

---

# Geometria diferencial de curvas em espaços euclidianos e teoria de contato

**Pedro Benedini Riul**

benedini@ufsj.edu.br

Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

**Elton de Oliveira Barreto**

elton.estudo2020@aluno.ufsj.edu.br

Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

**Marina Maria Moreira**

marina\_maria06@yahoo.com.br

Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

---

## Resumo

Esse texto apresenta um estudo das curvas regulares nos espaços Euclidianos  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , sob o ponto de vista da teoria de contato. O contato de curvas com objetos de referência, sendo estes retas e círculos para curvas planas, e planos e esferas para curvas espaciais, é medido através das singularidades das funções altura e distância ao quadrado. Mais ainda, é feita uma investigação acerca da  $\mathcal{R}$ -equivalência de funções reais de uma variável, relacionando-a com a teoria de contato.

## Palavras-chave

Curvas parametrizadas, Teoria de contato, Teoria de Singularidades.

## 1 Introdução

O estudo de curvas e superfícies têm fascinado matemáticos (e não matemáticos!) há séculos. No século XVII, no entanto, a investigação da geometria desses objetos recebeu um impulso: o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. A partir daí, mentes brilhantes como Newton, Fermat e Gauss (já no século XIX) deram enormes contribuições para o que chamamos hoje de Geometria Diferencial.

No entanto, nas décadas de 50 e 60 novas mentes brilhantes lançaram base para uma pequena revolução matemática: Hassler Whitney e René Thom. A partir dos seus trabalhos nascia a Teoria de Singularidades, uma área que estuda e classifica singularidades de aplicações diferenciáveis e que estende sua influência nas mais diversas áreas: como geometria diferencial, geometria algébrica, topologia diferencial, álgebra comutativa e topologia algébrica.

Nas últimas décadas, a contribuição da Teoria de Singularidades na Geometria Diferencial é muito significativa, seja na geometria de variedades regulares ou com singularidades. Em [10] temos um arauto das contribuições da teoria na geometria de superfícies regulares em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 3, 4, 5$ , com resultados de vários artigos de renomados

pesquisadores da área. Mais recentemente, vários trabalhos têm surgido com aplicações da teoria no estudo de variedades singulares: superfícies singulares em  $\mathbb{R}^3$  ([6, 16, 17]), em  $\mathbb{R}^4$  ([1, 3]), 3-variedades em espaços euclidianos ([2, 4]), entre muitos outros.

O objetivo deste artigo é apresentar uma contribuição da Teoria de Singularidades na Geometria Diferencial de curvas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Isso é feito através do estudo do contato dessas curvas com “objetos padrão”. Tais objetos são homogêneos, no sentido de que, localmente, eles são iguais em todos os seus pontos. No caso de curvas em  $\mathbb{R}^2$  estudaremos o contato com retas e círculos e no caso de curvas em  $\mathbb{R}^3$  com planos e esferas.

A relação entre o contato de subvariedades equidimensionais de uma dada variedade e as  $\mathcal{K}$ -singularidades de aplicações foi estudada por Mather em [13] (para a definição e estudo do grupo  $\mathcal{K}$ , ver [9]). A teoria geral de contato, no entanto, foi desenvolvida por Montaldi em sua tese de doutorado [14].

Para o caso de curvas, o contato de curvas com círculos e esferas será estudado através do tipo de singularidade da função distância ao quadrado e o contato com retas e planos através do tipo de singularidade da função altura.

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 são apresentadas definições e resultados acerca da Geometria Diferencial clássica de curvas em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . A Seção 3 é dedicada à classificação de singularidades de funções reais de uma variável. Tal classificação é feita através de uma relação de equivalência, a  $\mathcal{R}$ -equivalência. O principal resultado desta seção é o Teorema 3.6, que classifica funções de acordo com a  $\mathcal{R}$ -equivalência. A partir desta classificação, são definidas as diferentes classes de equivalência que são chamadas de singularidades de tipo  $A_k$ .

Na Seção 4 estudamos o contato de curvas com objetos dados como imagem inversa de um valor regular de uma função suave. A Proposição 4.8 fornece condições sobre o tipo de  $A_k$ -singularidade das funções altura e distância ao quadrado para cada ordem de contato entre uma curva regular e cada objeto padrão. Finalmente, os Teoremas 4.10 e 4.12 resumizam todo o estudo, relacionando o tipo de singularidade das funções altura e distância ao quadrado com a ordem de contato dos objetos e as condições e interpretações geométricas em cada caso.

Este trabalho é fruto da dissertação de mestrado ([15]) da terceira autora e do trabalho de iniciação científica do segundo autor, ambos sob orientação do primeiro autor.

## 2 Geometria diferencial de curvas

Esta seção é dedicada ao estudo de curvas parametrizadas diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Para mais detalhes, sugerimos ao leitor as obras [7, 8, 12, 18].

Uma **curva parametrizada diferenciável** de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , é uma aplicação diferenciável  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  (suave) de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto \alpha(s) = (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)). \end{aligned}$$

A variável  $s$  é chamada de **parâmetro** da curva e o seu **traço** é o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$   $\{\alpha(s) \in \mathbb{R}^n : s \in I\}$ . O vetor  $\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \dots, \alpha'_n(s))$  é chamado **vetor tangente** à  $\alpha$  em  $s$ . A curva  $\alpha$  é dita **regular** se  $\alpha'(s) \neq \bar{0}$ , para todo  $s \in I$ . Se  $\alpha$  é regular, a sua **reta tangente** em  $s = s_0$  é a reta que passa por  $\alpha(s_0)$  e tem direção  $\alpha'(s_0)$ .

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  um difeomorfismo. A composta  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  é chamada de **reparametrização de  $\alpha$  por  $h$** : uma curva regular que possui o mesmo traço de  $\alpha$ . A função  $h$  é chamada de **mudança de parâmetros**.

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva regular, dizemos que está **parametrizada por comprimento de arco** (ppca), se para todo  $s \in I$ , temos  $\|\alpha'(s)\| = 1$ . Esta condição é bastante forte e parece ser restrita. No entanto, toda curva regular admite uma reparametrização, ou seja, uma mudança de coordenadas em seu domínio, de tal modo que neste novo sistema de coordenadas a curva está ppca (ver [18, p. 40, 58]).

**Exemplo 2.1.** *Seja  $r > 0$  um número real. A curva regular ppca  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por*

$$\alpha(s) = \left( r \cos \frac{s}{r} + x_0, r \sin \frac{s}{r} + y_0 \right)$$

*tem como traço a circunferência centrada em  $(x_0, y_0)$  e de raio  $r$ .*

Para cada ponto de uma curva regular  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , podemos definir uma base ortonormal positivamente orientada. O conjunto de tais bases é chamado de Referencial de Frenet-Serret. O tratamento para curvas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  será feito separadamente.

**Caso  $n = 2$ :** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular ppca. O **vetor tangente unitário** de  $\alpha$  em  $s$  é o vetor  $\mathfrak{t}(s) = \alpha'(s)$ . Denotamos por  $\mathfrak{n}(s)$  o **vetor normal unitário** de  $\alpha$  em  $s$ , obtido rotacionando o vetor  $\mathfrak{t}(s)$  em um ângulo de  $\pi/2$  no sentido anti-horário. O conjunto  $\{\mathfrak{t}(s), \mathfrak{n}(s)\}$  define, para cada  $s$ , uma base ortonormal positiva para  $\mathbb{R}^2$ .

