Equidistribuição e Lei de Benford em Progressões Geométricas

Heric Corrêa da Silva correaheric2@gmail.com

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo

Neste trabalho, provamos que toda sequência formada pelas potências de um número natural (não nulo e diferente de qualquer potência de 10) começa com qualquer combinação finita de dígitos e satisfaz a Lei do Primeiro Dígito de Newcomb-Benford.

Palavras-chave

Equidistribuição, Lei de Benford.

1 Introdução

Um problema clássico em matemática discutido por Arnold e Avez [1, pg 135] indaga, se listando todas as potências de 2 em ordem crescente

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$$

e destacando o primeiro dígito de cada elemento desta lista

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, \ldots$$

será que o número 7 aparece em algum momento? Além disso, será que o dígito 7 tende a aparecer com uma frequência maior do que o dígito 8? A resposta positiva para a primeira pergunta pode ser obtida por força bruta calculando $2^{46} = 70368744177664$, mas a segunda não é intuitiva e tampouco imediata uma vez que o número 8 aparece já no 4º elemento da sequência, enquanto o 7 só depois do 47º termo.

Esse questionamento pode ser investigado utilizando técnicas bem gerais de sistemas dinâmicos e teoria ergódica. Contudo, neste trabalho utilizamos uma abordagem com viés puramente na análise, como o conceito e os critérios de Equidistribuição publicado em [5]. Obtemos que, não apenas as potências de 2, mas todas as potências de números naturais (que seja diferente de qualquer potência de 10) começam com qualquer combinação finita de dígitos e satisfazem uma conhecida lei sobre o primeiro dígito de um conjunto de dados: a Lei de Benford. Em síntese, mostraremos neste os seguintes resultados.

Teorema 1.1. *Seja b um número natural não nulo e diferente de qualquer potência de 10. Então para todo natural não nulo d existe algum n natural tal que b^n começa com d.*

A tabela a seguir exprime o significado do teorema, para o caso $b = 2$:

$\forall\, d$	$\exists\, n$	2^n
51	9	$2^9 =$ **51**2
335	25	$2^{25} =$ **335**54432
4 294 967	32	$2^{32} =$ **4294967**296
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Além disso, retomando ao problema para os primeiros dígitos da sequência, conforme tabela a seguir

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
2^n	**2**	**4**	**8**	**1**6	**3**2	**6**4	**1**28	**2**56	**5**12	**1**024	**2**048	...

se continuarmos até os 100 primeiros números obtemos precisamente a seguinte proporção:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P^{100}(d)$	30%	17%	13%	10%	7%	7%	6%	5%	5%

Em que

$$P^{100}(d) = \frac{\text{Quantidade de números que começam com } d \text{ até as 100 primeiras potências}}{100}.$$

Ademais, uma vez que uma sequência possui infinitos termos, queremos avaliar como essa proporção se comporta à medida que a quantidade de termos tende à infinito. Isto é, pondo

$$P^{m}(d) := \frac{\text{Quantidade de números que começam com } d \text{ até as } m \text{ primeiras potências}}{m},$$

qual o valor (se é que existe) do limite $\lim\limits_{m\to\infty} P^m(d)$?

Veremos que o limite existe e permanece próximo da distribuição da tabela anterior. Precisamente, temos para cada $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\lim_{m\to\infty} P^m(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right). \qquad (1)$$

Um conjunto de números cuja distribuição do primeiro dígito é dada pela equação (1) é dito satisfazer a *lei de Benford* ou a *lei do primeiro dígito*, ver, por exemplo, referências [2] e [3]. Essa distribuição está presente em várias fontes de casos reais, como, contas de energia elétrica, quantidade das populações de cidades de um país, primeiros dígitos dos números da sequência de Fibonacci, entre outros. [1] Nessa direção, mostraremos o seguinte Corolário:

Corolário 1.2. *A sequência $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada pelas potências de um número natural não nulo b, diferente de qualquer potência de 10, satisfaz a Lei de Benford.*

2 Preliminares em aritmética

Lema 2.1. *Seja b um número natural não nulo e que não seja uma potência de 10. Então o logaritmo de b na base 10 é um número irracional.*

Demonstração. Dado $b \in \mathbb{N} - \{0\}$, e que não seja potência de 10, suponhamos por absurdo que $\log_{10} b$ é racional, ou seja,

$$\log_{10} b = \frac{p}{q},$$

com p e $q \neq 0$ inteiros, primos entre si. Então, por definição de logaritmo, segue que $b = 10^{\frac{p}{q}}$. Assim, $b^q = 10^p$. Isso implica, pelo Teorema Fundamental da Aritmética[2], que b e 10 possuem os mesmo fatores primos. Mas isso é uma contradição uma vez que é assumido que b é diferente de qualquer potência de 10. Portanto, o logaritmo de b na base 10 é um número irracional. □

Lema 2.2. *Seja d um número natural não nulo. Então o número de algarismos de d, denotado por N_d, é tal que*

$$N_d = 1 + \lfloor \log_{10} d \rfloor \quad e \quad N_d \geq \log_{10}(d+1).$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a parte inteira.

