se tornaram, posteriormente, universais) como o metro, o grama e o litro.

Padronizar as medidas é uma boa solução para essas situações, entretanto, ao fixar uma única medida perde-se as potencialidades das demais medidas, uma vez que, cada uma delas possui vantagens e desvantagens. É nesse sentido que muitos matemáticos passam a tentar entender o que de fato é comum entre todas as medidas e como uma delas pode ser mais útil, em algumas situações, do que as demais, dando início a chamada teoria da medida.

Informalmente, a noção matemática de medida busca representar conceitos como cardinalidade, comprimento, área, volume, massa, carga elétrica, entre outras.

Os primeiros "passos" em direção a formalização matemática desse conceito foi dado pelo matemático francês Camille Jordan. Em seu trabalho intitulado “Observações sobre integrais definidas” de 1892, Jordan fez um breve apanhado sobre a integral de Riemann e sobre a integral de Darboux e demonstrou interesse em analisar a natureza da medida dos conjuntos do domínio, sendo o primeiro a dar uma caracterização para os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^2$ [1].

Outros matemáticos foram importantes para o desenvolvimento da Teoria da Medida, dentre esses os franceses Émile Borel e Henri Lebesgue. Sob influência dos trabalhos de Jordan e também pelos trabalhos de George Cantor, em 1898, Borel amplia a noção de medida de comprimento de intervalos para uma ampla classe de conjuntos na reta real. Essa medida é denominada como medida de Borel, e se comporta como uma extensão da medida de Jordan. Posteriormente, em 1902, Lebesgue com sua tese de doutorado estende os estudos de Jordan e Borel e estabelece as bases da teoria [1].

A teoria de medida desempenha papel fundamental na matemática, não só pela generalidade que ela proporciona, mas também por garantir resultados importantes que possibilitam o desenvolvimento de diversas áreas, como a teoria ergódica, a teoria de probabilidade, teoria dos números, entre outras.

Dentre as medidas conhecidas, a medida de Lebesgue destaca-se por generalizar as noções de comprimento, área e volume que estamos habituados, em termos de teoria da medida. Essa generalização, por vezes, impõe alguns desafios a ideia intuitiva de medida, principalmente quando associados às diferentes noções de conjuntos infinitos (conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis, por exemplo).

Nesse sentido, os conjuntos de Cantor contribuem para uma melhor compreensão das medidas. Segundo [7]: “Conjuntos de Cantor desempenham um papel importante em áreas bastante distintas da matemática, como topologia, sistemas dinâmicos, teoria da medida e teoria dos números”.

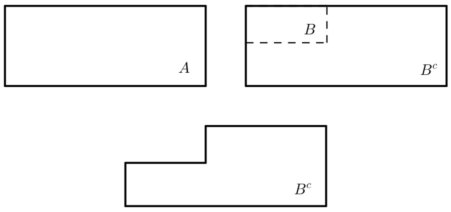
Os conjuntos de Cantor possuem propriedades geométricas e topológicas que podem desafiar as nossas intuições. Através deles, é possível mostrar a existência de conjunto não-enumerável com medida de Lebesgue zero, e também exibir exemplo de conjunto com interior vazio com medida de Lebesgue positiva e até mesmo com medida infinita.

Ao longo deste trabalho serão apresentadas e discutidas as construções da medida de Lebesgue e dos conjuntos de Cantor e como esses objetos relacionados podem ajudar a entender um pouco mais sobre a teoria. Além disso, a partir dos conjuntos de Cantor serão construídos conjuntos “tipo Cantor”, cuja medida de Lebesgue pode assumir qualquer valor não negativo.

2 Introdução à Teoria da Medida

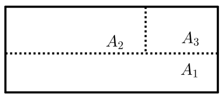
Supondo que sabe-se medir apenas a área de retângulos e denotando $S(X)$ como a medida da área de um retângulo X, é possível calcular a área de conjuntos com outras formas geométricas. Por exemplo, considere A um retângulo conforme a Figura 1. Sendo B um retângulo subconjunto contido em A, então é possível determinar a área do conjunto B^c (que pode não ser um retângulo), para tanto, basta fazer $S(A) - S(B)$.

Figura 1: Conjunto A



Além disso, se é possível dividir o conjunto A em subconjuntos disjuntos formados por retângulos, digamos A_1, A_2 e A_3, conforme a Figura 2, então é esperado que a medida do conjunto A coincida com a soma das medidas de cada um dos subconjuntos, isto é, $S(A) = S(A_1) + S(A_2) + S(A_3)$.

