
Demonstrações dos Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues no Plano de Argand-Gauss

Breno Arcanjo Fernandes da Cruz

breno.cruz@hotmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Gil Fidelix de Souza

gilsouza@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Geraldo César Gonçalves Ferreira

geraldocesar@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Neste trabalho fazemos uso da boa estrutura do conjunto dos números complexos, essencialmente de sua geometria, para promover o estudo de objetos e a obtenção de resultados da Geometria Plana. A boa estrutura do conjunto dos números complexos permite o estudo de resultados clássicos, por exemplo, os Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues. O primeiro Teorema estabelece condições necessárias e suficientes para que três cevianas sejam concorrentes, o segundo estabelece condições de colinearidade para um conjunto de pontos, ou para a concorrência de um conjunto de segmentos e o terceiro refere-se a triângulos projetivos e pode ser visto como uma consequência do primeiro resultado.

Palavras-chave

Números complexos; Geometria Plana; Ceva; Menelaus; Desargues.

1 Introdução

O conjunto dos números complexos surgiu no século XVI como ferramenta para a resolução de determinados tipos de equações, e com o passar dos anos se modernizou com a contribuição de importantes matemáticos. Essas contribuições colaboraram para que a boa estrutura dos números complexos fosse utilizada nos mais diversos ramos da Ciência e da Matemática, por exemplo, como no estudo de ondas e oscilações, na Física Quântica, nas Engenharias Mecânica, Civil, Elétrica e Aeroespacial. É justamente a vasta aplicabilidade deste conjunto que justifica a importância de se conhecê-lo.

Constantemente os números complexos são abordados de forma simplesmente algébrica, o que contribui para a falta de contextualização com outros temas da Matemática. A proposta do presente trabalho é mostrar a utilidade da estrutura do conjunto dos números complexos para manuseio e a obtenção de resultados da Geometria Plana do ensino básico.

O sentido geométrico dos números complexos como um vetor ou um ponto do plano cartesiano fornece valores revelantes para resultados de problemas geométricos como a multiplicação de números complexos que, de maneira geral, é uma composição de rotações e homotetias. É exatamente por este motivo que, neste trabalho, os números complexos foram escolhidos para resolver problemas e provar teoremas da Geometria Plana: a multiplicação de números complexos possibilita tratar de rotações de forma mais conveniente, quando comparado ao tratamento via produto escalar.

O estudo apresentado divide-se em duas partes, a seção 2 dedica-se à um resumo histórico cobrindo o surgimento dos números complexos no século XV, bem como o seu desenvolvimento nos quatro séculos seguintes. A seção 3 é voltada à aplicação da estrutura do conjunto dos números complexos na demonstração de teoremas clássicos da geometria plana, a saber: os Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues.

2 O surgimento dos números complexos

O surgimento dos números complexos se deu naturalmente, assim como aconteceu com os demais conjuntos numéricos. A presente seção foi obtida pela síntese de diversas publicações [1], [2], [3], [4], [5] e [7] e tem o intuito de apresentar um panorama histórico sobre o advento do conjunto dos números complexos.

2.1 Os números complexos na matemática dos séculos XV a XVI

Os números complexos surgiram no início do século XVI, com o matemático Scipione Del Ferro (1465 - 1526) que supostamente descobriu a solução de equações do 3º grau do tipo $x^3 + px = q$. Del Ferro, porém, morreu antes de publicar seus resultados tendo exposto os cálculos para alguns de seus alunos, entre eles Antônio Maria Fior.

Ainda na primeira metade do século XVI Fior desafia Tartaglia (1499 - 1557), matemático italiano, a solucionar a equação de 3º grau $x^3 + px = q$, que supostamente Del Ferro lhe confidenciou. Já em 1535, Tartaglia resolve o problema das cúbicas $x^3 + px = q$, e ainda, encontra uma solução geral para qualquer equação da forma $x^3 + px = q$.

Girolamo Cardano foi um físico, astrólogo, médico e matemático italiano, que viveu entre os anos de 1501 e 1576. Ele teve conhecimento do desafio proposto por Fior, que Tartaglia resolveu. Cardano insistiu para que Tartaglia o revelasse a solução das cúbicas do tipo $x^3 + px^2 = q$, prometendo-o que publicaria em seu livro a demonstração, dando a ele o mérito da descoberta. Contudo, Tartaglia relutou, pois pretendia publicar a demonstração em seu próprio livro. Ainda assim, Cardano convenceu Tartaglia a revelar a solução das cúbicas e em 1545 a publicou no livro "Ars Magna", sem os méritos prometidos.

Apesar de ter publicado a solução das cúbicas estudadas por Del Ferro e Tartaglia, Cardano não compreendia as operações que envolviam raízes quadradas de números negativos e, portanto, não prosseguiu com os estudos. Foi o matemático e engenheiro hidráulico italiano Rafael Bombelli (1526 - 1572) que aceitou a existência de números imaginários retomando os estudos sobre as equações do 3º grau, apresentando em seu livro *L'Algebra* (1572) as regras operatórias com raízes de números negativos. Foram esses estudos que abriram precedência para que outros matemáticos continuassem desenvolvendo a estrutura desse novo conjunto numérico.

2.2 Os números complexos na matemática dos séculos XVII a XIX

Nesse período os matemáticos Harriot, Girard e Descartes contribuíram de maneira significativa para a construção da estrutura dos números complexos. Thomas Harriot (1560-1621) introduziu a linguagem simbólica dando destaque aos números negativos, apesar de não admiti-los como raízes de equações. Foi ele, também, que ajudou a estabelecer o número de soluções positivas para equações de terceiro e quarto graus, por meio de suas equações canônicas. Albert Girard (1595-1632), além de dar relevância aos números negativos e admiti-los como raízes de equações, foi o primeiro a associar o número do maior grau de uma equação ao seu número de soluções, em seu livro "Invention nouvelle em l'algèbre", publicado em 1629. Já René Descartes (1596-1650) revolucionou o estudo dos números complexos, interpretando geometricamente termos aritméticos, como explicita em seu livro "*Géométrie (1637)*"(traduzido em [3]):

"Ou finalmente, encontrar uma, duas, ou várias médias proporcionais entre a unidade e uma outra linha (o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, raiz cúbica, etc. da linha dada). E eu não devo hesitar em introduzir estes termos aritméticos na geometria, por razões de maior clareza."