Demonstração. Seja $d \in \mathbb{N}$. Usando o sistema decimal, existe n tal que podemos tomar números inteiros d_i, $0 \leq d_i < 10$, $i = 0, 1, \ldots, n$ tal que $d_n \neq 0$ e

$$d = \sum_{i=0}^{n} d_i 10^i.$$

Além disso, cada d_i é chamado dígito de d e, por definição, $N_d = n+1$. Afirmamos que

$$10^{N_d - 1} \leq d < 10^{N_d}.$$

[1] O site https://testingbenfordslaw.com/https://testingbenfordslaw.com/ (acessado pelos autores no dia 4/10/2021) tem várias fontes reais com a distribuição dos primeiros dígitos

[2] Unicidade da decomposição de números inteiros em fatores primos a menos de permutação.

Com efeito, como $d_i \geq 0$ para todo índice i temos

$$10^n \leq \sum_{i=0}^{n} d_i.10^i$$

satisfazendo a igualdade se, e só se, $d_n = 1$ e $d_i = 0$ para todo $i < n$. Por outro lado,

$$\sum_{i=0}^{n} d_i 10^i \leq \sum_{i=0}^{n} 9.10^i = 9.\sum_{i=0}^{n} 10^i = 9.\frac{10^{n+1}-1}{10-1} = 10^{n+1} - 1 < 10^{n+1}.$$

Portanto, $10^{N_d-1} \leq d < 10^{N_d}$, concluindo a afirmação. Assim, tomando logarítimo decimal, temos que $N_d - 1 \leq \log_{10} d < N_d$. Como $\log_{10} d$ fica limitado entre dois números naturais consecutivos, segue que $N_d - 1 = \lfloor \log_{10} d \rfloor$. Inferindo que $N_d = 1 + \lfloor \log_{10} d \rfloor$. Além disso, como

$$d = \sum_{i=0}^{n} d_i 10^i \leq 9.10^n + 9.10^{n-1} + ... + 9.10^1 + 9,$$

tem-se que

$$d + 1 \leq 10^{n+1} = 10^{N_d}.$$

Consequentemente $\log_{10}(d+1) \leq N_d$. $\square$

Proposição 2.3. *O Teorema 1.1 é equivalente à seguinte proposição: Dado um número arbitrário d natural, não nulo e diferente de qualquer potência de 10. Então para todo número b natural não nulo, existe um n natural tal que a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$0 \leq \log_{10}\left(\frac{d}{10^{N_d-1}}\right) \leq \mathrm{fr}(n \log_{10} b) < \log_{10}\left(\frac{d+1}{10^{N_d-1}}\right) \leq 1.$$

onde $\mathrm{fr}(\cdot)$ *denota a parte fracionária.*[3]

Demonstração. Primeiro, note que b^n começa com o número $d \in \mathbb{N}$ se, e somente se,

$$b^n = d \cdot 10^k + r$$

com $0 \leq r < 10^k$, para algum k natural. Com isso, temos que b^n começa com d se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$d.10^k \leq b^n < (d+1)10^k$$

[3] $\mathrm{fr}(x) = x - \lfloor x \rfloor$, para $x \in \mathbb{R}$

que é verdade se, e só se,

$$\log_{10} d + k \leq n \log_{10} b < \log_{10}(d+1) + k.$$

Equivalentemente, subtraindo k de ambos os lados obtém-se

$$\log_{10} d \leq n \log_{10} b - k < \log_{10}(d+1),$$

subtraindo agora $N_d - 1$ temos

$$\log_{10} d - N_d + 1 \leq n \log_{10} b - k - N_d + 1 < \log_{10}(d+1) - N_d + 1.$$

Isto é,

$$\log_{10}\left(\frac{d}{10^{N_d-1}}\right) \leq n \log_{10} b - k - N_d + 1 < \log_{10}\left(\frac{d+1}{10^{N_d-1}}\right).$$