Figura 2: Partição de A



Usando essas ideias é possível calcular as áreas de diversos subconjuntos de A através da diferença ou da união de subconjuntos de retângulos de A. No entanto, não poderíamos calcular, com essas ferramentas, a área de um subconjunto de A em forma de circunferência, por exemplo. Essa situação não só ilustra a nossa limitação em calcular a área de figuras geométricas no plano ($\mathbb{R}^2$) quando fixamos uma determinada medida, como também justifica a necessidade de delimitar quais são os subconjuntos que podem ser medidos por S.

Além disso, essas situações apresentadas de maneira informal sugerem características que uma σ-álgebra e uma medida devem possuir e que serão devidamente definidas a seguir.

Seja X um conjunto não vazio, denota-se $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X.

Definição 2.1. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra (sigma-álgebra) de subconjuntos de X se:

1. $X \in \mathcal{A}$;

2. Se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$;

3. Se (A_n) é uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}$ então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Nesse contexto, a dupla $(X, \mathcal{A})$ é chamada espaço mensurável e todo elemento de $\mathcal{A}$ é dito um conjunto $\mathcal{A}$-mensurável. Quando não há dúvida sobre a σ-álgebra considerada, dizemos apenas que X é um espaço mensurável e $A \in \mathcal{A}$ é um conjunto mensurável.

Observação 1. Quando a condição do item (3) é satisfeita apenas para uniões finitas, dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **álgebra de** X.

Exemplo 2.1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c, \mathbb{R}\}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.

Note que, $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. É fácil verificar que o complementar de qualquer elemento de $\mathcal{A}$ pertence a $\mathcal{A}$. Além disso, a união qualquer de elementos de $\mathcal{A}$ ainda será um elemento de $\mathcal{A}$.

Exemplo 2.2. Considere $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável }\}$. $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$.

Note que $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, pois $\mathbb{R}^c = \emptyset$ e $\emptyset$ é enumerável.

Além disso, considere $A \in \mathcal{A}$ temos que A é enumerável ou A^c é enumerável. No caso de A ser enumerável então $(A^c)^c$ é enumerável. Logo, $A^c \in \mathcal{A}$. Se A é não enumerável então A^c é necessariamente um conjunto enumerável, pois $A \in \mathcal{A}$ e, portanto $A^c \in \mathcal{A}$.

Por fim, vamos verificar que se $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Ou seja, deve-se mostrar que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ou $\displaystyle\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in \mathcal{A}$. Note que podemos ter as seguintes possibilidades:

1. Se todos os A_n forem enumeráveis então $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é enumerável. Logo, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

2. Se algum dos A_n, digamos um A_{n_1} for não enumerável, temos que $(A_{n_1})^c$ é enumerável. Note que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} {A_n}^c \subset {A_{n_1}}^c.$$

Como todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável, concluímos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Introduzida a noção de σ-álgebra e mensurabilidade de conjuntos, pode-se definir o que são as funções chamadas de medida, que atribui a cada elemento A da σ-álgebra de X um número real estendido[1], chamado de medida do conjunto A.

Definição 2.2. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Dizemos que μ é uma medida se $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma função tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Se $A_n \in \mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos, $\forall n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A propriedade **2** é chamada σ**-aditividade**.

As definições 2.1 e 2.2 permite deduzir várias propriedades (veja [6], [2] e [5]) e mostram que as características esperadas são contempladas e as limitações apresentadas de modo informal são superadas.

Exemplo 2.3. Seja $X \neq \emptyset$ e considere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Fixado $x_0 \in X$, define-se a função delta de Dirac $\delta_{x_0} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ suportada em x_0 por

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \text{ se } x_0 \in A \\ 0, \text{ se } x_0 \notin A \end{cases}.$$

Note que a função delta de Dirac é uma medida, pois como $x_0 \notin \emptyset$, então, $\delta_{x_0}(\emptyset) = 0$. Logo, o primeiro item da definição 2.2 é satisfeito.

Além disso, dada $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência disjunta em $\mathcal{A}$, temos duas possibilidades:

1. ou $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Deste modo, x_0 não pertence a qualquer dos A_n, daí

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n),$$

uma vez que a soma enumerável de zeros é zero.

[1] a medida pode assumir o valor $+\infty$.