Até então o estudo da aritmética e geometria eram independentes, o que começa a mudar quando Descartes representa geometricamente os números negativos, permitindo maior clareza no que tange a compreensão das raízes quadradas de números negativos, denominadas por ele como números "imaginários": "*Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) são reais. Às vezes elas são imaginárias*". Para Descartes a denominação "imaginário" não significava que os números não eram reais, mas que eles precisavam ser imaginados.

Gaspar Wessel (1745 -1818) foi quem representou geometricamente os números complexos na forma $x + yi$, fazendo uma correspondência entre estes e os pontos do plano. Tal correspondência, porém, só foi publicada em 1806 por Jean Argand

(1768-1822).

A inserção de técnicas mais avançadas para operações entre os números complexos, relacionando-os à trigonometria, foi desenvolvido por Abraham de Moivre (1667-1754).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentou em sua tese de doutorado (1798) a demonstração de que qualquer equação algébrica de grau n , com $n > 0$ e coeficientes complexos, possui, no mínimo, uma raiz complexa. Com tal demonstração Gauss solucionou os problemas de equações algébricas, dando origem ao conhecido “Teorema Fundamental da Álgebra”.

As ideias trabalhadas por Argand foram retomadas por Gauss em 1831, quando ele trabalhou com os números da forma $x + yi$ como coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Em 1832, Gauss deu origem a expressão números complexos. O plano cartesiano em que são apresentados os números complexos é nomeado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss.

Por fim, o matemático William Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou, em 1833, a operação de multiplicação dos números complexos na forma que é conhecida nos dias atuais.

2.3 As equações cúbicas

Nesta subseção apresentaremos os métodos de resolução das equações cúbicas publicados por Cardano e Bombelli ao longo do século XVI. A ideia é mostrar, utilizando a simbologia atual, o que foi o problema de solucionar equações cúbicas que tornou inevitável reconhecer os números negativos e suas raízes como números válidos na matemática.

Em seu livro, “Ars Magna” (1545), Cardano publica a solução para qualquer equação cúbica da forma $x^3 + px^2 = q$. Além disso, exibe um método para transformar uma equação cúbica do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ em outra sem o termo de grau dois. Fazendo a simples substituição $x = y - \frac{a}{3}$, obtém-se coeficientes arbitrários onde o termo x^2 fica inexistente. Com essa nova variável, a equação assume a forma $y^3 + py = q$, que é tratada como a forma reduzida da equação cúbica.

O método proposto por Cardano para realizar tal redução é:

Seja $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, fazendo $x = y - \frac{a}{3}$, após manipulações, obtemos

$$y^3 + py = q,$$

em que $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = -\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$.

Cardano apresentou 13 tipos distintos de equações cúbicas, que dependiam da posição dos termos quadrático, linear e independente. Hoje, porém, as equações do 3º grau são consideradas como sendo basicamente todas de um mesmo tipo que podem ser solucionadas por um mesmo método.

Utilizando a simbologia atual, a seguir será exibida a regra publicada por Cardano para a resolução de equações polinomiais do 3º grau da forma $y^3 + py = q$, com $p > 0$ e $q > 0$.

Considerando $y = u - v$, e a identidade

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3,$$

teremos

$$p = 3uv \text{ ou } uv = \frac{p}{3}$$

e

$$u^3 - v^3 = q. \tag{1}$$

Resultando em

$$4u^3v^3 = \frac{4p^3}{27} \text{ e } u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = q^2.$$

A soma membro a membro das duas últimas expressões fornecem

$$u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \Rightarrow (u^3 + v^3)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27},$$

ou seja

$$u^3 + v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \tag{2}$$

Logo, somando as equações (1) e (2), obtemos:

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ ou } u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e analogamente

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Logo a solução da cúbica é

$$y = u - v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Algumas das equações cúbicas estudadas por Cardano resultavam em duas raízes quadradas de números negativos quando a expressão $q^2/4 + p^3/27$ era negativa. Ao se deparar com tais equações, apesar de em alguns casos Cardano saber que existia uma raiz válida para a equação, muitas vezes era necessário manipular raízes quadradas de números negativos, que, até então, não eram consideradas números, como é o caso da equação $x^3 = 15x + 4$. Usando a fórmula das cúbicas nessa equação obtemos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

portanto, a equação não poderia ser resolvida. Contudo, ainda assim, através do método de tentativa e erro, foi possível descobrir que $x = 4$ era uma raiz legítima da equação.

Assim como Cardano, pelo mesmo método de tentativa e erro, Bombelli sabia que existiam soluções verdadeiras para equações da forma $x^3 = 15x + 4$, onde $x = 4$ era solução. A partir desse momento passou a admitir as raízes quadradas de números negativos como números válidos na matemática, e definiu regras operatórias para $\sqrt{-1}$, como mostra em seu livro *L'Algebra*(1572)

Regras criadas por Bombelli

- Più via più di meno, fà più di meno*
- Meno via più di meno, fà meno di meno*
- Meno via meno di meno, fà più di meno*
- Più di meno via più di meno, fà meno*
- Più di meno via meno di meno, fà più*
- Meno di meno via più di meno, fà più*
- Meno di meno via meno di meno, fà meno*

Simbologia atual

- $+(+i) = +i$
- $-(+i) = -i$
- $-(-i) = +i$
- $(+i)(+i) = -1$
- $(+i)(-i) = +1$
- $(-i)(+i) = +1$
- $(-i)(-i) = -1$

Para ajudar na compreensão dos termos entre as duas colunas do quadro acima. o quadro abaixo traz a tradução de alguns termos em italiano que aparecem nas regras acima.

