Algumas propriedades dos números Monodígitos e Repunidades

Eudes Antonio Costa eudes@uft.edu.br
Universidade Federal do Tocantins, Arraias, To, Brasil

Douglas Catulio dos Santos catuliodouglas@outlook.com
Colégio Estadual El Shadai - CEES, Barreiras, Ba, Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos um estudo acerca dos números formados pela repetição de apenas um dígito, chamado de monodígitos. Em particular, iremos abordar os números repunidades que são os monodígitos formados pela repetição do dígito 1. Destacamos alguns resultados relacionados à divisibilidade envolvendo repunidades e apresentamos também uma caracterização para um fator primo de um tipo de repunidade.

Palavras-chave

Divisibilidade, Monodígito, Repunidade.

1 Introdução

Um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) é denominado de *monodígito*, num sistema numérico posicional e numa base $b > 1$ fixada. Neste trabalho utilizaremos a base decimal, ou seja, $b = 10$. São exemplos de números *monodígitos* : 111, 22, 4444, 77777, 999999 e todos os números menores que 10. O termo e o conceito de *monodígito* foi usado pela primeira vez por Beiler [2, 1966], que também apresentou o termo *repunidade* (repetição da unidade) no caso em que o dígito repetido for 1. Assim $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{2022\text{ vezes}}$ são exemplos de *repunidades*.

Usaremos a notação R_n para indicar uma *repunidade* com n unidades, em que $n \geq 1$ é um número natural, isto é, $R_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ vezes}}$. De acordo com [1, 2, 3, 6, 11], para todo $n \geq 1$, temos que

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}\,. \tag{1}$$

Para os *monodígitos* de $n \geq 2$ dígitos e $a \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$ indicaremos por $a_{(n)} = \underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ vezes}}$ conforme [2, 4, 14].

A motivação para esse trabalho surgiu de questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). Apresentamos algumas dessas questões e suas resoluções na Seção 3. Na discussão ou elaboração da resolução de algumas questões lembramos de, ou nos deparamos com, um único resultado que conhecíamos, o qual refizemos na Seção 2, e assim tais problemas nos motivaram a pesquisar sobre os números *monodígitos*. Nossa experiência, e algumas referências, nos levaram à conexão entre *monodígitos* e *repunidades*, descritas na Proposição 1 e Seção 4. Por fim na Seção 5 apresentamos mais alguns resultados interessantes ou curiosos sobre *repunidades*, além daqueles apresentados e descritos em [6]. Alguns destes fatos também foram propostos em forma de problemas gerais ou casos particulares e a resolução discutida em treinamentos de estudantes para Olimpíada de Matemática.

Note que os números *monodígitos* são *palíndromos*, isto é, números que podem ser lidos tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita. Esses números são bastante conhecidos na matemática recreativa ou em problemas (questões) em olimpíadas de matemática. Para um leitor interessado nesse tema recomendamos [1, 10, 17]. Seria importante que o leitor tenha algum conhecimento de certos conceitos e propriedades de sistemas de numeração, divisibilidade e congruência; caso precise consultar [8, 9, 15].

2 Monodígitos e quadrados perfeitos

Esta seção é inspirada em [8, 14] e em outros estudos e tópicos apresentados na literatura e que relacionam *monodígitos* e quadrados perfeitos.

Dado um *monodígito* $a_{(n)}$, observe que:

$$a_{(n)} = \underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ vezes}} = a\cdot \underbrace{11\ldots 1}_{n\text{ vezes}} = a\cdot R_n\ . \tag{2}$$

Assim para $n \geq 2$ e $a \in \{2,3,\ldots,8,9\}$, a Equação (2) demonstra o seguinte resultado.

Proposição 1. *[14] Os monodígitos $a_{(n)}$ com $n \geq 2$, não repunidades, são números compostos e múltiplos de repunidades.*

Lembramos que um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = a^2$. Uma interessante propriedade, bem conhecida, sobre os *monodígitos* é o seguinte resultado.