2. ou $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Neste caso, observe que x_0 pertence a um, e somente um, A_n, digamos A_k, pois os $A_n{}'s$ são dois a dois disjuntos para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\delta_{x_0}(A_k) = 1$ e $\delta_{x_0}(A_n) = 0$ para todo $n \neq k$. Assim,

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n) = \delta_{x_0}(A_k) + \sum_{n \neq k} \delta_{x_0}(A_n) = 1 + 0 = 1.$$

Logo,

$$\delta_{x_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{x_0}(A_n).$$

Em ambas as situações, a σ-adtividade é satisfeita. Portanto, a função delta de Dirac é uma medida, chamada Medida de Dirac.

Um outro exemplo de medida que se verifica facilmente é a chamada Medida de Contagem. Ela é definida da seguinte forma:

Exemplo 2.4. Seja $X \neq \emptyset$ e considere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Define-se $C : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ a medida de contagem por:

$$C(A) = \begin{cases} \text{nº de pontos de } A \text{ , se } A \text{ finito} \\ \infty, \text{ se } A \text{ é infinito} \end{cases}.$$

Dependendo do que se está interessado em medir, algumas medidas podem ser mais adequadas do que outras, e um mesmo objeto pode ser avaliado de maneira completamente distinta entre elas. A medida de Dirac, por exemplo, só “enxerga” os conjuntos que contém o ponto x_0. Isso pode ser vantajoso se você busca identificar conjuntos que possuem tal ponto, desprezando a cardinalidade e comprimento do conjunto.

Considere, $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, note que o comprimento desse conjunto é 1, $\delta_1(A) = 0$ e $C(A) = +\infty$. Esse exemplo ilustra como um mesmo conjunto pode ser medido de formas distintas a depender das medidas utilizadas.

Os resultados a seguir, independem da medida utilizada e auxiliam o cálculo da medida de conjuntos encaixados.

Lema 2.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida em X. Se A, $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Se $\mu(A)$ é finita, então $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Demonstração. Dados $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, pode-se escrever $B = (B \backslash A) \cup A$. Sendo

$(B\backslash A) \cap A = \emptyset$, segue do item 2 da Definição 2.2,

$$\mu(B) = \mu((B\backslash A) \cup A) = \mu(B\backslash A) + \mu(A). \tag{1}$$

Como $\mu(B\backslash A) \geq 0$, conclui-se que $\mu(B) \geq \mu(A)$.

Se $\mu(A) < +\infty$, subtraindo $\mu(A)$ em ambos os lados da igualdade (1), têm-se $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$. □

Proposição 2.2. *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida em X.*

1. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

2. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_1) < \infty$, então*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração. 1. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Se $\mu(A_{n_0}) = +\infty$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então $\mu(A_n) = +\infty$ para todo $n \geq n_0$. Donde segue o resultado.

Caso $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, defina indutivamente a sequência $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n\backslash A_{n-1}$ para $n \geq 2$. Então $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois, tais que $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = A_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Como $B_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo Lema 2.1,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{n} \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}) = \mu(A_n).$$

Consequentemente,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

o que prova o item 1 da Proposição 2.2.

2. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\mu(A_1) < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $B_n = A_1 \backslash A_n$ e denote $B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$. Observe que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não-decrescente em $\mathcal{A}$, isto é, $B_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mu(A_1) < \infty$, usando o item 1 da Proposição 2.2 e o Lema 2.1 temos,

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2}$$

Observando que $B = A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ tem-se,

$$\mu(B) = \mu\left(A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{3}$$

Combinando as equações (2) e (3) obtemos $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

□

Observe que a hipótese $\mu(A_1) < \infty$ é essencial para que o item 2 da Proposição 2.2 seja verdadeiro. Consideremos o espaço de medida $(\mathbb{N}, C, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, onde C é a medida de contagem (cardinalidade). Defina para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{i \in \mathbb{N} \,|\, i \geq n\}$. Todos esses conjuntos possuem um número infinito de elementos, o que implica que $C(A_n) = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, pois do contrário o conjunto dos números naturais (em $\mathbb{R}$) seria limitado superiormente. Assim, $C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$. Ou seja, o item 2 não é satisfeito.

2.1 Medida de Lebesgue

Uma das medidas mais importantes e utilizadas na teoria é a chamada medida de Lebesgue, isso porque ela generaliza a noção de comprimentos de intervalos reais, isto é, dados os intervalos da reta $I_1 = [a, b], I_2 = (a, b], I_3 = [a, b)$ e $I_4 = (a, b)$, a medida desses intervalos será o número real $b - a$. Assim como, o comprimento dos conjuntos $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$ e $(-\infty, +\infty)$ deve ser $+\infty$.