Uma vez que  $\langle \mathfrak{t}(s), \mathfrak{t}(s) \rangle = 1$ , temos  $\langle \mathfrak{t}'(s), \mathfrak{t}(s) \rangle = 0$ , e conseqüentemente,

$$\mathfrak{t}'(s) = \kappa(s)\mathfrak{n}(s), \tag{1}$$

para uma função  $\kappa(s)$ , chamada de **curvatura** de  $\alpha$  em  $s$ . De maneira análoga, como

$\langle n'(s), n(s) \rangle = 0$ , derivando a expressão  $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$ , obtemos

$$n'(s) = -\kappa(s)t(s). \tag{2}$$

Mais ainda, da expressão (1), obtemos uma fórmula explícita para o cálculo da curvatura:

$$\kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle. \tag{3}$$

As equações (1) e (2) são chamadas de **Fórmulas de Frenet-Serret** para curvas em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $\alpha$  a curva do Exemplo 2.1. Os vetores tangente e normal unitários são dados por

$$t(s) = \left( -\operatorname{sen} \frac{s}{r}, \operatorname{cos} \frac{s}{r} \right) \text{ e } n(s) = \left( -\operatorname{cos} \frac{s}{r}, -\operatorname{sen} \frac{s}{r} \right).$$

Portanto, a curvatura da circunferência de raio  $r$  é dada por

$$\kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \frac{1}{r}.$$

Em [18, p. 46] são dadas fórmulas explícitas para o cálculo da curvatura e dos vetores tangente e normal unitários para uma curva regular qualquer.

Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s$ , a quantidade  $\rho(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}$  é denominada **raio de curvatura** de  $\alpha$  em  $s$ . O círculo de raio  $\rho(s)$  e centro  $c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$  é chamado **círculo osculador** e  $c(s)$  é dito **centro de curvatura**. Seja  $\alpha$  ppca com  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s$ . Variando o parâmetro  $s$ , o centro de curvatura  $c(s)$  descreve o traço de uma curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , chamada de **evoluta de  $\alpha$** , dada por

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) \tag{4}$$

Em [7] os autores fazem um estudo sobre a geometria da evoluta, relacionando-a com a da curva que a origina. Este estudo também pode ser encontrado em [5], que apresenta belos resultados em forma de exercícios.

**Exemplo 2.3.** [7, p. 25] Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular (não necessariamente ppca) tal que  $\kappa(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ , então a evoluta de  $\alpha$  é a curva  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  com em (4), onde

$$\kappa(s) = \frac{-x''(s)y'(s) + x'(s)y''(s)}{(x'(s)^2 + y'(s)^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } n(s) = \frac{(-y'(s), x'(s))}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}.$$

Em particular, considere a elipse  $\alpha(s) = (a \cos s, b \sin s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , onde  $a \neq b$ . Então,

$$\kappa(s) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s)^{\frac{3}{2}}}$$

é a curvatura de  $\alpha$  em  $s$ , e portanto

$$\beta(s) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 s, -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 s \right)$$

é uma parametrização de sua evoluta, que chamamos de astroide.

**Caso  $n = 3$ :** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada regular ppca. O vetor  $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$  é o seu **vetor tangente unitário** em  $s$ . A **curvatura** de  $\alpha$  em  $s$  é dada por

$$\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\|. \tag{5}$$

Quando  $\kappa(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ , definimos o **vetor normal unitário** por

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}.$$

Dessa forma,

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s). \tag{6}$$

O vetor unitário  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$  é chamado de **vetor binormal unitário** de  $\alpha$  em  $t$  e o conjunto  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  forma, para cada  $s$ , uma base ortonormal positiva para o espaço  $\mathbb{R}^3$ . É possível mostrar que o vetor  $\mathbf{b}'(s)$  é paralelo à  $\mathbf{n}(s)$ , e assim

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s), \tag{7}$$

para uma função suave  $\tau(s)$ , chamada de **torção** de  $\alpha$  em  $s$ . Cálculos nos mostram que

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s). \tag{8}$$

As equações (6), (7) e (8) são chamadas de **Fórmulas de Frenet-Serret** para curvas em  $\mathbb{R}^3$ . Cada par de vetores no referencial  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$  gera um plano passando por  $\alpha(s)$ . Os vetores  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  geram o **plano osculador**;  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$  geram o **plano retificante**, e por fim  $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$  geram o **plano normal**.

**Exemplo 2.4.** Dada a hélice circular ppca (ver Figura 1) definida por,

$$\alpha(s) = \left( 6 \cos \frac{s}{10}, 6 \sin \frac{s}{10}, \frac{4s}{5} \right), s \in \mathbb{R},$$

o triedro de Frenet, a curvatura e a torção de  $\alpha$  em  $s$  serão, respectivamente:

$$t(s) = \left( -\frac{3}{5} \sin \frac{s}{10}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{10}, \frac{4}{5} \right), n(s) = \left( -\cos \frac{s}{10}, -\sin \frac{s}{10}, 0 \right),$$

$$b(s) = \left( \frac{4}{5} \sin \frac{s}{10}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{10}, \frac{3}{5} \right), \kappa(s) = \frac{3}{50} \text{ e } \tau(s) = -\frac{2}{25}.$$

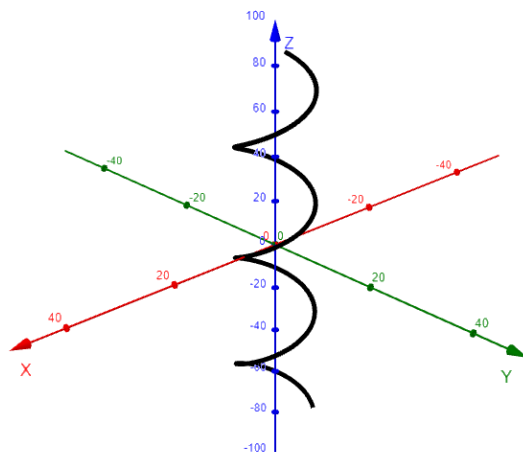


Figura 1: Hélice circular do Exemplo 2.4.

### 3 Equivalência de funções reais

Nesta seção definiremos a  $\mathcal{R}$ -equivalência: uma relação de equivalência no conjunto de funções reais definidas em uma vizinhança de um ponto  $s_0 \in \mathbb{R}$ . A partir das classes de equivalência geradas por essa relação, será possível obter uma classificação para funções reais.

Seja  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Denotamos por  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em alguma vizinhança de  $s_0$ . Neste caso, dizemos que duas funções são iguais se elas coincidem em alguma vizinhança (possivelmente menor) de  $s_0$ . Essa igualdade define uma relação de equivalência no conjunto de funções definidas em uma vizinhança de  $s_0$ . Chamamos as

classes de equivalência de **germes em**  $s_0$  (para mais detalhes, ver [9]). Quando também desejamos fixar a imagem de  $s_0$ , escrevemos  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow (\mathbb{R}, p)$ , onde  $f(s_0) = p$ .

De agora em diante, ao nos referirmos a um germe  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  como uma função, nos referimos a um representante da classe de equivalência de  $f$ .

**Definição 3.1.** Sejam  $f_1 : (\mathbb{R}, s_1) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2 : (\mathbb{R}, s_2) \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves. Dizemos que  $f_1$  em  $s_1$  é  **$\mathcal{R}$ -equivalente** à  $f_2$  em  $s_2$  se existem intervalos abertos  $V_i \subset \mathbb{R}$  tais que  $s_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , um difeomorfismo  $h : V_1 \rightarrow V_2$  e uma constante  $c$  tais que  $h(s_1) = s_2$  e  $f_1(s) = f_2(h(s)) + c$ , para todo  $s \in V_1$ .