Teorema 1. *[8, Problemas Suplementares 3.31b, 3.32b, 3.33b] Se $n \geq 2$ e $a \in \{1,2,3,\ldots,8,9\}$ então nenhum monodígito $a_{(n)}$ é um quadrado perfeito.*

Para organizar e facilitar a leitura, dividimos a demonstração do Teorema 1 em resultados auxiliares apresentados nos Lemas a seguir. As demonstrações dos dois primeiros Lemas estão apoiadas em resultados clássicos decorrentes da divisão euclidiana que podem ser encontrados em [8, 9, 15].

Lema 1. *[8] Em um quadrado perfeito o algarismo das unidades só pode ser um dos* *seguintes:* $0, 1, 4, 5, 6$ *ou* 9.

Lema 2. *[8] Todo número quadrado perfeito é da forma* $4n$ *ou* $4n + 1$.

Como consequência do Lema 2 temos que:

Lema 3. *[6] Exceto* $R_1 = 1$*, nenhum outro* R_n *é um quadrado perfeito .*

A demonstração do Lema 3 pode ser consultada em [6, 8]. Agora, apresentamos a demonstração do Teorema 1.

Demonstração. O caso $a = 1$ segue do Lema 3.

Os casos $a = 2, 3, 7$ e 8 são consequências imediatas do Lema 1 .

Nos casos em que $a = 4$ e 9, segue da Equação (2) que

$$4_{(n)} = 44 \cdots 4 = 4(11 \cdots 1) = 2^2 \cdot R_n \text{ e } 9_{(n)} = 99 \cdots 9 = 9(11 \cdots 1) = 3^2 \cdot R_n \ ,$$

assim, estes números não podem ser quadrados perfeitos, pois, caso contrário, R_n também seria, contrário ao Lema 3.

Agora o caso $a = 5$, fazendo $y = 5_{(n-2)}$ temos que

$$5_{(n)} = 55 \ldots 5 = 10^2 y + 55 = 4(25y + 13) + 3 \ ,$$

logo da forma $4n + 3$, e segue do Lema 2 que $5_{(n)}$ também não é um quadrado perfeito.

Por fim, o caso em que $a = 6$, fazendo $z = 6_{(n-2)}$ temos que

$$6_{(n)} = 66 \ldots 6 = 4(25z + 16) + 2 \ ,$$

logo da forma $4n + 2$, novamente pelo Lema 2 temos que que $6_{(n)}$ também não é um quadrado perfeito.

Do exposto concluímos que nenhum número *monodígito*, com $n > 2$ dígitos, é um *quadrado perfeito*. □

O Teorema 1 garante que nenhum *monodígito* é um quadrado perfeito, no entanto, podemos ter a diferença de dois *monodígitos* sendo um quadrado perfeito ou a adição de dois *monodígitos* acrescido de 1 também sendo um quadrado perfeito, como veremos nas questões 3 e 4 da próxima seção.

3 Problemas Motivadores

As questões apresentadas a seguir foram propostas em treinamentos de estudantes para Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Como dissemos, a resolução destes problemas nos motivaram a pesquisar sobre essas classes de números, e surpreendentemente encontramos e demonstramos resultados, alguns novos e interessantes, que apresentaremos na Seção 5. Enfatizamos que as ferramentas e propriedades utilizadas nas demonstrações das proposições são elementares, envolvendo divisibilidade e congruência essencialmente.

Questão 1. [10, BQ 2019] Sejam $A = 999\ldots 99$ o número formado por 77 dígitos iguais a 9 e $B = 777\ldots 77$ o número formado por 99 dígitos iguais a 7. Qual o número de dígitos de $A \cdot B$?