Além disso, também é desejável que a medida dos conjuntos sejam invariantes por translação e que o comprimento da união de um número finito de intervalos abertos e disjuntos seja a soma dos comprimentos de cada intervalo correspondente. Assim, o comprimento de $\bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$ é $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$, para intervalos que não se interceptam.

Nesse sentido, a ideia para generalizar essa noção de medida para conjuntos mais gerais é tentar estimar a medida de um conjunto aproximando-o por intervalos abertos. Assim, a medida será inicialmente definida na álgebra $\mathcal{F}$ gerada pela coleção de todos os conjuntos da reta que podem ser escritos como uma união de intervalos abertos disjuntos. Pois dessa forma, pode-se utilizar o Teorema da Extensão de Carathéodory (Teorema 2.3), que possibilita estender a álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ para uma σ-álgebra $\mathcal{F}^*$ gerada por esses subconjuntos e também estender a medida definida em $\mathcal{F}$ para uma medida definida na σ-álgebra $\mathcal{F}^*$.

Portanto, a próxima etapa para construção da medida de Lebesgue é a definição de uma medida exterior em $\mathcal{F}$ para que seja possível estabelecer a extensão mencionada no parágrafo anterior.

Em particular, como queremos construir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$, temos a seguinte definição[2]

Definição 2.3 (Medida Exterior de Lebesgue)**.** Dado $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, defina $|I| = b - a$ $(a < b)$ (o comprimento de I) e $|\emptyset| = 0$. A medida exterior de Lebesgue de um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é

$$L^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|;\ \langle I_j \rangle_{j\in\mathbb{N}} \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j \right\},$$

onde $\langle I_j \rangle_{j\in\mathbb{N}}$ denota uma sequência de intervalos abertos tal que $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$.

Note que na definição 2.3, o ínfimo sempre é tomado sobre um conjunto diferente do vazio, pois $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$. Além disso, para qualquer $A \subset \mathbb{R}$, tem-se $L^*(A) \in [0, +\infty]$. Ao definir dessa forma obtém-se que a função "comprimento" seja σ-aditiva sobre as sequências cuja união ainda pertence à álgebra. Ou seja, consegue-se, a partir da noção de comprimento de intervalos, definir uma medida em $\mathcal{F}$.

É fácil ver que L^* estende o conceito de comprimento de intervalo, uma vez que, $L^*(I) = |I|$ para todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Observação 2. Decorre da definição de L^* que $L^*(\{x\}) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Basta observar que, dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $I_1 = (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}) \supset \{x\}$, e pondo

[2]Para definir uma medida exterior μ em um conjunto A de modo geral, basta considerar na definição 2.3 uma sequência de conjuntos E_j (não necessariamente intervalos) tal que $A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$.

$I_{k\geq 2} = \emptyset$, segue que $0 \leq L^*(\{x\}) \leq \left| x + \frac{\varepsilon}{2} - \left(x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right| = \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que $L^*(\{x\}) = 0$.

A medida exterior de Lebesgue (L^*) parte inicialmente do comprimento de intervalos da reta e através dessa generalização busca então mensurar um número maior de conjuntos, sendo estes mais gerais do que intervalos.

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser consultada em [2], permite estender a medida exterior a uma medida definida em uma σ-álgebra.

Teorema 2.3 (Teorema da Extensão de *Carathéodory*)**.** *Seja μ^* uma medida exterior em X. Defina*

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \subset X |\, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \text{ para todo } E \subset X\}\,.$$

Então $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X gerados pela medida exterior μ^*. Defina $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ por $\mu(A) = \mu^*(A)$ para $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$; então $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida.

Definição 2.4. A medida ℓ obtida através da aplicação do resultado anterior à medida exterior L^* é chamada de **medida de Lebesgue** em $\mathbb{R}$. Os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tais que

$$L^*(E) = L^*(E \cap A^c) + L^*(A \cap E), \text{ para todo } E \subset \mathbb{R}$$

são ditos conjuntos mensuráveis a Lebesgue.

A coleção $\mathcal{L}$ de conjuntos mensuráveis a Lebesgue é uma σ-álgebra. Nesse caso, diz-se que $\mathcal{L}$ é a σ-álgebra de Lebesgue.