Dessa forma, a função  $f_1$ , em uma vizinhança de  $s_1$ , é obtida de  $f_2$ , em uma vizinhança de  $s_2$  através de uma mudança de coordenadas e da adição de uma constante  $c = f_1(s_1) - f_2(s_2)$ , de modo que o diagrama a seguir seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow x \rightarrow x-c \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

**Observação 3.2.** A  $\mathcal{R}$ -equivalência é uma relação de equivalência, pois é:

- (i) Reflexiva:  $f_1$  em  $s_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a si mesma, basta tomar  $h$  como a função identidade  $h(s) = s$  como mudança de parâmetro e  $c = 0$ . Assim,  $f_1(s) = f_1(h(s)) + c$ ;
- (ii) Simétrica: Temos que se  $f_1$  em  $s_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  em  $s_2$ , então existe um difeomorfismo  $h$ , onde  $h(s_1) = s_2$  e  $f_1(s) = f_2(h(s)) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Uma vez que  $h$  é difeomorfismo, existe  $h^{-1}$ , tal que  $h^{-1}(s_2) = s_1$  e  $f_2(s) = f_1(h^{-1}(s)) - c$ . Portanto,  $f_2$  em  $s_2$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_1$  em  $s_1$ ;
- (iii) Transitiva: Se  $f_1$  em  $s_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  em  $s_2$ , e esta última é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_3$  em  $s_3$ , então existem difeomorfismos  $h_1$  e  $h_2$  tais que  $f_1(s) = f_2(h_1(s)) + c$  e  $f_2(s) = f_3(h_2(s)) + d$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f_1(s) = f_3(h(s)) + (c + d)$ , com  $h = h_2 \circ h_1$  difeomorfismo. Portanto  $f_1$  em  $s_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_3$  em  $s_3$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Temos que  $f_1(s) = s^k$  em  $s_1 = 0$  e  $f_2(s) = -s^k$  em  $s_2 = 0$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes se, e somente se,  $k$  é ímpar. De fato, de acordo com a Definição 3.1,  $f_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  em  $s_1 = s_2 = 0$  se, e somente se, existe um difeomorfismo  $h$  definido em uma vizinhança de 0 tal que  $h(0) = 0$  e  $f_1(s) = f_2(h(s))$  (note que  $c = f_1(0) - f_2(0) = 0$ ). Logo,  $s^k = -(h(s))^k$ , e esta última igualdade só é satisfeita para  $k$  ímpar, pois caso  $k$  seja par,  $s = h(s) = 0$  seria a única solução. Dessa forma, a equivalência existe se, e somente se,  $k$  é ímpar, e neste caso  $h(s) = -s$ . No entanto,  $f_1(s) = s^2$  em  $s_1 = 1$  e  $f_2(s) = -s^2$  em  $s_2 = 1$ , são  $\mathcal{R}$ -equivalentes: basta tomar  $h(s) = \sqrt{2 - s^2}$  e  $c = 2$ .

**Lema 3.4** (Lema de Hadamard). Seja  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  suave, e suponha  $f^{(p)}(s_0) = 0$  para todo  $1 \leq p \leq k$ . Então, existe uma função  $f_1 : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(s) = f(s_0) + (s - s_0)^{k+1}f_1(s)$  para todo  $s$  em alguma vizinhança de  $s_0$ . Mais ainda, se  $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ , então  $f_1(s_0) \neq 0$ .

*Demonstração.* Iniciaremos a prova com o caso particular  $s_0 = 0$  e  $f(s_0) = 0$ . Para tanto, considere a função suave  $F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F^{(p)}(0) = 0$ ,  $1 \leq p \leq k$ . Queremos mostrar que  $F(s) = F(s_0) + (s - s_0)^{k+1}F_1(s)$ , ou seja,  $F(s) = s^{k+1}F_1(s)$ , para  $F_1$  suave e para todo  $s$  em uma vizinhança de 0. Faremos a prova por indução sobre  $k$ . Para  $k = 0$ , temos  $F(0) = 0$  e buscamos  $F(s) = sF_1(s)$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 \frac{d}{du} F(su) du = F(s) - F(0) = F(s),$$

portanto,

$$F(s) = \int_0^1 \frac{d}{du} F(su) du = \int_0^1 sF'(su) du = s \int_0^1 F'(su) du,$$

de onde podemos tomar  $F_1(s) = \int_0^1 F'(su) du$ , suave, como queríamos.

Para mostrar que  $F_1(0) \neq 0$  se  $F'(0) \neq 0$ , suponha, por absurdo, que  $F_1(0) = 0$ . Temos,

$$F_1(0) = \int_0^1 F'(0) du = F'(0) \int_0^1 du = F'(0) = 0,$$

o que é uma contradição. Isso finaliza a prova para  $k = 0$ .

Suponhamos o resultado válido para  $k \geq 0$  e  $F^{(p)}(0) = 0$ , para  $1 \leq p \leq k + 1$ . Pelo caso  $k = 0$ , temos  $F(s) = sF_2(s)$ . Derivando repetidamente esta última expressão, obtemos:

$$F^{(p)}(s) = pF_2^{(p-1)}(s) + sF_2^{(p)}(s), \quad 1 \leq p \leq k + 1.$$

e, portanto,  $F_2^{(p)}(0) = 0$  para  $1 \leq p \leq k$ . Aplicando a hipótese de indução para  $F_2$ , temos que  $F_2(s) = s^{k+1}F_1(s)$ , para alguma função  $F_1$ . Dessa forma,  $F(s) = s^{k+2}F_1(s)$ . Para a segunda parte, derivando  $F$  e considerando  $s_0 = 0$ , temos  $F^{(k+1)}(0) = (k + 1)!F_1(0)$  e como  $(k + 1)! \neq 0$ , temos que se  $F^{(k+1)}(0) \neq 0$  então  $F_1(0) \neq 0$ , finalizando a prova para  $s_0 = 0$ .

Para o caso geral, o desenvolvimento segue de modo análogo, bastando considerar  $s$  em uma vizinhança de  $s_0$ . Para tanto, seja  $F(s) = f(s+s_0) - f(s_0)$ . Como  $F^{(p)}(0) = 0$ , para  $1 \leq p \leq k$ , segue que  $F(s) = s^{k+1}F_1(s)$ . Logo  $f(s + s_0) = f(s_0) + s^{k+1}F_1(s)$ , onde  $s + s_0$  está em uma vizinhança de  $s_0$ .



Fazendo  $s + s_0 = u$ ,  $s = u - s_0$ , temos  $f(u) = f(s_0) + (u - s_0)^{k+1} F_1(u - s_0)$ , e assim,  $f_1(u) = F_1(u - s_0)$ . Logo,  $f(u) = f(s_0) + (u - s_0)^{k+1} f_1(u)$ , onde fazendo  $u = s$  a prova segue com os mesmos argumentos usados no caso particular.  $\square$

**Exemplo 3.5.** Para  $f(s) = s^2 + s^3$  e  $s_0 = 0$ , temos  $f(0) = f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 2 \neq 0$ . Assim, pelo Lema de Hadamard,  $f(s) = s^2 f_1(s)$ , onde  $f_1(s) = (1 + s)$ , em uma vizinhança de  $s_0 = 0$ .

O seguinte teorema é o principal desta seção. Nele, é apresentada uma classificação de funções reais segundo a  $\mathcal{R}$ -equivalência, fornecendo formas normais polinomiais para as distintas classes de equivalência.

**Teorema 3.6** (Classificação de funções). Sejam  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  suave e  $k \geq 0$ . Suponha que  $f^{(p)}(s_0) = 0$  para todo  $1 \leq p \leq k$ , e que  $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ . Então  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  definida por  $g(s) = \pm s^{k+1}$ , sendo o sinal positivo quando  $f^{(k+1)}(s_0) > 0$  e o sinal negativo quando  $f^{(k+1)}(s_0) < 0$ .

*Demonstração.* Defina a função  $h(s) = (s - s_0)(\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}}$ , onde  $f_1$  é tal que  $f(s) = f(s_0) + (s - s_0)^{k+1} f_1(s)$ , dada pelo Lema 3.4 (Hadamard) e o sinal é o mesmo de  $f_1(s_0)$ . Observe que  $h(s_0) = 0$  e

$$h'(s) = (\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}} + (s - s_0) \frac{1}{k+1} (\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}-1},$$

de modo que  $h'(s_0) = (\pm f_1(s_0))^{\frac{1}{k+1}} \neq 0$ . Assim,  $h$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $s_0$ . Note ainda que  $f^{(k+1)}(s_0) = (k+1)! f_1(s_0)$ , e uma vez que  $(k+1)!$  é sempre positivo, o sinal de  $f^{(k+1)}(s_0)$  coincide com o sinal de  $f_1(s_0)$ .