Palavra/Termo

- Più*
- Meno*
- Più di meno*
- Meno di meno*
- Via*
- Fà*

Tradução/Significado

- unidade real com sinal positivo, $+1$
- unidade real com sinal negativo, -1
- unidade imaginária com sinal positivo, $+i$
- unidade imaginária com sinal negativo, $-i$
- significa a operação de multiplicação, “.”
- significa uma igualdade, “=”

Desta maneira, Bombelli define $\sqrt{-1} = i$, que no quadro acima tomamos a liberdade de chamar de unidade imaginária. Tal definição dá continuidade à solução de

equações do tipo $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, até então tidas como irredutíveis, apresentando a seguinte solução:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Pondo $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$, obtemos

$$2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3 = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$$

De modo que $a(a^2 - 3b^2) = 2$ e $b(3a^2 - b^2) = 11$. Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que a deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição garante que y tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções $a = 2$ e $b = 1$ atendem ambas ao mesmo tempo, obtemos as igualdades:

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3 \text{ e } 2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

Conseguimos constatar que uma das soluções para a equação cúbica $x^3 + 15x = 4$ é dada por:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4, \text{ como já havia sido constatado pelo método de tentativa e erro.}$$

3 Os teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues

Desenvolvendo ideias apresentadas por [6] e [8] como aplicação das teorias gerais apresentadas a seguir, nesta seção serão provados os teoremas de **Menelaus** e **Ceva**, e, por consequência, o teorema de **Desargues**. Tais teoremas são comumente demonstrados por meio da geometria clássica, entretanto, o conjunto dos números complexos proporciona uma demonstração alternativa bem interessante.

3.1 Equações paramétricas de uma reta dados dois números complexos

Consideramos o conjunto complexo \mathbb{C} com as operações usuais de soma e multiplicação e adotaremos a álgebra vetorial de \mathbb{R}^2 no desenvolvimento de nossas ferramentas para as demonstrações dos Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues. Por esta razão, sempre que necessário, identificaremos o número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, no plano de Argand-Gauss, ora como ponto z de coordenadas $z = (a, b)$, ora como o vetor $z = (a, b)$. Segue da Álgebra Vetorial de \mathbb{R}^2 que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{z_1 z_2}$ são dadas por $z_2 - z_1$. O resultado a seguir estabelece equações paramétricas de uma reta r

passando por z_1 e z_2 e estabelece uma condição para a colinearidade de três complexos z, z_1, z_2 .

Proposição 1. *Seja r a reta por z_1 e z_2 , então qualquer $z \in r$ pode ser representado por:*

$$z = \frac{1}{1+t}z_1 + \frac{t}{1+t}z_2 = \frac{z_1 + tz_2}{1+t}, t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \tag{3}$$

Além disso,

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

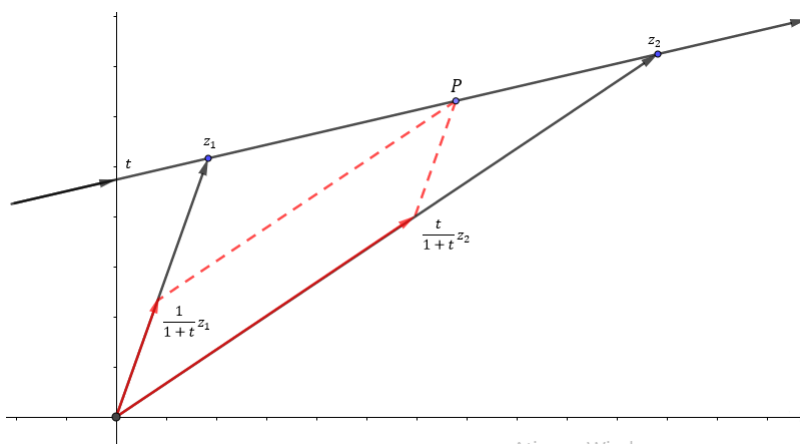


Figura 1: Parametrização da reta que contém os complexos z_1 e z_2 .

Demonstração. Seja P representado pelo complexo z , se $z, z_1, z_2 \in r$, então os vetores $\vec{zz_1}$ e $\vec{z_2z}$ são paralelos, logo existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $z - z_1 = t(z_2 - z)$ concluindo (4), por outro lado

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z} = t, \text{ com } t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Isolando z em (5) obtemos como resultado a equação (3). □

O fato que $z_1 \neq z_2$ exclui a possibilidade $t = -1$ em (5). Para $t = 0$, z coincide com z_1 , e se $t \rightarrow \infty$, $z \rightarrow z_2$. Valores positivos de t ocorrem entre z_1 e z_2 , enquanto os valores negativos de t ocorrem para pontos fora do segmento $\overline{z_1z_2}$. O ponto de r no infinito é caracterizado pelo valor do parâmetro $t \rightarrow -1$. Sendo o domínio o conjunto dos valores de $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

A equação (5) nos mostra que as medidas dos segmentos orientados zz_1 e z_2z estão na proporção de t para 1. Além disso, tendo dois vetores quaisquer $\vec{z_Az_B}$ e $\vec{z_Cz_D}$,

a equação (5) nos induz a definir a “razão”

$$\frac{\overrightarrow{z_A z_B}}{\overrightarrow{z_C z_D}} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}$$

dentro do conjunto dos números complexos. Observemos que se os complexos z_A, z_B, z_C e z_D pertencem à mesma reta, então a razão definida anteriormente será um número real que expressa uma razão de proporcionalidade entre os segmentos orientados AB e CD .