Resolução: Os números do tipo A ou B são *monodígitos*. Com a notação acima, segue da Proposição 1 que $A = 9_{(77)} = 9 \cdot R_{77}$ e $B = 7_{(99)} = 7 \cdot R_{99}$. Segue da Equação (1) que $A+1 = 10^{77}$, temos também que $B \cdot A = B \cdot (A+1) - B$. Veja que $B \cdot (A+1) = 7_{(99)} \cdot 10^{77}$ possui $176 = 99 + 77$ dígitos. Veja ainda que B é menor que $A' = 7_{(23)} \cdot 10^{77}$ que é menor que $B \cdot (A+1)$; e mais, A' possui 100 algarismos e B possui 99 algarismos. A diferença $A' - B$ ainda possui 100 algarismos, sendo primeiro algarismo da esquerda pra direita igual a $6 = 7 - 1$, pois há o deslocamento de 10^k para a posição (ordem) 10^{k-1} para $k = 1, 2, \cdots, 99$. Disto concluímos que o resultado da subtração $(A+1) \cdot B - B$ ainda terá 176 dígitos.

Questão 2. [10, BQ 2015-adaptada] Verifique que $R_{4044} = A + B^2$, em que $A = 2_{(2022)}$ e $B = 3_{(2022)}$.

Resolução: Vamos usar as Equações (1) e (2), assim $A = 2\dfrac{10^{2022}-1}{9}$ e $B = 3\dfrac{10^{2022}-1}{9}$. Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
A + B^2 &= \left(2\frac{10^{2022}-1}{9}\right) + \left(3\frac{10^{2022}-1}{9}\right)^2 \\
&= \left(2\frac{10^{2022}-1}{9}\right) + 9\left(\frac{10^{4044} - 2 \cdot 10^{2022} + 1}{81}\right) \\
&= \frac{18 \cdot 10^{2022} - 18}{81} + \frac{9 \cdot 10^{4044} - 18 \cdot 10^{2022} + 9}{81} \\
&= \frac{9 \cdot 10^{4044} - 9}{81} \\
&= \frac{10^{4044} - 1}{9} = R_{4044}\ .
\end{aligned}$$

Questão 3. [10, BQ 2015-adaptada] Verifique que $R_{4042} - 2_{(2021)}$ é um quadrado perfeito.

Resolução: Inicialmente perceba que o algarismo da unidade do número $X = R_{4042} - 2_{(2021)}$ é 9, assim pelo Teorema 1 o número X pode ser um quadrado perfeito. Novamente, vamos usar as Equações (1) e (2), assim $2_{(2021)} = 2\dfrac{10^{2021}-1}{9}$. Temos ainda que:

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{10^{4042}-1}{9}\right) - \left(2\frac{10^{2021}-1}{9}\right) \\ &= \frac{10^{4042} - 2\cdot 10^{2021} + 1}{9} \\ &= \left(\frac{10^{2021}-1}{3}\right)^2 . \end{aligned}$$

Para finalizar, vamos mostrar que $\dfrac{10^{2021}-1}{3}$ é inteiro. Para isso veja que

$$\frac{10^{2021}-1}{3} = 3\cdot\frac{10^{2021}-1}{9} = 3\cdot R_{2021} = 3_{(2021)} .$$

Portanto X é um quadrado perfeito.

Questão 4. [10, BQ 2018] Sejam $A = R_{2n}$ e $B = 4_{(n)}$, verifique que a soma $A+B+1$ é um quadrado perfeito, para qualquer inteiro positivo n.

Resolução: Observe que o algarismo da unidade do número $Y = A + B + 1$ é 6, assim pelo Teorema 1 o número Y pode ser um quadrado perfeito. Note que

$$A = R_{2n} = \underbrace{111\cdots 11}_{2n\ algarismos} = \frac{10^{2n}-1}{9} \quad \text{e}$$

$$B = 4\cdot R_n = 4\cdot(\underbrace{111\cdots 11}_{n\ algarismos}) = 4\cdot\frac{10^{n}-1}{9} ,$$

assim:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{10^{2n}-1}{9} + 4\cdot\frac{10^n-1}{9} + 1 \\ &= \frac{10^{2n} - 1 + 4\cdot 10^n - 4 + 9}{9} \\ &= \frac{10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4}{9} \\ &= \frac{(10^n+2)(10^n+2)}{9} \\ &= \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2 . \end{aligned}$$