Temos que para  $g$  como no enunciado,

$$g(h(s)) = \left[ (s - s_0)(\pm f_1(s))^{\frac{1}{k+1}} \right]^{k+1} = (s - s_0)^{k+1} f_1(s).$$

Como  $f_1(s) = \frac{f(s) - f(s_0)}{(s - s_0)^{k+1}}$ , segue que  $g(h(s)) = f(s) - f(s_0)$ , ou seja,

$$f(s) = g(h(s)) + f(s_0),$$

sendo  $c = f(s_0)$ . Logo,  $f(s)$  em  $s_0$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $g(s)$  em 0.  $\square$

**Exemplo 3.7.** A função  $f(s) = s^2 + s^3$  do Exemplo 3.5 é  $\mathcal{R}$ -equivalente, em  $s_0 = 0$ , à  $g(s) = s^2$  em 0.

Como consequência do Teorema 3.6, a função suave  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $\pm s^{k+1}$  se, e somente se,  $f^{(p)}(s_0) = 0$  para  $1 \leq p \leq k$  e  $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ . Neste caso e no decorrer do restante do artigo, quando não explicitamos o ponto em

que ocorre a equivalência, fica implícito que se trata de  $s_1 = 0$ . Essa equivalência nos permite enunciar a seguinte definição, que nomeia as classes de equivalência segundo a  $\mathcal{R}$ -equivalência.

**Definição 3.8.** Seja  $f : (\mathbb{R}, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{R}$ -equivalente à  $\pm s^{k+1}$ . Neste caso, para  $k \geq 0$ , dizemos que  $f$  tem uma **singularidade do tipo**  $A_k$  ou uma **singularidade**  $A_k$  em  $s_0$ . Mais ainda, dizemos que  $f$  tem singularidade do tipo  $A_{\geq k}$  quando  $f^{(p)}(s_0) = 0$  para  $1 \leq p \leq k$ .

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: toda função  $f$  possui singularidade do tipo  $A_k$  para algum  $k$ ? Para que isso ocorra, é necessário que a derivada de  $f$  de alguma ordem seja não nula. Se  $f$  é uma função analítica, dada por uma série de potências convergente

$$f(s) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p (s - s_0)^p,$$

basta tomar o menor  $p$  tal que  $a_p$  não se anula e, assim,  $f$  teria singularidade do tipo  $A_{p-1}$ . No entanto, nem todas as funções suaves são analíticas, como ilustrado no exemplo a seguir.

**Exemplo 3.9.** Considere a função real

$$f(s) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{s}}, & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}.$$

Vamos mostrar que  $f^{(p)}(0) = 0$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Faremos a prova por indução em  $p$ . Para  $p = 0$ , é imediato que  $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ . Suponha que para um determinado  $p$ , tenhamos  $f^{(p)}(0) = 0$ . Vamos mostrar que isso vale para  $p + 1$ .

$$f^{(p+1)}(0) = (f^{(p)}(s))'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(s) - f^{(p)}(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(s)}{s}.$$

Para  $s < 0$ , sabemos que  $f \equiv 0$ , dessa forma suas derivadas de todas as ordens são nulas. Para  $s > 0$ , podemos escrever  $f^{(p)}(s) = Q_{p+1}\left(\frac{1}{s}\right) e^{-\frac{1}{s}}$ , onde  $Q_{p+1}$  é um “polinômio” de grau  $p + 1$ . Logo,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f^{(p)}(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{s}} Q_{p+1}\left(\frac{1}{s}\right)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{Q_{p+2}\left(\frac{1}{s}\right)}{e^{\frac{1}{s}}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{Q_{p+2}(u)}{e^u} = 0.$$

Portanto,  $f$  não é analítica e não possui singularidade do tipo  $A_k$  para nenhum  $k$ . Funções como a deste exemplo são chamadas **funções flat**. A Figura 2 ilustra o gráfico de  $f$ .

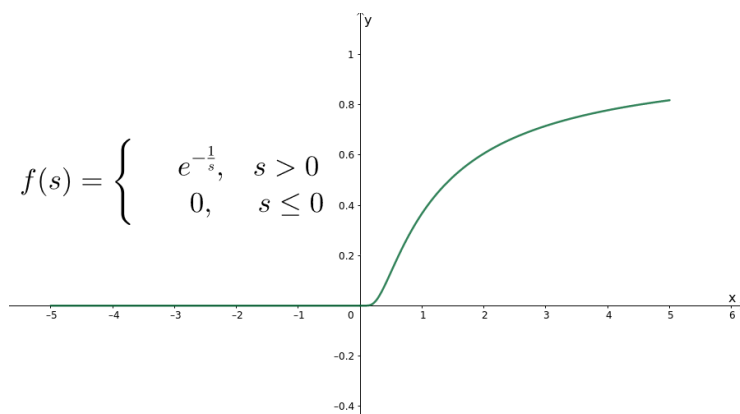


Figura 2: Gráfico da função do Exemplo 3.9.

#### 4 Teoria de contato

Nesta seção, nosso objetivo é obter informações sobre a geometria de curvas através do estudo de seu contato com “objetos padrão”. Dada uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , por exemplo, podemos estudar seu contato em um determinado ponto com quaisquer curvas que passem por esse ponto. No entanto, é bastante intuitivo olharmos para o contato com retas e círculos. Tais curvas possuem um bom comportamento, uma vez que suas curvaturas são constantes: nula e inversamente proporcional ao seu raio, respectivamente.

Para curvas em  $\mathbb{R}^3$ , vamos olhar seu contato com superfícies de bom comportamento: planos e esferas, que por sua vez também possuem um apelo geométrico bastante intuitivo. Em [18, p. 97], a autora investiga o contato entre curvas regulares em  $\mathbb{R}^3$ , focando no contato com retas e círculos, no entanto com uma abordagem diferente daquela que será dada aqui.

A abordagem que daremos para o estudo do contato de curvas será baseado no apresentado em [5, p. 18]. Seja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável e suponha que 0 é um valor regular de  $F$ , isto é, não existem pontos críticos no nível 0, ou seja, se  $F(x) = 0$ , então  $\nabla F(x) \neq \bar{0}$  (ver [11, p. 89]). Então, o conjunto

$$F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$$

é uma hipersuperfície (ver Teorema 3 em [11]). Quando  $n = 2$ , temos que  $F^{-1}(0)$  é uma curva regular e quando  $n = 3$ ,  $F^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

**Exemplo 4.1.** Sejam  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que  $v \neq p$ ,  $v \neq \bar{0}$  e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função.

- (i) Se  $F(x) = \|x - v\|^2 - \|v - p\|^2$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , então 0 é valor regular de  $F$  pois  $\nabla F(x) = 2(x_1 - v_1, \dots, x_n - v_n) = \bar{0}$  se, e somente se,  $x_i = v_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , mas neste caso  $F(v) \neq 0$ . Quando  $n = 2$  (respectivamente,  $n = 3$ )  $F^{-1}(0)$  é o círculo centrado (resp. esfera centrada) em  $v$  passando por  $p$ .
- (ii) Se  $F(x) = \langle x - p, v \rangle$ , com  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , 0 também é valor regular de  $F$  pois  $\nabla F = v \neq \bar{0}$ . Neste caso, quando  $n = 2$  (respectivamente,  $n = 3$ ),  $F^{-1}(0)$  é a reta (resp. plano) passando por  $p$  ortogonal à  $v$ .

**Definição 4.2.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  uma curva regular e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável tal que 0 é um valor regular. Dizemos que  $\alpha$  e  $F^{-1}(0)$  tem **contato de ordem  $k$  em  $s = s_0$**  (ou em  $p = \alpha(s_0)$ ) se a função suave

$$g(s) = F(\alpha(s)) = F(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \tag{9}$$

satisfaz  $g^{(i)}(s_0) = 0$ , para  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$  e  $g^{(k)}(s_0) \neq 0$ . Dizemos que o contato é **ordem pelo menos  $k$**  se retirarmos a condição  $g^{(k)}(s_0) \neq 0$ .

**Exemplo 4.3.** Considere as curvas regulares  $\alpha(s) = (s, \cosh s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , e  $F^{-1}(0)$ , onde  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , é tal que  $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y + 1$ . Podemos verificar que em  $s_0 = 0$  elas possuem contato de ordem 4 (ver Figura 3).