Logo, dados z_1, z_2 e z_3 colineares, com z_3 entre z_1 e z_2 , t é determinado pela equação

$$-t = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \text{ com } t > 0 \tag{6}$$

e, portanto, os vetores $\overrightarrow{z_1 z_3}$ e $\overrightarrow{z_2 z_3}$ possuem a mesma direção. Como a razão anterior é um número real, tomando o conjugado da razão segue que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_3 - z_2}}.$$

Da igualdade anterior, é possível obter um critério de colinearidade dos pontos z_1, z_2 e z_3 de uma forma mais simétrica

$$(z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2) + (z_2 \overline{z_3} - \overline{z_2} z_3) + (\overline{z_1} z_3 - z_1 \overline{z_3}) = 0$$

ou, ainda, na forma de um determinante, em que o critério de colinearidade é similar ao mesmo critério no conjunto dos números reais, e se torna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3} \end{vmatrix} = 0.$$

3.2 Ponto de intersecção de duas ou três retas

Sejam r e s as retas que contém os complexos z_1, z_2 e z_3, z_4 , respectivamente. Pela equação (3) cada reta é dada por:

$$r : z_r = \frac{z_1 + uz_2}{1 + u} \quad e \quad s : z_s = \frac{z_3 + vz_4}{1 + v}.$$

Para determinar o ponto de intersecção, igualamos as expressões z_r e z_s

$$\frac{z_1 + uz_2}{1 + u} = \frac{z_3 + vz_4}{1 + v}$$

isto é,

$$(1 + v)(z_1 + uz_2) = (1 + u)(z_3 + vz_4).$$

Tomando o conjugado na última igualdade, é fácil ver, que a equação a seguir é válida:

$$(1 + v)(\bar{z}_1 + u\bar{z}_2) = (1 + u)(\bar{z}_3 + v\bar{z}_4). \quad (7)$$

Pela equação (6), os parâmetros u e v no ponto de intersecção são:

$$-u = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{com } u > 0 \quad \text{e} \quad -v = \frac{z - z_3}{z - z_4}, \quad \text{com } v > 0,$$

em que z representa o ponto de intersecção das retas r e s , ou seja, quando $z = z_r = z_s$

Substituindo os parâmetros u e v na equação (7), teremos

$$\left[1 - \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} \right) \right] \left[\bar{z}_1 - \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \bar{z}_2 \right] = \left[1 - \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \right] \left[\bar{z}_3 - \left(\frac{z - z_3}{z - z_4} \right) \bar{z}_4 \right],$$

isolando z na equação acima obtemos

$$z = \frac{(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_3 - z_4) - (z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4)}. \quad (8)$$

Se os vetores $z_1 - z_2$ e $z_3 - z_4$ são paralelos, o denominador será zero, pois teríamos

$$z_1 - z_2 = t(z_3 - z_4) \quad \text{e} \quad \bar{z}_1 - \bar{z}_2 = t(\bar{z}_3 - \bar{z}_4).$$

Destas duas últimas equações concluímos que

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_3 - z_4) = 0$$

e pelo critério de paralelismo a interseção acontece em $z = \infty$, como era esperado.

De forma análoga, se cortarmos a reta que contém os vetores $z_1 - z_2$ por uma terceira que contém $z_5 - z_6$ criamos um segundo ponto de intersecção, cujo lugar geométrico é dado por

$$z' = \frac{(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_1 - z_2)}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_5 - \bar{z}_6) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_5 - z_6)}. \quad (9)$$

Consequentemente, cortando a reta que contém $z_3 - z_4$ pela reta que contém o vetor $z_5 - z_6$ criamos um terceiro ponto de intersecção, cujo lugar geométrico é dado por

$$z'' = \frac{(z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_3 - z_4)}{(z_3 - z_4)(\bar{z}_5 - \bar{z}_6) - (\bar{z}_3 - \bar{z}_4)(z_5 - z_6)}. \quad (10)$$

Se as três retas concorrem em um único ponto, as expressões (8), (9) e (10), para os pontos de interseção, devem ser iguais, ou seja, $z = z' = z''$.

Igualando quaisquer duas equações, a solução para a concorrência de três retas pode ser representada pela forma simétrica do determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1 - z_2 & z_3 - z_4 & z_5 - z_6 \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & \bar{z}_3 - \bar{z}_4 & \bar{z}_5 - \bar{z}_6 \\ z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 & z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4 & z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Podemos verificar essa fórmula colocando a origem no ponto comum de interseção. Dessa maneira, as expressões (8), (9) e (10) se reduzirão a

$$z = (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_3 - z_4) - (z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_1 - z_2) = 0;$$

$$z' = (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_1 - z_2) = 0;$$

$$z'' = (z_3\bar{z}_4 - \bar{z}_3z_4)(z_5 - z_6) - (z_5\bar{z}_6 - \bar{z}_5z_6)(z_3 - z_4) = 0;$$

respectivamente.

3.3 Algumas definições auxiliares

Antes da apresentação dos três teoremas principais, será necessário a introdução outras definições que serão apresentadas a seguir e utilizadas no decorrer do texto, auxiliando na compreensão dos teoremas de Menelaus, Ceva e Desargues.

O menor **ângulo** formado pelos vetores $\overrightarrow{z_1z_2}$ e $\overrightarrow{z_1z_3}$, como ilustra a figura 2 abaixo será denotado por $z_2\hat{z}_1z_3$.

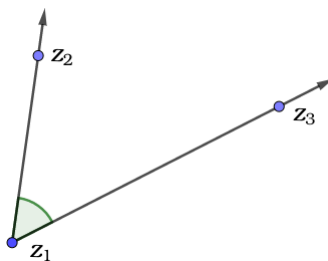


Figura 2: Ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{z_1z_2}$ e $\overrightarrow{z_1z_3}$.

Dados dois pontos A e B , utilizaremos a notação AB para o **segmento orientado** determinado pelos pontos A e B , já o símbolo \overline{AB} é utilizado para o **comprimento do segmento** (orientado) AB que é considerado positivo ou negativo se A está à esquerda ou à direita de B em alguma orientação fixa da reta.

Denominaremos a **reta suporte** r de um determinado segmento AB como a reta que contém tal segmento, como ilustrado na figura 3. Denotaremos por \overleftrightarrow{AB} , a reta suporte do segmento AB .