Portanto, para todo n natural o número Y é um quadrado perfeito, e sua raiz quadrada é $\dfrac{10^n+2}{3}$. Por fim, afirmamos que $\dfrac{10^n+2}{3}$ é um número inteiro, visto que:

$$\frac{10^n+2}{3} = 3\cdot\frac{10^n+2}{9} = 3\cdot\frac{10^n-1+3}{9} == 3\cdot R_n + 1 = 3_{(n)} + 1 .$$

O leitor que se interessou por esse tema e quiser se desafiar e resolver outras questões como as apresentadas nesta seção, pode consultar o Banco de Questões ou Provas da OBMEP disponível em [10] .

4 Monodígitos e Repunidades

Na Proposição 1 vimos que os números *monodígitos* são múltiplos de *repunidades*. Assim aproveitamos a oportunidade e apresentamos parte de nosso estudo desta classe de números. A demonstração dos resultados aqui listados podem ser consultados nas referências indicadas. Um resultado bastante conhecido sobre os números *repunidades* é o teorema seguinte.

Teorema 2. *[11, 16] Se n for um número composto, R_n também será.*

Nota 1. Existe uma dificuldade computacional para determinar se um determinado número com muitos algarismos é ou não um número primo. Em particular, será difícil para um computador decidir se uma *repunidade* R_n com n grande será primo ou composto. O leitor interessado pode consultar mais sobre isso em [1, 2, 7, 12].

Seguem do Teorema 2 os seguintes resultados:

Corolário 1. *(a) [3] Se R_n for um número primo, n também será.*

(b) [3] Se n for um número par, R_n será um múltiplo de R_2.

Sabemos que um inteiro é divisível por 3 se e somente se a soma de seus dígitos é divisível por 3. Combinando esse fato com o Teorema 2 prova-se que:

Corolário 2. *(a) [3] Se n é um múltiplo de 3, então R_n também é, ademais R_3 divide R_n.*

(b) [2, 3] Para qualquer inteiro $k \geq 1$, se $n = 3^k$, n divide R_n.

(c) [13] Para quaisquer inteiros $k \geq 1$ e $q \geq 1$, se $n = 3^k$, então n divide $R_{n \cdot q}$.

Segue facilmente do Teorema 2 e Corolários acima o seguinte resultado acerca dos *monodígitos*.

Corolário 3. *Para todo $a \in \{2, 3, \cdots, 9\}$, temos*

(a) Se n for um número par, o monodígito $a_{(n)}$ será um múltiplo de R_2.

(b) Se n é um múltiplo de 3, o monodígito $a_{(n)}$ também é, ademais R_3 divide $a_{(n)}$.

(c) Para quaisquer inteiros $k \geq 1$ e $q \geq 1$, se $n = 3^k$, então n divide o monodígito $a_{(n \cdot q)}$.

Nota 2. À luz do Corolário 3, podemos listar muitas outras propriedades dos números *monodígitos* como consequência direta de resultados sobre *repunidades*, o que pode tornar a leitura enfadonha. Assim vamos nos preocupar especificamente com as *repunidades*.

5 Outras Propriedades das Repunidades

Nesta seção apresentamos outros fatos interessantes ou curiosos, alguns conhecidos na literatura, sobre os números *repunidades*, que derivam de propriedades acerca da divisibilidade. Detalhes adicionais podem ser consultados em [8, 9, 15]. Ao final desta seção exibimos uma conjectura mais geral que um resultado apresentado (Teorema 6), tal conjectura é evidenciada com alguns exemplos.