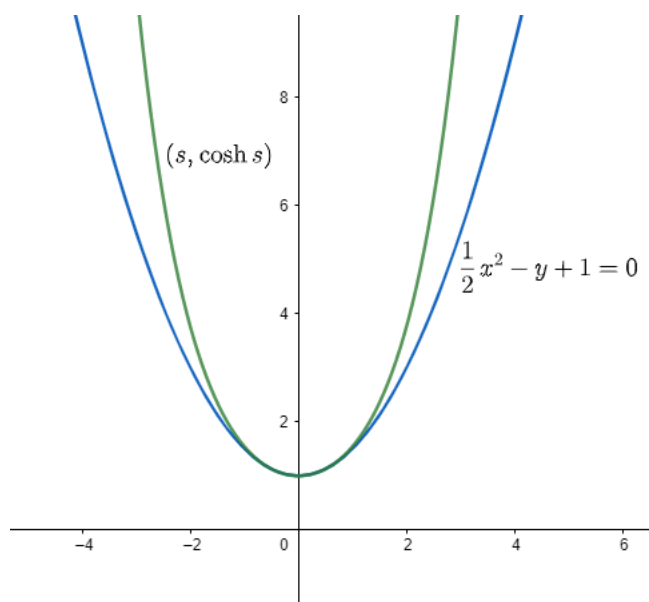


Figura 3: Contato entre as curvas  $\alpha(s) = (s, \cosh s)$  e  $\frac{1}{2}x^2 - y + 1 = 0$  em  $s_0 = 0$ .

**Teorema 4.4.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , uma curva regular e  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável tal que 0 é um valor regular. Então,  $\alpha$  e  $F^{-1}(0)$  tem contato

de ordem  $k \geq 0$  em  $s_0$  se, e somente se, a função  $g = F \circ \alpha$  (como em (9)) tem singularidade do tipo  $A_{k-1}$  em  $s_0$ .

*Demonstração.* De acordo com a Definição 4.2,  $\alpha$  e  $F^{-1}(0)$  tem contato de ordem  $k$  em  $s_0$  se, e somente se, a função  $g = F \circ \alpha$  satisfaz as seguintes condições:

$$g'(s_0) = \dots = g^{(k-1)}(s_0) = 0 \text{ e } g^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

No entanto, pela Definição 3.8, isso é equivalente a dizer que a função  $g$  tem singularidade do tipo  $A_{k-1}$  em  $s_0$ . □

**Exemplo 4.5.** Vamos estudar o contato do gráfico da função  $f(s) = s^k$  e o eixo coordenado  $x$  na origem. Para tanto, tome  $\alpha(s) = (s, s^k)$ , com  $k \in \mathbb{N}$  e  $F(x, y) = y$ . Assim,  $g(s) = F(\alpha(s)) = s^k$  e, conseqüentemente,

$$g'(s) = ks^{k-1}, g''(s) = k(k-1)s^{k-2}, \dots, g^{(k)}(s) = k!$$

Substituindo em  $s_0 = 0$ , temos que  $g$  tem singularidade  $A_{k-1}$ , e portanto, o contato entre o gráfico da função  $f(s) = s^k$  e o eixo coordenado  $x$  na origem é de ordem  $k$ .

O próximo resultado nos garante que a ordem de contato entre uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  e a hipersuperfície  $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$  em  $s_0$  é o mesmo que o de uma reparametrização  $\beta = (\alpha \circ h) : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ( $h : J \rightarrow I$  mudança de parâmetros) e  $F^{-1}(0)$  em  $h^{-1}(s_0) = u_0$ . Note que da Definição 4.2, o contato de  $\alpha$  e  $F^{-1}(0)$  é dado pelo número de derivadas nulas da função  $g_\alpha = f \circ \alpha$ . O contato de  $\beta$  e  $F^{-1}(0)$ , por sua vez, será medido pelas derivadas nulas de  $g_\beta = F \circ \beta = F \circ (\alpha \circ h) = g_\alpha \circ h$ .

**Proposição 4.6.** [5, p. 26] Sejam  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  como em (9),  $h : J \rightarrow I$  um difeomorfismo com  $s_0 \in I$  e  $h^{-1}(s_0) = u_0$ . Então  $g^{(i)}(s_0) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$  se, e somente se,  $(g \circ h)^{(i)}(u_0) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

*Demonstração.* Da Regra da Cadeia, sabemos que  $(g \circ h)'(u) = g'(h(u))h'(u)$ . Aplicando-a repetidamente, obtemos:

$$(g \circ h)^{(n)}(u) = g^{(n)}(h(u))(h'(u))^n + \sum_{i=1}^{n-1} g^{(i)}(h(u))\bar{h}(u),$$

onde  $\bar{h}(u)$  depende das derivadas da mudança de parâmetros  $h$ . Dessa forma, se  $g^{(i)}(h(u_0)) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então  $(g \circ h)^{(n)}(u_0) = 0$ . Logo, fazendo  $n$  variar de 1 até  $k$ , temos mostrada a ida. Para a recíproca, basta aplicar novamente a Regra da Cadeia para  $g = (g \circ h) \circ h^{-1}$ . □

**Definição 4.7.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  uma curva regular e  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor não nulo.

(i) A **função distância ao quadrado** de  $\alpha$  à  $v$  é a função

$$\begin{aligned} f_d : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f_d(s) = \|\alpha(s) - v\|^2 = \langle \alpha(s) - v, \alpha(s) - v \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Se  $v$  é unitário, a **função altura** de  $\alpha$  na direção  $v$  é a função

$$\begin{aligned} f_h : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle. \end{aligned}$$

Note que a função altura  $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$  recebe tal nome pois mede a distância de  $\alpha(s)$  até da reta ( $n = 2$ ) ou do plano ( $n = 3$ ) passando pela origem e ortogonal ao vetor  $v$ . Tendo sua representação geométrica conforme a Figura 4.

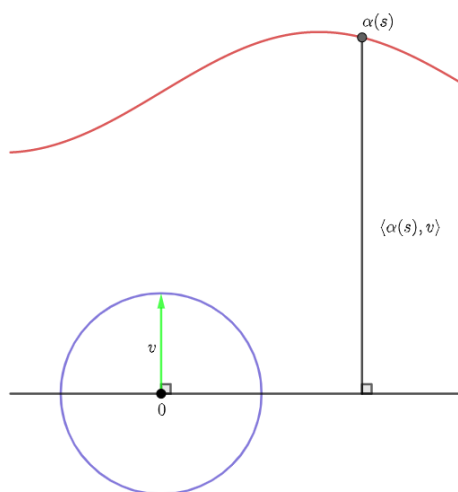


Figura 4: Função altura.

A proposição a seguir mostra que o tipo de  $A_k$ -singularidade da função distância ao quadrado mede o contato de curvas com círculos e esferas, enquanto que o da função função altura mede o contato com retas e planos.

**Proposição 4.8.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , uma curva regular.

(i) A curva  $\alpha$  tem contato de ordem  $k$ , em  $s = s_0$ , com o círculo ( $n = 2$ ) ou com a esfera ( $n = 3$ ) de centro  $v \in \mathbb{R}^n$ , passando por  $\alpha(s_0)$ , se, e somente se, a função distância ao quadrado  $f_d$  de  $\alpha$  à  $v$  tem singularidade do tipo  $A_{k-1}$  em  $s_0$ .

- (ii) A curva  $\alpha$  tem contato de ordem  $k$  com a reta ( $n = 2$ ) ou com o plano ortogonal à  $v$  em  $s = s_0$  ( $n = 3$ ) se, e somente se, a função altura  $f_h$  de  $\alpha$  na direção de  $v$  tem singularidade do tipo  $A_{k-1}$  em  $s_0$ .