A propriedade 2 da Definição 2.2, juntamente com a Observação 2, permite concluir que todo conjunto enumerável $\mathcal{L}$-mensurável tem medida de Lebesgue zero, pois todo conjunto enumerável pode ser escrito como a união enumerável de conjuntos disjuntos de medida nula. Em particular, escrevendo $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ temos

$$\ell(\mathbb{Q}) = \ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(\{q_n\}) = 0.$$

No entanto, se um conjunto tem medida de Lebesgue zero não significa que o conjunto é enumerável. É possível mostrar essa afirmação através do conjunto Ternário de Cantor. O conjunto Ternário de Cantor é o conjunto de Cantor mais conhecido e talvez o primeiro conjunto fractal[3] conhecido da história.

[3] Informalmente, um fractal é um objeto geométrico autossimilar que independem de escala, isto é, que cada parte do objeto é semelhante ao objeto original.

3 Conjunto de Cantor

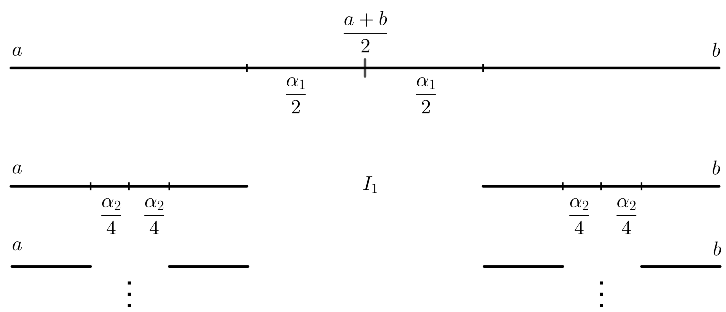
De modo geral, um conjunto de Cantor em $\mathbb{R}$ é obtido como o limite de um processo iterativo e é caracterizado por ser fechado, limitado, todos os seus pontos são pontos de acumulação (perfeito) e tem interior vazio (totalmente desconexo), isto é, não contém intervalos. Ou seja,

Definição 3.1. Um conjunto de Cantor $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, compacto, perfeito e totalmente desconexo.

A construção exposta a seguir foi apresentada por [3]. Trata-se de uma adaptação da construção original proposta por Cantor, onde em cada etapa (de retirada dos intervalos abertos) o comprimento dos intervalos abertos que são retirados podem não seguir uma proporção fixa (na construção do conjunto Ternário de Cantor, a proporção de um terço é fixa), eles podem variar em cada etapa de construção.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$ e $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos tais que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq |I|$. Define-se $I_1 = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{\alpha_1}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha_1}{2}\right)$ o intervalo de comprimento α_1 removido de I. Depois retira-se dos intervalos que restaram intervalos concêntricos a direita e a esquerda de comprimentos iguais a $\frac{\alpha_2}{2}$, onde $I_2 = \left(\frac{a + \frac{a+b}{2} - \frac{\alpha_1}{2}}{2} - \frac{\alpha_2}{4}, \frac{a + \frac{a+b}{2} - \frac{\alpha_1}{2}}{2} + \frac{\alpha_2}{4}\right) \cup \left(\frac{b + \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha_1}{2}}{2} - \frac{\alpha_2}{4}, \frac{b + \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha_1}{2}}{2} + \frac{\alpha_2}{4}\right)$ e $\ell(I_2) = \alpha_2$. Prosseguindo dessa forma na n-ésima etapa, $I \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$ corresponde a 2^n intervalos de comprimento $\lambda_n = \dfrac{1}{2^n}\left(b - a - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$ cada um.

Figura 3: Ilustração da construção do conjunto de Cantor



Denote $\mathbb{K}_n = I \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\ell(\mathbb{K}_n) = \lambda_n$.

Teorema 3.1. $\mathbb{K} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{K}_n$ *é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Por construção, $\mathbb{K}_1 \supset \mathbb{K}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{K}_n \supset \ldots$, e como cada $\mathbb{K}_n$ é compacto (fechado e limitado) e não vazio, segue que $\mathbb{K} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_n \neq \emptyset$. Além disso, $\mathbb{K}$ é fechado, pois é obtido como a interseção de conjuntos fechados $\mathbb{K}_n = I \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)$. Como $\mathbb{K} \subset [a,b]$ é limitado, concluí-se que $\mathbb{K}$ é compacto.

Supondo que existam $c, d \in [a,b]$, $c < d$, tal que o intervalo $(c,d) \subset \mathbb{K}$, ou seja, $(c,d) \subset \mathbb{K}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por construção, sabe-se que na n-ésima etapa de construção do conjunto $\mathbb{K}$, o diâmetro dos 2^n intervalos que compõe $\mathbb{K}_n$ mede $\lambda_n = \frac{1}{2^n}\left(b - a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$.

Uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Dado $0 < \varepsilon < d - c$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se $\lambda_n < \varepsilon < d - c$, logo, $(c,d) \nsubseteq \mathbb{K}_n$, para todo $n > n_0$. O que contradiz a suposição inicial, portanto $\mathbb{K}$ é totalmente desconexo.

Note que os pontos extremos de intervalos removidos durante a construção de $\mathbb{K}$ pertencem à $\mathbb{K}$ (em cada nova etapa da construção são retirados apenas pontos interiores desse intervalo).

Se $c \in \mathbb{K}$ é extremidade de algum intervalo $(c,b) \subset [a,b]$ retirado para formar o conjunto $\mathbb{K}$. Quando o intervalo (c,b) foi retirado, restou um intervalo $[x,c] \subset [a,b]$.

Nas etapas seguintes, resta intervalo, do tipo $[x_n, c]$ de comprimento λ_n, observe que $x_n \in \mathbb{K}$. Assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, uma vez que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. Logo, c é um ponto de acumulação de $\mathbb{K}$.

Seja $c \in \mathbb{K}$, tal que c não é um extremo de um intervalo retirado de $[a,b]$ durante a construção de $\mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, c pertence ao interior de um intervalo $[x_n, y_n]$ que restou na n-ésima etapa de construção de $\mathbb{K}$. Temos que $x_n < c < y_n$, com $x_n, y_n \in \mathbb{K}$ e $y_n - x_n = \lambda_n$. Assim, $0 < c - x_n < y_n - x_n = \lambda_n$ e $\lambda_n = y_n - x_n > y_n - c > 0$. Pelo Teorema do Confronto têm-se, $c = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$. Portanto, c é um ponto de acumulação de $\mathbb{K}$. Donde conclui-se que $\mathbb{K}$ é perfeito. □

Proposição 3.2. $\mathbb{K}$ *é não enumerável.*

Demonstração. Dado $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{K}$ um subconjunto enumerável. Considere $I_1 \subset [a,b]$ um subconjunto compacto e não degenerado com centro em um ponto de $\mathbb{K}$, de modo que $x_1 \notin I_1$. Como $\mathbb{K}$ não tem pontos isolados, $I_1 \cap \mathbb{K}$ é um conjunto infinito, compacto e sem pontos isolados. Em seguida, com centro em algum ponto de $\mathbb{K} \cap I_1$ considere um intervalo compacto não-degenerado $I_2 \subset I_1$ tal que $x_2 \notin I_2$. Prosseguindo dessa forma, obtemos uma sequência decrescente de intervalos compactos encaixados $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \ldots$, tais que $x_n \notin I_n$ e $I_n \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que I_n tem comprimento menor que $\frac{\alpha_1}{n}$. Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $y_n \in I_n \cap \mathbb{K}$, teremos então $|y_n - c| \leq \frac{\alpha_1}{n}$, donde $\lim_{n \to \infty} y_n = c$, ou seja, c é um ponto aderente. Como $\mathbb{K}$ é fechado, segue que $c \in \mathbb{K}$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $c \in I_n$, logo $c \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Portanto, $\mathbb{K}$ é não enumerável. □

Proposição 3.3. *Os conjuntos $\mathbb{K}_n$ e $\mathbb{K}$ são $\mathcal{L}$-mensurável, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, observe que $I_n, [a,b] \in \mathcal{L}$, então $\bigcup_{k=1}^{n} I_k, [a,b]^c \in \mathcal{L}$. Logo,

$$\mathbb{K}_n = [a,b] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right) = \left([a,b]^c \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k \right) \right)^c \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável.}$$

Ademais, uma vez que, $\mathbb{K} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{K}_n^c \right)^c$, conclui-se que $\mathbb{K}$ é um conjunto $\mathcal{L}$-mensurável. □

Observação 3. Quando $a = 0$, $b = 1$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$, o conjunto de Cantor obtido na construção anterior é conhecido como o conjunto **Ternário de Cantor** e será denotado por K.