Vimos no Corolário 1 que, se n é um número par então R_2 sempre divide R_n . Outro fato curioso envolvendo R_2 é o seguinte resultado:

Proposição 2. *Para todo $n > 1$ tem-se que R_2 divide $R_{2n-1} - 1$.*

Demonstração. Segue da Equação (1) que

$$\begin{aligned} R_{2n-1} - 1 &= \frac{10^{2n-1} - 1}{9} - 1 = \frac{10^{2n-1} - 1 - 9}{9} \\ &= \frac{10(10^{2(n-1)} - 1)}{9} = 10R_{2(n-1)} \ . \end{aligned}$$

Assim, segue do Corolário 1, letra (b), que R_2 divide $R_{2(n-1)}$. Portanto R_2 também divide $R_{2n-1} - 1$. □

Exemplo 1. Considere os números $a = R_2 - 2 = 9$, $b = R_4 - 4 = 1107$ e $c = R_6 - 6 = 111105$. Como a soma dos algarismos de a, b ou c é um múltiplo de 3, então a, b e c são múltiplos de 3.

No Exemplo 1 os números a, b e c são divisíveis por 3 e têm a forma $R_{2n} - 2n$. Na forma geral, temos:

Proposição 3. *Para todos os $n \geq 1$, temos que 3 divide $R_{2n} - 2n$.*

Demonstração. (Indução em n) Segue da Equação (1) que

$$\begin{cases} R_2 &= 11 \ , \\ R_{2(n+1)} &= 100R_{2n} + R_2 \ , \ n \geq 1 \ . \end{cases} \tag{3}$$

Para $n = 1$ temos que $3|(R_2 - 2) = 9$. Assumimos que a sentença vale para algum $n \geq 1$. Então, segue da Equação (3) que

$$\begin{aligned} R_{2(n+1)} - 2(n+1) &= 100R_{2n} + 9 - 2n \\ &= 100R_{2n} - 200n + 198n + 9 \\ &= 100(R_{2n} - 2n) + 3(66n + 3) \ . \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que 3 divide $R_{2n} - 2n$, donde pela última equação segue que 3 divide $R_{2(n+1)} - 2(n+1)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Para todo m natural, seja $\varphi(m)$ a quantidade de números naturais menores ou igual a m que é relativamente primo a m, isto é, $(a, m) = 1$ para $a \leq m$, em que (a, b) é o maior divisor comum entre os números a e b. A função $\varphi(m)$ é conhecida como função de Euler . Faremos uso do resultado seguinte, e a demonstração pode ser consultada em [9].

Lema 4. *[9] (Teorema de Euler-Fermat) Sejam a, m números naturais. Se $(a,\ m) = 1$, então $a^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\ m)$.*

Seja m um número natural e a qualquer número inteiro, de modo que $(a, m) = 1$. Seja $h > 1$ o menor número natural tal que $a^h \equiv 1\ (mod\ m)$. Neste caso, dizemos que a ordem de a modulo m é h e denotamos por $ord_m(a) = h$. Precisaremos também do seguinte resultado auxiliar:

Lema 5. *[9, Lema 2.31] Se $ord_m(a) = h$, os números inteiros positivos k tais que $a^k \equiv 1\ (mod\ m)$ são precisamente aqueles para os quais $h|k$.*

Como consequência direta dos Lemas 4 e 5, temos que:

Lema 6. *Se $(a, m) = 1$ e $ord_m(a) = h$ então h divide $\varphi(m)$.*

Vinogradov [15, Problema 6.1] mostrou que, para um número inteiro $a > 1$, os divisores primos de um número inteiro $a^p - 1$ tem a forma $2px + 1$, para algum inteiro $x \geq 1$. No caso em que o número for uma *repunidade*, temos o seguinte resultado.