*Demonstração.* O círculo (resp. esfera) de centro  $v \in \mathbb{R}^n$ , passando por  $\alpha(s_0)$  e a reta (resp. plano) ortogonal à  $v$  em  $s = s_0$  são dados pelas equações  $F^{-1}(0)$ , onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada, respectivamente, por:

$$F(x) = \|x - v\|^2 - \|\alpha(s_0) - v\|^2 \text{ e } F(x) = \langle x - \alpha(s_0), v \rangle$$

com  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (ver Exemplo 4.1). Dessa forma, as funções  $g = F \circ \alpha$ ,

$$g(s) = \|\alpha(s) - v\|^2 - \|\alpha(s_0) - v\|^2 \text{ e } g(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle$$

medem os contatos de  $\alpha$  com os respectivos conjuntos  $F^{-1}(0)$  em  $s = s_0$ . Note, finalmente, que determinar o número de derivadas da função  $g(s) = \|\alpha(s) - v\|^2 - \|\alpha(s_0) - v\|^2$  que se anulam em  $s = s_0$ , ou seja, determinar os tipos de  $A_k$ -singularidade de  $g$ , é equivalente a determinar o número de derivadas da função distância ao quadrado  $f_d(s) = \|\alpha(s) - v\|^2 = \langle \alpha(s) - v, \alpha(s) - v \rangle$  que se anulam no mesmo parâmetro, uma vez que o fator constante  $-\|\alpha(s_0) - v\|^2$  não interfere. De maneira análoga, o número de derivadas da função  $g(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle$  e da função altura  $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$  que se anulam em  $s = s_0$  é o mesmo. O resultado segue imediatamente do Teorema 4.4.  $\square$

É natural que o contato de curvas com círculos e esferas meçam o quão “arredondada” uma curva é, enquanto o contato com retas e planos, o quão “achatada” uma curva é. No caso de curvas planas, existem nomes especiais para pontos que são especialmente arredondados ou achatados.

**Definição 4.9.** Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva e  $p = \alpha(s_0)$ .

- (i) Dizemos que  $p$  é um **vértice ordinário** (respectivamente **degenerado**) se existe um círculo que possui contato de ordem 4 (resp. pelo menos 5) com  $\alpha$  em  $s_0$ ;
- (ii) Dizemos que  $p$  é uma **inflexão ordinária** (respectivamente **degenerada**) se existe uma reta que possui contato de ordem 3 (resp. pelo menos 4) com  $\alpha$  em  $s_0$ .

Os próximos resultados resumizam todo o estudo acerca do contato de curvas com círculos, retas, planos e esferas, relacionando-o com as singularidades das funções altura e distância ao quadrado. Mais ainda, apresentam condições geométricas sobre a curva para que cada ordem de contato ocorra.

**Teorema 4.10.** Sejam  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva ppca e  $v \in \mathbb{R}^2$  um vetor.

- (i) A Tabela 1 apresenta condições geométricas sobre a curva  $\alpha$  e o tipo de  $A_k$ -singularidade da função distância ao quadrado para que tenhamos contato de ordem até 5 entre  $\alpha$  e o círculo centrado em  $v$ , passando por  $\alpha(s)$ .

| Singularidade | Condição  | Interpretação geométrica  |
|---------------|---|---|
| $A_1$         | $v = \alpha(s) - \lambda n(s), \lambda \in \mathbb{R}$  | $v$ pertence à reta normal à $\alpha$ em $s$ e o contato de $\alpha$ em $s$ com qualquer círculo com centro em $n(s)$ é de ordem 2. |
| $A_2$         | $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s),$<br>$\kappa(s) \neq 0$                              | O único círculo passando por $\alpha$ com contato de ordem 3 com a curva em $s$ é o círculo osculador.                              |
| $A_3$         | $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$<br>$\kappa(s) \neq 0, \kappa'(s) = 0$               | O círculo osculador tem contato de ordem 4 com $\alpha$ em $s$ e $\alpha$ tem um vértice ordinário em $s$ .                         |
| $A_4$         | $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s)$<br>$\kappa(s) \neq 0, \kappa'(s) = \kappa''(s) = 0$ | O círculo osculador tem contato de ordem 5 com $\alpha$ em $s$ e $\alpha$ tem um vértice degenerado em $s$ .                        |

Tabela 1: Função distância ao quadrado para curvas em  $\mathbb{R}^2$ .

- (ii) Suponha  $v$  unitário. A Tabela 2 apresenta condições geométricas sobre a curva  $\alpha$  e o tipo de  $A_k$ -singularidade da função altura para que tenhamos contato de ordem até 4 entre  $\alpha$  e a reta ortogonal à  $v$ , passando por  $\alpha(s)$ .

| Singularidade | Condição                     | Interpretação geométrica   |
|---------------|------------------------------|--|
| $A_1$         | $t(s) \perp v$               | A reta tangente é a única que tem contato de ordem (pelo menos) 2.                       |
| $A_2$         | $\kappa(s) = 0$              | $\alpha$ possui uma inflexão ordinária em $s$ e contato de ordem 3 com a reta tangente.  |
| $A_3$         | $\kappa(s) = \kappa'(s) = 0$ | $\alpha$ possui uma inflexão degenerada em $s$ e contato de ordem 4 com a reta tangente. |

Tabela 2: Função altura para curvas em  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* A demonstração deste resultado é feita aplicando as Fórmulas de Frenet-



Serret para curvas planas e estabelecendo as condições para diferentes ordens de contato da curva com círculos e retas.

(i) Para o contato com círculos, estudaremos os tipos de  $A_k$ -singularidade da função distância ao quadrado  $f_d(s) = \|\alpha(s) - v\|^2$ .

- $f'_d(s) = 2 \langle \tau(s), \alpha(s) - v \rangle$ . Dessa forma,  $f'_d(s) = 0$  se, e somente se,  $\alpha(s) - v = \lambda \mathfrak{n}(s)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Ou seja,  $v$  pertence à reta normal à  $\alpha$  em  $s$ . Sendo assim, o contato de  $\alpha$  (em  $s$ ) com qualquer círculo cujo centro pertence à reta normal da curva é de ordem pelo menos 2, e neste caso  $f_d$  tem singularidade do tipo  $A_{\geq 1}$ , sendo exatamente  $A_1$  se o contato for exatamente de ordem 2.
- $f''_d(s) = \kappa(s) \langle \mathfrak{n}(s), \alpha(s) - v \rangle + 1$ . Temos  $f'_d(s) = f''_d(s) = 0$  se, e somente se,  $\alpha(s) - v = -\frac{\mathfrak{n}(s)}{\kappa(s)}$ ,  $\kappa(s) \neq 0$ . Sendo assim,  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathfrak{n}(s)$ . Portanto, o único círculo passando por  $\alpha(s)$  que tem contato de ordem pelo menos 3 ( $f_d$  com singularidade  $A_{\geq 2}$ ) com a curva em  $s$  é o círculo osculador.
- $f'''_d(s) = \kappa'(s) \langle \mathfrak{n}(s), \alpha(s) - v \rangle - \kappa(s)^2 \langle \alpha(s) - v, \tau(s) \rangle$ . Neste caso, temos  $f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0$  se, e somente se,  $\kappa'(s) = 0$ ,  $\kappa(s) \neq 0$  e  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathfrak{n}(s)$ .
- $f^{(4)}_d(s) = (\kappa''(s) - \kappa(s)^3) \langle \mathfrak{n}(s), \alpha(s) - v \rangle - 3\kappa(s)\kappa'(s) \langle \alpha(s) - v, \tau(s) \rangle - \kappa(s)^2$ . Finalmente, para obtermos  $f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = f^{(4)}_d(s) = 0$ , é necessário e suficiente que  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathfrak{n}(s)$ ,  $\kappa(s) \neq 0$  e  $\kappa'(s) = \kappa''(s) = 0$ .

(ii) Para o contato com retas, estudaremos os tipos de  $A_k$ -singularidade da função altura  $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$ .

- $f'_h(s) = \langle \tau(s), v \rangle$ . Temos que  $f'_h(s) = 0$  se, e somente se,  $\tau(s)$  é ortogonal a  $v$ , ou seja,  $\mathfrak{n}(s) = \pm v$ . Logo, a reta tangente à  $\alpha$  em  $s$  é a única reta que tem contato de ordem pelo menos 2 com a curva no ponto. Neste caso  $f_h$  tem singularidade do tipo  $A_{\geq 1}$ .
- $f''_h(s) = \kappa(s) \langle \mathfrak{n}(s), v \rangle$ . Dessa forma,  $f'_h(s) = f''_h(s) = 0$  se, e somente se,  $\kappa(s) = 0$ , uma vez que  $\mathfrak{n}(s) = \pm v$ .
- $f'''_h(s) = \kappa'(s) \langle \mathfrak{n}(s), v \rangle$ . Neste caso,  $f'_h(s) = f''_h(s) = f'''_h(s) = 0$  se, e somente se,  $\kappa(s) = \kappa'(s) = 0$ .