Figura 3: Reta suporte do segmento \overline{AB} .

As **Cevianas** de um triângulo são os segmentos de reta que ligam o vértice do triângulo à reta suporte de seu lado oposto. Desse modo medianas, alturas e bissetrizes são casos especiais. O nome surgiu em homenagem ao engenheiro italiano Giovanni Ceva, que formulou o **Teorema de Ceva**. Tal teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes em um único ponto.

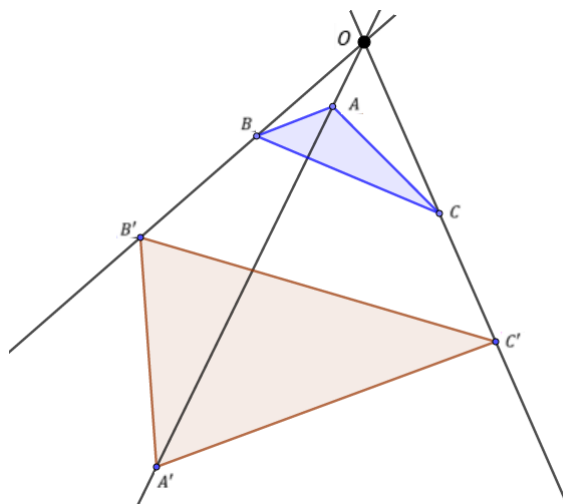


Figura 4: Triângulos em perspectiva

Dizemos que dois triângulos estão **em perspectiva em relação a um ponto** O se as retas que unem os vértices correspondentes concorrem em O . Como ilustrado na figura 4.

3.4 O Teorema de Menelaus

Teorema 1. *Seja ABC um triângulo e P, Q e R pontos sobre as retas suportes dos segmentos orientados BC, CA e AB , respectivamente, todos distintos dos vértices de ABC . Então:*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1$$

se, e só se, os pontos P, Q e R forem colineares.

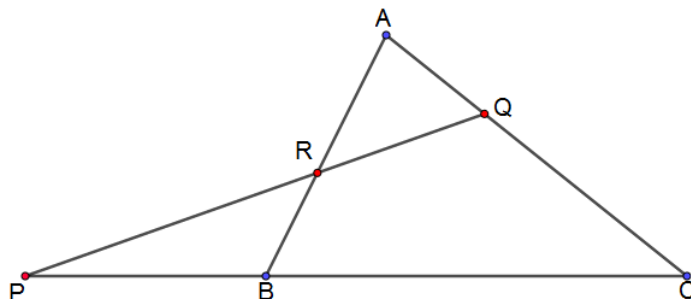


Figura 5: Representação geométrica do Teorema de Menelaus.

Demonstração. Sejam os vértices A, B e C do triângulo iguais a z_A, z_B e z_C , respectivamente. E os pontos P, Q e R sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB , nessa ordem, iguais a z_P, z_Q e z_R . Então, pela equação (3), temos a existência de números

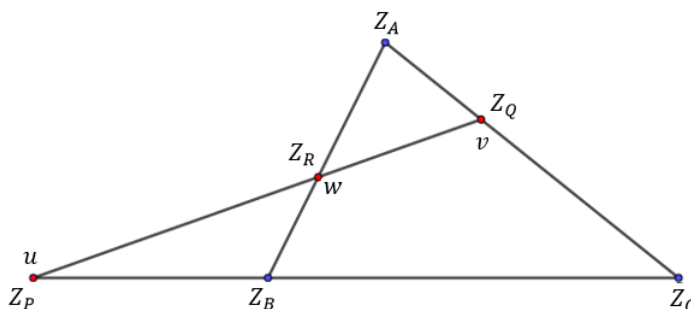


Figura 6: Representação geométrica do Teorema de Menelaus no conjunto dos números complexos.

reais u, v e w tais que:

$$z_P = \frac{z_B + uz_C}{1 + u}, \quad z_Q = \frac{z_C + vz_A}{1 + v}, \quad z_R = \frac{z_A + wz_B}{1 + w},$$

ou seja

$$u = \frac{z_P - z_B}{z_C - z_P}, \quad v = \frac{z_Q - z_C}{z_A - z_Q}, \quad w = \frac{z_R - z_A}{z_B - z_R}$$

De modo que

$$\frac{\overrightarrow{z_B z_P}}{\overrightarrow{z_P z_C}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_C z_Q}}{\overrightarrow{z_Q z_A}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_A z_R}}{\overrightarrow{z_R z_B}} = \frac{z_P - z_B}{z_C - z_P} \cdot \frac{z_Q - z_C}{z_A - z_Q} \cdot \frac{z_R - z_A}{z_B - z_R} = uww$$

e o **teorema de Menelaus** pode ser escrito como:

$$uww = -1 \text{ se, e somente se, os pontos } z_P, z_Q \text{ e } z_R \text{ forem colineares.}$$

Portanto, basta provar que z_P, z_Q e z_R pertencem a mesma reta, quando $uvw = -1$. Para isso, verificaremos que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \bar{z}_P & \bar{z}_Q & \bar{z}_R \end{vmatrix}$$

é igual a zero se, e somente se, $uvw = -1$, o que será feito por operações elementares por colunas na matriz anterior.