Teorema 3.4. *O conjunto Ternário de Cantor tem medida de Lebesgue zero, isto é, $\ell(K) = 0$.*

Demonstração. Por construção, sabe-se que $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$. Pela Proposição 3.3, $K, K_n \in \mathcal{L}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como, $\ell(K_1) \leq \ell([0,1]) = 1$, pelo item 2 da Proposição 2.2, segue que

$$\ell(K) = \ell\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \ell(K_n). \tag{4}$$

Como $\ell(K_n) = 2^n \lambda_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, logo, $\lim_{n \to +\infty} \ell(K_n) = 0$ e, pela igualdade (4), concluímos que $\ell(K) = 0$. $\square$

Assim, o Teorema 3.4 mostra a existência de conjunto não enumerável com medida de Lebesgue nula. O próximo resultado é devido a [4] e mostra que os conjuntos de Cantor são homeomorfos.

Teorema 3.5. *Todo espaço métrico não-vazio, compacto, perfeito e completamente desconexo é homeomorfo ao conjunto Ternário de Cantor.*

Nesse sentido, é possível afirmar que todo conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue igual a zero? O próximo resultado garante que a resposta é negativa a essa questão.

Teorema 3.6. *Dado $\alpha \in (0, +\infty)$, existe conjunto de Cantor $\mathbb{K}_\alpha \subset \mathbb{R}$ tal que $\ell(\mathbb{K}_\alpha) = \alpha$.*

Demonstração. Dado $\alpha \in (0, +\infty)$, considere $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $0 < b - a - \alpha$. Considere na construção do conjunto Cantor, $\mathbb{K}_\alpha \subset [a, b]$, a sequência geométrica definida por $\alpha_n = \left(\dfrac{b-a-\alpha}{b-a+1-\alpha}\right)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que, $\ell(\mathbb{K}_1) \leq \ell([a, b]) < \infty$ e $\mathbb{K}_1 \supset \mathbb{K}_2 \supset \mathbb{K}_3 \supset \ldots \supset \mathbb{K}_m \supset \ldots$. Pelo item 2 da Proposição 2.2, segue que

$$\ell(\mathbb{K}_\alpha) = \lim_{m\to\infty} \ell(\mathbb{K}_m) = \lim_{m\to\infty} \left(|I| - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n\right) = b - a - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b-a-\alpha}{b-a+1-\alpha}\right)^n = b - a - \alpha$, conclui-se que $\ell(\mathbb{K}_\alpha) = b - a - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$. $\square$

Pela compacidade dos conjuntos de Cantor em $\mathbb{R}$, sabe-se que a medida de Lebesgue desses conjuntos é sempre finita (o conjunto é sempre limitado). Entretanto, removendo a hipótese da limitação da definição do conjunto de Cantor, seria possível encontrar um subconjunto da reta, fechado, perfeito e totalmente desconexo (tipo Cantor) com medida de Lebesgue infinita? O teorema a seguir dá uma resposta afirmativa a essa questão, e juntamente com o Corolário 3.8, contribui para um melhor entendimento a medida de Lebesgue em conjuntos ilimitados não triviais.

Teorema 3.7. *Existe subconjunto $\tilde{K} \subset \mathbb{R}$, fechado, perfeito, não enumerável, totalmente desconexo com medida de Lebesgue infinita.*

Demonstração. Dado $\alpha \in (0, 1)$, considere para cada $n \in \mathbb{Z}$, um conjunto de Cantor $\mathbb{K}^n \subset [n, n + 1]$ tal que $\ell(\mathbb{K}^n) = \alpha$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, denote $I_{1,n}, \dots, I_{m,n}, \dots \subset [n, n+1]$ os intervalos abertos removidos em cada uma das etapas da construção de $\mathbb{K}^n = [n, n+1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{k,n}$. Seja $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{k,n}$ e defina $\tilde{K} = \mathbb{R} \setminus A$. Note que $\tilde{K}$ é um conjunto fechado, pois A é aberto. Além disso, $\tilde{K} = \mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left([n, n+1] \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{k,n} \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}^n$, ou seja, é a união enumerável de conjuntos de Cantor com medida positiva α.

$\tilde{K}$ é não enumerável, pois para cada $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $\mathbb{K}^n \subset \tilde{K}$. Ademais $\tilde{K}$ tem interior vazio, pois caso contrário, existiriam $n \in \mathbb{Z}$ e um intervalo $(a, b) \subset [n, n+1] \cap \tilde{K} = \mathbb{K}^n$, $a < b$, contradição, pois $\mathbb{K}^n$ tem interior vazio. Logo, $\tilde{K}$ é totalmente desconexo.