□

**Exemplo 4.11.** Considere a elipse do Exemplo 2.3 com  $a = 2$  e  $b = 1$ . Assim,  $\alpha(s) = (2 \cos s, \sin s)$ . Temos que  $\kappa'(s) = -\frac{9 \sin(2s)}{(1 + 3 \sin^2 s)^{\frac{5}{2}}}$ . Tomando  $s_0 = \frac{\pi}{4}$ , o

círculo osculador  $C_0$  passando por  $\alpha(s_0) = (\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , centrado em  $v_0 = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}n(s_0) = (\frac{3}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}})$  e raio  $\frac{1}{|\kappa(s_0)|} = \frac{4\sqrt{10}}{25}$  tem contato de ordem 3 com a elipse em  $s_0$  pois  $\kappa'(s_0) \neq 0$ . Tomando  $s_1 = \pi$ , o círculo osculador  $C_1$  passando por  $\alpha(s_1) = (-2, 0)$ , centrado em  $v_1 = \alpha(s_1) + \frac{1}{\kappa(s_1)}n(s_1) = (-\frac{3}{2}, 0)$  e raio  $\frac{1}{|\kappa(s_1)|} = \frac{1}{2}$  tem contato de ordem 4 com a elipse em  $s_1$  pois  $\kappa'(s_1) = 0$ . A evoluta desta elipse é o astroide parametrizado por  $\beta(s) = (\frac{3}{2} \cos^3 s, -3 \sin^3 s)$ , dado como o lugar geométrico dos círculos osculadores de  $\alpha$ . A Figura 5 ilustra os traços da elipse  $\alpha$ , de sua evoluta  $\beta$  e os círculos osculadores em  $s_0$  e  $s_1$ .

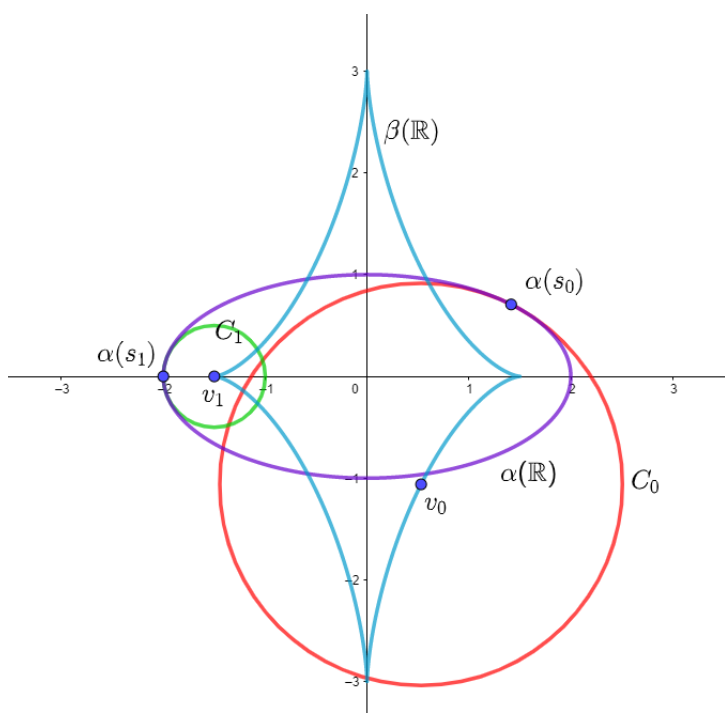


Figura 5: Elipse, círculos osculadores e evoluta do Exemplo 4.11.

**Teorema 4.12.** Sejam  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva ppca tal que  $\kappa(s) \neq 0$ , para todo  $s$  e  $v \in \mathbb{R}^3$  um vetor.

- (i) A Tabela 3 apresenta condições geométricas sobre a curva  $\alpha$  e o tipo de  $A_k$ -singularidade da função distância ao quadrado para que tenhamos contato de ordem até 4 entre  $\alpha$  e a esfera centrada em  $v$ , passando por  $\alpha(s)$ .

| Singularidade | Condição   | Interpretação geométrica  |
|---------------|--|---|
| $A_1$         | $\tau(s) \perp \alpha(s) - v$  | $\alpha(s) - v$ está contido no plano normal,<br>$v = \alpha(s) + \lambda n(s) + \mu b(s)$ , com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .<br>Toda esfera centrada no plano normal tem contato de ordem 2 com $\alpha$ em $s$ .   |
| $A_2$         | $\lambda = \frac{1}{\kappa(s)}$  | Toda esfera centrada em $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \mu b(s)$ tem contato de ordem 3 com $\alpha$ em $s$ .   |
| $A_3$         | $\mu = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2 \tau(s)}$<br>(se $\tau(s) \neq 0$ ) | Se $\tau(s) \neq 0$ , a esfera osculadora de centro de curvatura $v$ é a única que possui contato de ordem 4 com $\alpha$ em $s$ . Caso contrário, se $\tau(s) = \kappa'(s) = 0$ toda esfera centrada em $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \mu b(s)$ tem contato de ordem 4. |

Tabela 3: Função distância ao quadrado para curvas em  $\mathbb{R}^3$ .

(ii) Suponha  $v$  unitário. A Tabela 4 apresenta condições geométricas sobre a curva  $\alpha$  e o tipo de  $A_k$ -singularidade da função altura para que tenhamos contato de ordem até 5 entre  $\alpha$  e o plano ortogonal à  $v$ , passando por  $\alpha(s)$ .

| Singularidade | Condição                 | Interpretação geométrica   |
|---------------|--------------------------|--|
| $A_1$         | $\tau(s) \perp v$        | $v$ está no plano normal à $\alpha(s)$ .                                   |
| $A_2$         | $v = \pm b(s)$           | O plano osculador de $\alpha$ em $s$ é o único que tem contato de ordem 3. |
| $A_3$         | $\tau(s) = 0$            | O plano osculador tem contato de ordem 4.                                  |
| $A_4$         | $\tau(s) = \tau'(s) = 0$ | O plano osculador tem contato de ordem 5.                                  |

Tabela 4: Função altura para curvas em  $\mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 4.10, serão aplicadas as Fórmulas de Frenet-Serret, agora para curvas em  $\mathbb{R}^3$ , estabelecendo condições para diferentes ordens de contato da curva com esferas e planos.

(i) Para o estudo do contato de  $\alpha$  em  $s$  com esferas centradas em  $v \in \mathbb{R}^3$  passando por  $\alpha(s)$ , estudamos o tipo de  $A_k$ -singularidade da função distância ao quadrado

$$f_d(s) = \|\alpha(s) - v\|^2.$$

- $f'_d(s) = 2\langle \tau(s), \alpha(s) - v \rangle$ . Temos  $f'_d(s) = 0$  se, e somente se  $\alpha(s) - v$  é ortogonal ao vetor  $\tau(s)$ . Assim,  $v = \alpha(s) + \lambda n(s) + \mu b(s)$ , ou seja,  $v$  está contido no plano normal à  $\alpha$  em  $s$ . Portanto, toda esfera centrada neste plano e passando por  $\alpha(s)$  tem contato de ordem 2 com a curva.
- $f''_d(s) = 2[\kappa(s)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle + 1]$ . Temos que  $f'_d(s) = f''_d(s) = 0$  se, e somente se,  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \mu b(s)$ . Logo, toda esfera centrada em  $v$  e passando por  $\alpha(s)$  tem contato de ordem 3 com a curva.
- $f'''_d(s) = 2[\kappa'(s)\langle n(s), \alpha(s) - v \rangle + \kappa'(s)\langle -\kappa(s)\tau(s) - \tau(s)b(s), \alpha(s) - v \rangle]$ . A condição  $f'_d(s) = f''_d(s) = f'''_d(s) = 0$  se, e somente se,  $\tau(s) \neq 0$  e  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2\tau(s)}b(s)$  ou  $\tau(s) = \kappa'(s) = 0$  e  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \mu b(s)$ . Consequentemente, se  $\tau(s) \neq 0$ , então existe uma única esfera que possui contato de ordem 4 com  $\alpha$  em  $s$ : a esfera osculadora de centro  $v = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}n(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)^2\tau(s)}b(s)$ .