De fato, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_P & z_Q & z_R \\ \bar{z}_P & \bar{z}_Q & \bar{z}_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{z_B + uz_C}{1+u} & \frac{z_C + vz_A}{1+v} & \frac{z_A + wz_B}{1+w} \\ \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1+u} & \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1+v} & \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1+w} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira, segunda e terceira coluna por $(1+u)$, $(1+v)$ e $(1+w)$, respectivamente, obtemos:

$$= \frac{1}{(1+u)} \cdot \frac{1}{1+v} \cdot \frac{1}{1+w} \begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix}.$$

Portanto, basta mostrar que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1+u & 1+v & 1+w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix}$$

é nulo, quando $uvw = -1$

De fato, substituindo a primeira coluna da matriz anterior por $\tilde{C}_1 = C_1 - u.C_2 + uv.C_3$, sendo C_1, C_2 e C_3 correspondentes à primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente, obtemos

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1+u \\ z_B + uz_C \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C \end{bmatrix} - u \begin{bmatrix} 1+v \\ z_C + vz_A \\ \bar{z}_C + v\bar{z}_A \end{bmatrix} + uv \begin{bmatrix} 1+w \\ z_A + wz_B \\ \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} u - u - uv + uv + uvw + 1 \\ uz_C - uz_C - uvz_A + uvz_A + uvwz_B + z_B \\ u\bar{z}_C - u\bar{z}_C - uv\bar{z}_A + uv\bar{z}_A + uvw\bar{z}_B + \bar{z}_B \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} uvw + 1 \\ (uvw + 1)z_B \\ (uvw + 1)z_B \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Desta forma, teremos:

$$\begin{vmatrix} uvw + 1 & 1 + v & 1 + w \\ (uvw + 1)z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ (uvw + 1)z_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix}$$

Logo, os complexos z_P , z_Q e z_R são colineares, quando $uvw = -1$.

Para a recíproca, devemos verificar que se

$$\begin{vmatrix} 1 + u & 1 + v & 1 + w \\ z_B + uz_C & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B + u\bar{z}_C & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = 0$$

então $uvw = -1$. De fato, sejam C_1 , C_2 e C_3 , a primeira, segunda e terceira colunas da matriz anterior, respectivamente. Substituindo a primeira coluna da matriz por $\tilde{C}_1 = C_1 - u.C_2 + uv.C_3$, obtemos

$$\begin{vmatrix} uvw + 1 & 1 + v & 1 + w \\ uvwz_B + z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ uvw\bar{z}_B + \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 + w \\ z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = 0$$

substituindo a terceira coluna da matriz anterior por $C_3 = -wC_1 + C_3$ teremos

$$(uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 + w \\ z_B & z_C + vz_A & z_A + wz_B \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A + w\bar{z}_B \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 \\ z_B & z_C + vz_A & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, realizando as operações elementares por colunas na segunda coluna $\tilde{C}_2 = -vC_3 + C_2$, obtemos

$$(uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 + v & 1 \\ z_B & z_C + vz_A & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C + v\bar{z}_A & \bar{z}_A \end{vmatrix} = (uvw + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_C & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0$$

Como z_A , z_B , z_C são vértices do triângulo, concluímos que $uvw + 1 = 0$ e, portanto, $uvw = -1$. □

3.5 O Teorema de Ceva

Teorema 2. *Dado um triângulo ABC e pontos P, Q e R situados respectivamente sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB , temos que*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1$$

se, e só se, as retas que contém os segmentos AP, BQ e CR forem concorrentes em um único ponto.

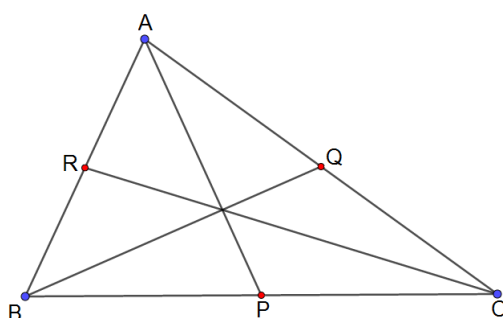


Figura 7: Representação geométrica do Teorema de Ceva.

Demonstração. Sejam os vértices A, B e C do triângulo iguais a z_A, z_B e z_C , respectivamente. E os pontos P, Q e R sobre as retas suportes dos lados BC, CA e AB , nessa ordem, iguais a z_P, z_Q e z_R .

De modo análogo à demonstração do **teorema de Menelaus**, segue das expressões

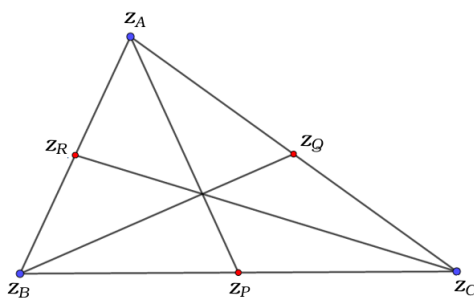


Figura 8: Representação geométrica do Teorema de Ceva no plano complexo.

paramétricas de z_P, z_Q e z_R que o **teorema de Ceva** pode ser reescrito como:

Os parâmetros u, v e w satisfazem à relação $u \cdot v \cdot w = 1$ se, e somente se, as retas suportes que possuem direções dadas pelos vetores $(z_A - z_P), (z_B - z_Q)$ e $(z_C - z_R)$ são concorrentes em um único ponto.

Por (11), basta comprovar que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} z_A - z_P & z_B - z_Q & z_C - z_R \\ \bar{z}_A - \bar{z}_P & \bar{z}_B - \bar{z}_Q & \bar{z}_C - \bar{z}_R \\ z_A \bar{z}_P - \bar{z}_A z_P & z_B \bar{z}_Q - \bar{z}_B z_Q & z_C \bar{z}_R - \bar{z}_C z_R \end{vmatrix}$$

é nulo, se, e somente se, $uvw = 1$.

Temos, que D é igual a

$$\begin{vmatrix} z_A - \frac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B - \frac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C - \frac{z_A + wz_B}{1+w} \\ \bar{z}_A - \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1+u} & \bar{z}_B - \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1+v} & \bar{z}_C - \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1+w} \\ z_A \frac{\bar{z}_B + u\bar{z}_C}{1+u} - \bar{z}_A \frac{z_B + uz_C}{1+u} & z_B \frac{\bar{z}_C + v\bar{z}_A}{1+v} - \bar{z}_B \frac{z_C + vz_A}{1+v} & z_C \frac{\bar{z}_A + w\bar{z}_B}{1+w} - \bar{z}_C \frac{z_A + wz_B}{1+w} \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira, segunda e terceira colunas por, $(1 + u)$, $(1 + v)$ e $(1 + w)$, respectivamente e considerando a transposta, concluímos que basta mostrar que:

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & (1+u)[z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)] \\ (1+v)z_B - (z_C + vz_A) & (1+v)\bar{z}_B - (\bar{z}_C + v\bar{z}_A) & (1+v)[z_B(\bar{z}_C + u\bar{z}_A) - \bar{z}_B(z_C + uz_A)] \\ (1+w)z_C - (z_A + wz_B) & (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) & (1+w)[z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)] \end{vmatrix}$$

é nulo.