Teorema 3. *[15] Seja $p > 3$ um primo e R_p composto. Então um divisor primo q de R_p é da forma $2px + 1$, para $x\ \in\ \mathbb{N}$.*

Demonstração. Temos $p > 3$ primo, $R_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$ composto e q um divisor primo de R_p, veja que $q > 5$. Sendo q um divisor de R_p então existe um inteiro $x_1 > 0$ tal que $R_p = q \cdot x_1$, daí $9 \cdot R_p = 9 \cdot q \cdot x_1$ e portanto $q \mid 9 \cdot R_p$. Logo $q \mid (10^p - 1)$ donde

$$10^p \equiv 1\ (mod\ q)\ . \tag{4}$$

Como $(10, q) = 1$, temos que $10^{\varphi(q)} \equiv 1 (mod\ q)$. Seja $h = ord_q(10)$ e de acordo com o Lema 6, obtemos $h \mid \varphi(q) = q - 1$. Segue da Equação (4) e Lema 5 que h divide o primo p então $h = p$ e $q = py + 1$ para algum natural y, como q é ímpar acarreta que $y = 2x$ é par, ou seja, $q = 2px + 1$ para algum natural x. $\square$

Exemplo 2. Em [3, 12] temos que $R_7 = 1111111 = 239 \cdot 4649$, ou seja, 239 e 4649 são divisores primos de R_7. Agora, veja que $239 = 2 \cdot 7 \cdot 17 + 1$ e $46499 = 2 \cdot 7 \cdot 332 + 1$.

Do Corolário 2 deduzimos que para qualquer inteiro n múltiplo de 3, ou múltiplo de potência de 3, existirá uma infinidade de *repunidades* múltipla de n. No entanto, por definição, nenhuma *repunidade* termina com os algarismos 0,2,4,6, 8 ou 5; ou seja, nenhuma *repunidade* é múltipla de 2 ou 5. Dito isto, consideramos um número inteiro m não múltiplo de 3, com $(2, m) = 1$ e $(5, m) = 1$, o próximo resultado exibe uma *repunidade* múltipla de m. Formalmente temos

Teorema 4. *Para quaisquer inteiros $k, q, m > 1$, se $(2, m) = (5, m) = 1$ e $m \neq 3^k q$, então m divide $R_{\varphi(m)}$, sendo $\varphi(m)$ a função Euler.*

Demonstração. Seja um natural m tal que $m \neq 3^k \cdot q$, como $(2, m) = (5, m) = 1$ então $(10, m) = 1$, pois $(2, 5) = 1$. Segue do Lema 4 que $10^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$. Assim

$$9 \cdot R_{\varphi(m)} = 10^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \ (mod\, m) \ .$$

Sendo $m \neq 3^k \cdot q$ então $(m, 9) = 1$, ou seja, m divide $R_{\varphi(m)}$. □

Em Yates [16], temos que para qualquer primo $p > 5$, então p é um divisor de alguma repunidade, tal fato, segue diretamente do Teorema 4.

Corolário 4. *[16] Seja p um número primo, $p > 5$ então p divide R_{p-1}.*

Demonstração. Basta observar que $(p, 10) = 1$ e $\varphi(p) = p - 1$. □

Exemplo 3. (a) Pelo Corolário 4 temos que $11 \mid R_{10}$ pois $\varphi(11) = 10$, bem como $7 \mid R_6$.

(b) Considere $m = 77 = 7 \cdot 11$, como $\varphi(77) = (7 - 1)(11 - 1) = 60$ concluímos, pelo Teorema 4 que 77 divide R_{60}.

(c) Para $m = 2021 = 43 \cdot 47$, como $\varphi(2021) = (43 - 1)(47 - 1) = 1932$ concluímos que 2021 divide R_{1932}.

O Teorema 4 juntamente com o Corolário 2 garante o resultado seguinte:

Teorema 5. *[1, Problem 3.8] Para qualquer natural m que termine em 1, 3, 7 ou 9, existe uma repunidade que é divisível por m.*

Para finalizar, retomemos o Corolário 1 que afirma que se n é um número par então R_2 sempre divide R_n . Outro fato interessante é que uma potência de R_2 sempre divide um determinado múltiplo de R_{10}, como mostra o resultado abaixo.