(ii) Por fim, para o estudo do contato de  $\alpha$  em  $s$  com planos ortogonais à direção  $v$ , analisamos as  $A_k$ -singularidades da função altura  $f_h(s) = \langle \alpha(s), v \rangle$ .

- $f'_h(s) = \langle \tau(s), v \rangle$ . Assim,  $f'_h(s) = 0$  se, e somente se,  $v$  está no plano normal à  $\alpha$  em  $s$ . Qualquer plano ortogonal à  $v$  nestas condições tem contato de ordem 2 com a curva.
- $f''_h(s) = \kappa(s)\langle n(s), v \rangle$ . Temos  $f'_h(s) = f''_h(s) = 0$  se, e somente se,  $v = \pm b(s)$ . Logo, o único plano que possui contato de ordem 3 com  $\alpha$  em  $s$  é o plano osculador neste ponto.
- $f'''_h(s) = \mp \kappa(s)\tau(s)$ . A igualdade  $f'_h(s) = f''_h(s) = f'''_h(s) = 0$  ocorre se, e somente se,  $\tau(s) = 0$ . Assim, o plano osculador tem contato de ordem 4 se, e somente se, a torção em  $s$  é nula.
- $f_h^{(4)}(s) = \mp(\kappa'(s)\tau(s) + \kappa(s)\tau'(s))$  e  $f'_h(s) = \dots = f_h^{(4)}(s) = 0$  se, e somente se  $\tau(s) = \tau'(s) = 0$ . Mais ainda, essas são as condições para que o plano osculador tenha contato de ordem 5 com a curva em  $s$ .

□

**Exemplo 4.13.** Considere novamente a hélice do Exemplo 2.4. Tome  $s_0 = 0$ . A esfera osculadora  $\varepsilon_0$  centrada em  $v_0 = \alpha(0) + \frac{1}{\kappa(0)}n(0) = (-\frac{32}{3}, 0, 0)$  (neste caso  $\kappa'(s) = 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  pois a curvatura é constante) passando por  $\alpha(0) = (6, 0, 0)$  e raio  $\frac{50}{3}$  tem contato de ordem 4 com a hélice em  $s_0$ . O plano osculador  $\Gamma_0$  de  $\alpha$  em  $s_0$ , dado pela equação  $-4y + 3z = 0$  tem contato de ordem 3 com a curva pois  $\tau(s_0) \neq 0$ . Mais

ainda, para todo  $s$  real, o contato de  $\alpha$  com todos os seus planos osculadores é de ordem 3 pois  $\tau(s) \neq 0$ . A Figura 6 ilustra a hélice  $\alpha$ , o plano osculador  $\Gamma_0$  (em verde) e a esfera osculadora  $\varepsilon_0$  (em vermelho).

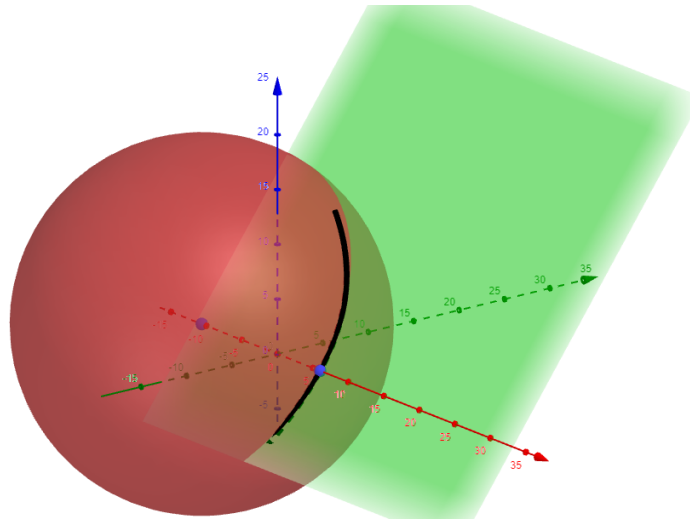


Figura 6: Hélice, esfera osculadora e plano osculador do Exemplo 4.13.

## 5 Conclusão

A Teoria de Singularidades, muito embora seja uma linha jovem de pesquisa em Matemática, já se provou de grande valia. Em especial, no estudo da geometria diferencial de variedades regulares e singulares é uma ferramenta bastante útil.

Neste artigo, mostramos como aplicá-la de modo a investigar a geometria de curvas regulares no plano e no espaço, relacionando o contato destas curvas com outros objetos através do estudo das  $A_k$ -singularidades de funções especiais (altura e distância ao quadrado).

## 6 Agradecimentos

O segundo autor agradece ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica nas Ações Afirmativas – PIBIC-Af/CNPq, edital nº 007/2020/PROPE/PROAE (2020 – 2021). A terceira autora agradece à CAPES pelo apoio financeiro durante o período em que foi aluna do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do CAP - Ouro Branco.

## Referências

- [1] Pedro Benedini Riul, Maria Aparecida Soares Ruas, and Raúl Oset Sinha. The geometry of corank 1 surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *The Quarterly Journal of Mathematics*, 70(3):767–795, 2019.
- [2] Pedro Benedini Riul, Maria Aparecida Soares Ruas, and Andrea de Jesus Sacramento. Singular 3-manifolds in  $\mathbb{R}^5$ . *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 116(1):1–18, 2022.
- [3] Pedro Benedini Riul and Raúl Oset Sinha. The flat geometry of the  $I_1$  singularity:  $(x, y) \mapsto (x, xy, y^2, y^3)$ . *J. Singul*, 21:1–14, 2020.
- [4] Pedro Benedini Riul and Raúl Oset Sinha. Relating second order geometry of manifolds through projections and normal sections. *Publicacions matemàtiques*, 65(1):389–407, 2021.
- [5] James W Bruce and Peter J Giblin. *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. Cambridge University Press, 2 edition, 1992.
- [6] James W Bruce and Janet M West. Functions on a crosscap. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 123, pages 19–39. Cambridge University Press, 1998.
- [7] Jorge Delgado and Katia Rosenvald Frensel Delgado. *Notas de Geometria diferencial I*. UFF, <https://www.professores.uff.br/katiafrensel/2017/08/30/disciplina-geometria-diferencial-i/>, 2017.
- [8] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.
- [9] Christopher G Gibson. *Singular points of smooth mappings*. Number 25. Pitman publishing, 1979.
- [10] Shyuichi Izumiya, Maria del Carmen Romero Fuster, Maria Aparecida Soares Ruas, and Farid Tari. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*. World Scientific, 2016.
- [11] Elon L Lima. *Análise real vol. 2 coleção matemática universitária*, impa, 2004.
- [12] Martin Lipschutz. *Differential geometry*. McGraw-Hill Book Company, 1969.
- [13] John N Mather. Stability of  $C^\infty$  mappings, III. finitely determined map-germs. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 35:127–156, 1968.
- [14] James Montaldi. *Contact with applications to submanifolds of  $\mathbb{R}^n$* . PhD thesis, The University of Liverpool (United Kingdom), 1983.

- [15] Marina Maria Moreira. Geometria diferencial de curvas em espaços euclidianos e  $\mathcal{R}$ -equivalência. Master's thesis, Universidade Federal de São João del Rei (UFSJ - CAP), [https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat\\_tcc.php?id1=6403&id2=171054137](https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6403&id2=171054137), 2021.
- [16] Kentaro Saji, Masaaki Umehara, and Kotaro Yamada. The geometry of fronts. *Annals of mathematics*, pages 491–529, 2009.
- [17] Raúl Oset Sinha and Farid Tari. On the flat geometry of the cuspidal edge. *Osaka Journal of Mathematics*, 55(3):393–421, 2018.
- [18] Ketí Tenenblat. *Introdução à geometria diferencial*. Editora Blucher, 2008.