De fato, combinando $uvw = 1$ com operações elementares por linhas na segunda linha da matriz anterior, $\tilde{L}_2 = L_2 + v.L_1 + uv.L_3$, em que L_1 , L_2 e L_3 correspondem à primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente, obtemos

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & (1+u)[z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)] \\ 0 & 0 & 0 \\ (1+w)z_C - (z_A + wz_B) & (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) & (1+w)[z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)] \end{vmatrix} = 0.$$

O que prova que as retas que contém os vetores $(z_A - z_P)$, $(z_B - z_Q)$ e $(z_C - z_R)$ são concorrentes em um único ponto quando $uvw = 1$.

Reciprocamente, assumindo que

$$\begin{vmatrix} (1+u)z_A - (z_B + uz_C) & (1+u)\bar{z}_A - (\bar{z}_B + u\bar{z}_C) & (1+u)[z_A(\bar{z}_B + u\bar{z}_C) - \bar{z}_A(z_B + uz_C)] \\ (1+v)z_B - (z_C + vz_A) & (1+v)\bar{z}_B - (\bar{z}_C + v\bar{z}_A) & (1+v)[z_B(\bar{z}_C + u\bar{z}_A) - \bar{z}_B(z_C + uz_A)] \\ (1+w)z_C - (z_A + wz_B) & (1+w)\bar{z}_C - (\bar{z}_A + w\bar{z}_B) & (1+w)[z_C(\bar{z}_A + u\bar{z}_B) - \bar{z}_C(z_A + uz_B)] \end{vmatrix} = 0.$$

Tomando $\tilde{L}_2 = L_2 + vL_1 + uvL_3$, em que L_1 , L_2 e L_3 correspondem à primeira, segunda e terceira linhas da matriz anterior. Em seguida, colocando $uvw - 1$ em evidência e efetuando operações na matriz, análogas às efetuadas no teorema de Menelaus, obtemos:

$$(uvw - 1) \begin{vmatrix} 1 & z_B & \bar{z}_B \\ 1 & z_C & \bar{z}_C \\ 1 & z_A & \bar{z}_A \end{vmatrix} = (uvw - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_B & z_C & z_A \\ \bar{z}_B & \bar{z}_C & \bar{z}_A \end{vmatrix} = 0.$$

Como z_A , z_B e z_C são vértices de um triângulo, temos $uvw - 1 = 0$, ou seja $uvw = 1$, concluindo que as retas suportes que possuem direções dadas pelos vetores $(z_A - z_P)$,

$(z_B - z_Q)$ e $(z_C - z_R)$ são concorrentes em um único ponto se, e só se, $uvw = 1$. \square

3.6 O Teorema de Desargues

Teorema 3. Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos tais que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes em O , então $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = \{P\}$ e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q\}$ são colineares.

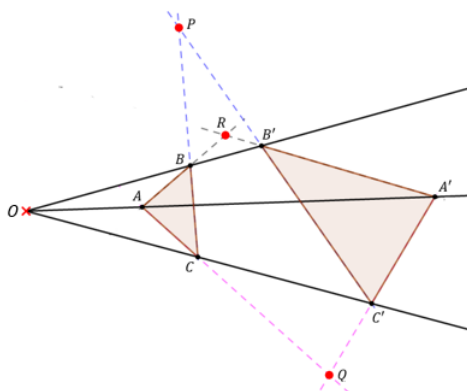


Figura 9: Representação geométrica do Teorema de Desargues.

Demonstração. O teorema de Desargues afirma que os lados correspondentes de dois triângulos em perspectiva se interceptam em três pontos colineares, e tal teorema é uma consequência do teorema de **Menelaus**. De fato, observando que a figura 9 ilustra o

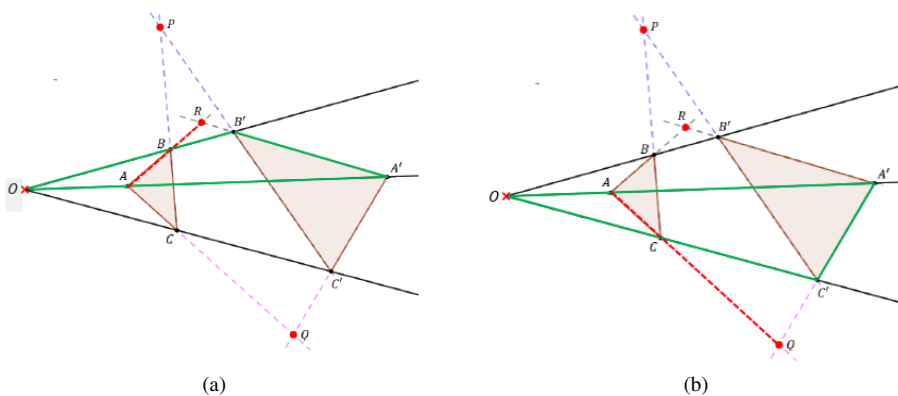


Figura 10: Aplicação do Teorema de Menelaus aos triângulos $A'B'O$ e $C'A'O$.