Teorema 6. *Para todos os $n \geq 1$, temos que $(R_2)^n$ divide $R_{10 \cdot 11^{n-1}}$.*

Demonstração. Como $(10,\, 11^n) = 1$, segue do Lema 4 que $10^{\varphi(11^n)} \equiv 1 \ (mod\, 11^n)$. Temos $\varphi(11^n) = 10 \cdot 11^{n-1}$, assim $10^{10 \cdot 11^{n-1}} \equiv 1 \ (mod\ 11^n)$. Como $(9, 11) =$

$(9, 11^n) = 1$, segue que

$$R_{\varphi(11^n)} = \frac{10^{10\cdot 11^{n-1}} - 1}{9} \equiv 0 \; (mod\, 11^n) \; ,$$

isto é, $(R_2)^n$ divide $R_{10\cdot 11^{n-1}}$. □

Nos Exemplos a seguir também faremos uso dos próximos dois resultados.

Lema 7. *[8, 9] Seja n um número natural. Se a soma alternada (começando com sinal positivo à direita) dos algarismos de n é múltiplo de 11, então n também é múltiplo de 11.*

O resultado anterior pode ser consultado em [8, 9], e o seguinte pode ser consultado em [5].

Lema 8. *[5, Lema 7] Para quaisquer x e $q \geq 1$ naturais a seguinte igualdade ocorre*

$$\begin{aligned}(x^{2q} + x^{2q-1} + \cdots + x + 1)(x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \cdots + x^2 - x + 1)\\ = x^{4q} + x^{4q-2} + x^{4q-4} + \cdots + x^2 + 1 \; .\end{aligned}$$

Exemplo 4. Veja que $22 = 2 \cdot 11$, e

$$\begin{aligned}
R_{22} &= 10^{21} + 10^{20} + \cdots + 10^2 + 10 + 1\\
&= 10^{20}(10+1) + 10^{18}(10+1) + \cdots + 10^2(10+1) + (10+1)\\
&= 11 \cdot (10^{20} + 10^{18} + \cdots + 10^2 + 1)\\
&\overset{\text{Lema 8}}{=} 11 \cdot (10^{10} + 10^9 + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^{10} - 10^9 + \cdots + 10^2 - 10 + 1)\\
&= 11 \cdot R_{11} \cdot [10^9(10-1) + 10^7(10-1) + \cdots + 10^1(10-1) + 1]\\
&= 11 \cdot R_{11} \cdot 9090909091 \; .
\end{aligned}$$

Conforme Lema 7 a soma alternada dos algarismos do fator $x = 9090909091$ é $-44 = 5(-9) + 1$, ou seja, múltiplo de 11, então x também é múltiplo de 11, e por conseguinte 11^2 é divisor de $R_{22} = R_{11\cdot 2}$.

Exemplo 5. Veja que $110 = 10 \cdot 11$. Como no Exemplo 4, e fazendo uso do Lema 8, temos que

$$\begin{aligned}
R_{110} &= 10^{109} + 10^{108} + 10^{107} + 10^{106} + \cdots + 10^3 + 10^2 + 10 + 1\\
&= 10^{108}(10+1) + 10^{106}(10+1) + \cdots + 10^2(10+1) + (10+1)\\
&= 11 \cdot (10^{108} + 10^{106} + \cdots + 10^2 + 1)\\
&\overset{\text{Lema 8}}{=} 11 \cdot (10^{54} + \cdots + 10 + 1) \cdot (10^{54} - 10^{53} + \cdots + 10^2 - 10 + 1)\\
&= 11 \cdot R_{55} \cdot (\underbrace{9090 \cdots 90}_{26\ vezes}91) \; .
\end{aligned}$$

Conforme Lema 7 a soma alternada dos algarismos do fator $y = \underbrace{9090\cdots 90}_{26\ vezes}91$ é $-242 = 27(-9)+1$ e $-242 = 11\cdot(-22)$, ou seja, múltiplo de 11, então y também é múltiplo de 11, e por conseguinte 11^2 é divisor de $R_{110} = R_{11\cdot 10}$.