Observe também que $\tilde{K}$ é perfeito. De fato, dado $x \in \tilde{K}$ então $x \in [n, n+1]$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Como $\tilde{K} \cap [n, n+1] = \mathbb{K}^n$ e todos os pontos de $\mathbb{K}^n$ são pontos de acumulação de $\mathbb{K}^n$ concluímos que x é ponto de acumulação de $\tilde{K}$.

Por fim, observe que $\tilde{K} \in \mathcal{L}$ e para $n, m \in \mathbb{Z}$ distintos, o conjunto $\mathbb{K}^n \cap \mathbb{K}^m$ tem no máximo um ponto (n ou $n+1$). Assim, os conjuntos $\mathbb{K}^n - \{n, n+1\}$ são dois à dois disjuntos e $\ell(\mathbb{K}^n) = \ell(\mathbb{K}^n - \{n, n+1\})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Uma vez que $\ell\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n, n+1\} \right) = 0$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\ell(\tilde{K}) &= \ell\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}^n \right) = \ell\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [(\mathbb{K}^n - \{n, n+1\}) \cup (\{n, n+1\})] \right) \\
&= \ell\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbb{K}^n - \{n, n+1\}) \right) + \ell\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n, n+1\} \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha = +\infty.
\end{aligned}
$$

□

Combinando, conjuntos Ternários de Cantor e conjuntos de Cantor com medida de Lebesgue positiva, na construção do Teorema 3.7, segue imediatamente.

Corolário 3.8. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, existe subconjunto $\tilde{K}_\alpha \subset \mathbb{R}$ fechado, ilimitado, perfeito, não-enumerável, totalmente desconexo e tal que $\ell(\tilde{K}_\alpha) = \alpha$.*

4 Conclusão

Ao estender a ideia de medida, busca-se estender também os conjuntos que poderão ser medidos, esses conjuntos podem ser não intuitivos e apresentar propriedades interessantes e produzir questionamentos e resultados esclarecedores para a teoria.

Os conjuntos apresentados, K, $\mathbb{K}_\alpha$ e $\tilde{K}$, são exemplos de conjuntos com propriedades topológicas bastante significativas. São conjuntos fechados, não-enumeráveis, todos os seus pontos são pontos de acumulação e tem interior vazio, isto é, não contém intervalos. Entretanto, cada um deles possui medida de Lebesgue distinta.

Além disso, os resultados exibidos mostram que fixado um número real positivo α, é sempre possível produzir conjuntos com tais propriedades (tanto limitado quanto ilimitado) cuja medida de Lebesgue é exatamente igual à α.

Vale destacar, que os Conjuntos de Cantor não representam apenas exemplos de conjuntos teóricos da matemática, eles podem ser observados em fenômenos da natureza e surgem constantemente em diversas aplicações de sistemas dinâmicos, por exemplo. O Teorema 3.5 mostra que esses conjuntos são homeomorfos, isto é, topologicamente os conjuntos são indistinguíveis. Entretanto, o mesmo não se pode afirmar do ponto de vista métrico, ou seja, a medida de Lebesgue de um conjunto não é um invariante topológico.

Entretanto, pode-se questionar se existe alguma correlação entre as noções métricas e topológicas desses conjuntos. Essas tipo de relação é extremamente importante, em Sistemas Dinâmicos, por exemplo, o Princípio Variacional relacionam os conceitos métricos e topológicos de um sistema. Estudos nessa direção sugerem impactos não apenas na Teoria da Medida, mas também em Topologia, em Sistemas Dinâmicos, na Teoria Fractal entre outras.

5 Agradecimentos

Agradecemos ao Centro de Formação de Professores da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia pelo suporte fornecido e aos revisores por suas valiosas considerações.

Referências

[1] Rosa Lúcia Sverzut Baroni and Sílvio César Otero-Garcia. Aspectos da história da análise matemática de cauchy a lebesgue. *Coleção PROPG Digital (UNESP)*, 2014.

[2] Robert Gardner Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley Classics Library, 1995.

[3] Rufus Bowen. A horseshoe with positive measure. *Inventiones mathematicae*, 29:203–204, 1975.

[4] Luitzen Egbertus Jan Brouwer. On the structure of perfect sets of points. *KNAW*, 12:785–794, 1909.

[5] Marco A. P. Cabral. Introdução à teoria da medida e integral de lebesgue. *Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro*, 2010.

[6] Augusto Armando de Castro Jr. *Curso de teoria da medida*. IMPA, 2004.

[7] Carlos Gustavo Moreira. *Conjuntos de Cantor, dinâmica e aritmética*. IMPA, 2002.