Teorema de Desargues, podemos aplicar o **Teorema de Menelaus** no triângulo $A'B'O$, em que A , B e R são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados OA' , $A'B$ e $B'O$, respectivamente. Como destacado na figura 10 (a), desta forma,

segue do **Teorema de Menelaus** que:

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_R}}{\overrightarrow{z_Rz_{A'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_A}}{\overrightarrow{z_Az_O}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_B}}{\overrightarrow{z_Bz_{B'}}} = -1 \tag{12}$$

de maneira análoga, a aplicação do **Teorema de Menelaus** no triângulo $C'A'O$, em que Q, A e C' são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados $A'C', A'O$ e OC' , respectivamente. Como ilustrado na figura 10 (b), temos:

$$\frac{\overrightarrow{z_{C'}z_Q}}{\overrightarrow{z_Qz_{A'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_A}}{\overrightarrow{z_Az_O}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_C'}}{\overrightarrow{z_C'z_{C'}}} = -1. \tag{13}$$

Finalmente, destacando o triângulo $C'B'O$, onde P, B e C são pontos colineares sobre as retas suportes dos segmentos orientados $C'B', B'O$ e OC' , respectivamente. Conforme a figura 11 (a), podemos aplicar novamente o **Teorema de Menelaus**, conseguindo:

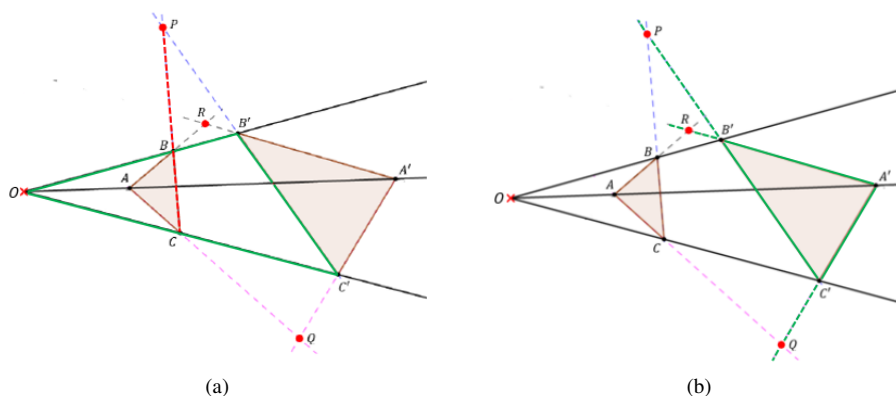


Figura 11: Aplicação do Teorema de Menelaus aos triângulos $C'B'O$ e $A'B'C'$.

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_P}}{\overrightarrow{z_Pz_{C'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{C'}z_C}}{\overrightarrow{z_Cz_O}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_Oz_B}}{\overrightarrow{z_Bz_{B'}}} = -1. \tag{14}$$

Multiplicando a equação (12) pelos inversos das equações (13) e (14), obtemos:

$$\frac{\overrightarrow{z_{B'}z_R}}{\overrightarrow{z_Rz_{A'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{A'}z_Q}}{\overrightarrow{z_Qz_{C'}}} \cdot \frac{\overrightarrow{z_{C'}z_P}}{\overrightarrow{z_Pz_{B'}}} = -1. \tag{15}$$

Observe que A', B' e C' são vértices do triângulo $A'B'C'$, e que P, R e Q são pontos que pertencem às retas que contém os segmentos orientados $B'C', A'B'$ e $A'C'$ (lados do mesmo triângulo), respectivamente, conforme ilustrado na figura 11 (b). Portanto, a equação (15) satisfaz ao **Teorema de Menelaus**, o que permite concluir que os pontos P, Q e R são colineares. \square

4 Conclusão

Um dos principais motivos que nos despertou o interesse em trabalhar com o conjunto dos números complexos foi o desaparecimento desse importante conteúdo na ementa curricular das escolas de educação básica. Apesar de o presente trabalho não se basear em problemas concretos que abrangem os alunos do ensino médio, ele tem o intuito de mostrar a vasta aplicabilidade de tal conjunto.

O estudo do conjunto dos números complexos tem desaparecido das salas de aula, mesmo abrangendo temas como: trigonometria, álgebra, geometria analítica e plana, três dos quatro pilares da Matemática moderna ensinados nas escolas. Contudo, a extinção do estudo dos números complexos nas escolas parece irreversível.

A Base nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo para as redes de ensino e suas instituições públicas e privadas, é referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares e propostas pedagógicas para a educação infantil, Ensino Fundamental e Médio. É esse documento que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas para garantir o direito ao desenvolvimento pleno de todos os estudantes.

Em matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística. Desta forma, pelo menos, três desses cinco temas tem relação direta com o conjuntos dos números complexos e, ainda assim, tem sido abordados de forma puramente algébrica, o que acarreta na falta de contextualização do conjunto com outras áreas da ciência e da matemática, e no conseqüente desinteresse tanto por parte dos alunos quanto dos professores.

Além disso, a grande insistência em ensinar apenas o que é cobrado nos vestibulares e em tornar a educação mais prática, também contribui para esse desinteresse. Portanto, ao contar um pouco da história dos números complexos e mostrar como estes podem ser aplicados em áreas que envolvem desde o âmbito do ensino médio até demonstrações de importantes teoremas da Geometria Plana, como os Teoremas de Ceva, Menelaus e Desargues, este trabalho ratifica a importância da permanência deste conteúdo em salas de aula de educação básica.

Referências

- [1] Rafael Bombelli, Umberto Forti, and Ettore Bortolotti. *L'algebra*. Feltrinelli, 1966.
- [2] Girolamo Cardano and Jean Stoner. *The book of my life*. New York Review Books, 2002.
- [3] René Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Courier Corporation, 1925.

- [4] Gilberto G Garbi and O Romance das Equações Algébricas. Editora livraria da física. *São Paulo*, 2010.
- [5] Ulício Pinto Júnior. A história dos números complexos: “das quantidades sofisticadas de cardano às linhas orientadas de argand”, 2009.
- [6] Antonio Caminha Muniz Neto. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. *Caminha Muniz Neto. –1. ed–Rio de Janeiro: SBM*, 2, 2012.
- [7] Tatiana Roque. *História da Matemática*. Zahar, 2012.
- [8] C. Zwikker. *The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications*. New York: Dover, 1963.