Motivados pelo Teorema 6 e exemplos anteriores, conjecturamos que:

Problema 1. Para todo $n \geq 1$, então $(R_2)^n$ divide $R_{2\cdot q\cdot 11^{n-1}}$, com q natural.

A Conjectura proposta no Problema 1 traz a dificuldade equivalente àquela de mostrar que

$$\frac{10^{18q11^{k-1}} + 10^{16q11^{k-1}} + \cdots + 10^{2q11^{k-1}} + 1}{10^{2q11^{k-1}} - 1}$$

é um número inteiro para todo q inteiro.

6 Considerações

Neste trabalho lembramos alguns resultados acerca dos números *monodígitos*, em especial as *repunidades*. Mostramos várias propriedades aritméticas desta classe de números, por exemplo: se p for qualquer outro primo diferente de 2 ou 5, então p divide infinitos números *repunidades* (Corolário 4), se n é um número par então R_2 sempre divide R_n (o Corolário 1), para todo natural $k \geq 1$ existem infinitas *repunidades* múltiplas de 3^k (Corolário 2) dentre outros. Exibimos alguns resultados obtidos em nosso estudo (pesquisa) ou em problemas/desafios nos treinamentos/oficinas com estudantes, como o Teorema 4, que exibe um múltiplo *repunidade* do número m não par e múltiplo de 5; um desses desafios/problemas ainda não finalizamos a demonstração (Problema 1), temos apenas argumentos (contas) para casos particulares. Esperamos que esses resultados fomentem motivação adicional para outros estudos sobre esta classe de números.

Referências

[1] Titu Andreescu and Razvan Gelca. *Mathematical olympiad challenges*. Springer Science & Business Media, 2008.

[2] Albert H Beiler. *Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains*. Courier Corporation, 1964.

[3] Fernando Soares de Carvalho and Eudes Antonio Costa. Escrever o número 111... 111 como produto de dois números. *Revista do Professor de Matemática*, -(87):15–19, 2015.

[4] Fernando Soares de Carvalho and Eudes Antonio Costa. Números quasemonodígitos primos ou quadrados perfeitos. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, -(aceito), 2022.

[5] Eudes Antonio Costa and Grieg Antonio Costa. Existem números primos na forma 101... 101. *Revista do Professor de Matemática*, -(103):21–22, 2021.

[6] Eudes Antonio Costa and Douglas Catulio dos Santos. Números repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. *Professor de Matemática Online*, 8(4):495–503, 2020.

[7] Harvey Dubner. Repunit r49081 is a probable prime. *Mathematics of computation*, 71(238):833–835, 2002.

[8] Abramo Hefez. *Aritmética, Coleção PROFMAT, 1a edição*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[9] Ivan Niven, Herbert S Zuckerman, and Hugh L Montgomery. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, 1991.

[10] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP. *Banco de Questões*. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em 16 de Fev de 2022.

[11] Paulo Ribenboim. *The little book of bigger primes*. Springer Science & Business Media, 2004.

[12] William M. Snyder. Factoring repunits. *The American Mathematical Monthly*, 89(7):462–466, 1982.

[13] Boris V Tarasov. The concrete theory of numbers: initial numbers and wonderful properties of numbers repunit. *arXiv preprint arXiv:0704.0875*, 2007.

[14] Charles W Trigg. *Infinite sequences of palindromic triangular numbers*. Fibonacci Association, 1974.

[15] Ivan Matveevich Vinogradov. *An introduction to the theory of numbers*. Pergamon press, 1955.

[16] Samuel Yates. The mystique of repunits. *Mathematics Magazine*, 51(1):22–28, 1978.

[17] Paul Zeitz. *Art Craft Problem Solving*. John Wiley New York publisher, 1999.