Pelo Lema 2.2, uma vez que $N_d = \lfloor \log_{10} d \rfloor + 1$ segue que $0 \leq \log_{10} d - \lfloor \log_{10} d \rfloor = \log_{10}\left(\frac{d}{10^{N_d-1}}\right)$. Ademais, como $\log_{10}(d+1) \leq N_d$, temos que $\log_{10}\left(\frac{d+1}{10^{N_d-1}}\right) = \log_{10}(d+1) - N_d + 1 < 1$. Ou seja,

$$0 \leq n \log_{10} b - k - N_d + 1 < 1.$$

Portanto, $n \log_{10} b - k - N_d + 1 = \operatorname{fr}(n \log_{10} b)$. Consequentemente,

$$0 \leq \log_{10}\left(\frac{d}{10^{N_d-1}}\right) \leq \operatorname{fr}(n \log_{10} b) < \log_{10}\left(\frac{d+1}{10^{N_d-1}}\right) < 1.$$

□

3 Equidistribuição de Weyl

Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ uma sequência de números reais, doravante denotada por $(x_n)_n$. Sempre podemos, associada à esta, construir uma nova sequência

$$(\operatorname{fr}(x_n))_n = (\operatorname{fr}(x_1), \operatorname{fr}(x_2), \ldots, \operatorname{fr}(x_n), \ldots)$$

formada pelas partes fracionárias de cada elemento x_n.

Note que todos os elementos da sequência $(\operatorname{fr}(x_n))_n$ pertencem ao intervalo $[0, 1)$. Com isso, dado um subintervalo $(a, b) \subset [0, 1)$, seja $P^m_{(a,b)}$ um subconjunto dos números naturais definido pela igualdade

$$P^m_{(a,b)} = \{j \in \mathbb{N} \mid j < m,\ \operatorname{fr}(x_j) \in (a, b)\}.$$

Sem grande rigor, estamos apenas contabilizando a quantidade de vezes em que a parte fracionária dos elementos da sequência $(x_n)_n$ caem em um subintervalo pré-determinado (a, b).

Definição 3.1. *Uma sequência de números reais $(x_n)_n$ é dita **equidistribuída**, ou **uniformemente densa** no intervalo $[0, 1)$ se para qualquer intervalo $(a, b) \subset [0, 1]$ vale*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \# P^m_{(a,b)} = b - a, \tag{2}$$

onde $\#$ indica a quantidade de elementos de um conjunto finito.

Noutras palavras, uma sequência é equidistribuída no intervalo $[0, 1)$ quando a razão da quantidade de vezes que a sequência pertence à um subintervalo (a, b) é igual ao comprimento deste intervalo. Em um contexto probabilístico, isso significa que escolhendo ao acaso um elemento da sequência, a probabilidade de que ele esteja dentro do intervalo (a, b) é precisamente igual ao comprimento deste intervalo.

Observação 3.2. A equação (2) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \chi_{(a,b)}(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x)\, dx. \tag{3}$$

Na qual $\chi_{(a,b)}$ é a função indicadora do intervalo (a, b), i.e,

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a, b), \\ 0 & \text{se } x \notin (a, b). \end{cases}$$

Proposição 3.3 (Critérios de Weyl parte 1)**.** *Considerando a sequência de números reais $(x_n)_n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(x_n)_n$ *é equidistribuída.*

(b) Para cada função Riemann-integrável $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ vale

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Ideia. Uma sequência ser equidistribuída significa que a sequência das partes fracionárias de seus elementos, quando a quantidade de índices tende ao infinito, se distribuem de forma uniforme ao longo do intervalo $[0, 1)$. Dessa forma, podemos considerar que estamos tomando partições cada vez mais refinadas no intervalo, o que justifica, por definição de integral de Riemann, o item *(b)* ser equivalente ao item *(a)*.

$[0,1) \subset \mathbb{R}$

Demonstração. Assuma que *(a)* seja verdadeiro, então dado $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ uma função integrável (à Riemann) arbitrária, podemos considerar, sem perda de generalidade, que ela só toma valores reais (caso contrário, basta analisar a parte real e a imaginária separadamente). Seja $I = (a,b) \subset [0,1)$, note que da equação (3) segue de imediato que *(b)* vale para funções indicadoras de intervalos. Agora, dados λ_1 e λ_2 dois números reais e f_1 e f_2 funções para as quais valem *(b)*, temos

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathrm{fr}(x_j)) = \lambda_1 \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_1(\mathrm{fr}(x_j)) + \lambda_2 \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_2(\mathrm{fr}(x_j))$$
$$\xrightarrow{m\to\infty} \lambda_1 \int_0^1 f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\,dx.$$

Concluindo que *(b)* vale para uma $\mathbb{R}$-combinação linear de funções indicadoras e, consequentemente para todas as funções escadas[4] sobre $[0,1]$. Por fim, considere $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária integrável à Riemann. Então, por definição de integrabilidade, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição do intervalo suficientemente refinado tal que existem funções escadas $f_1, f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $f_1 \leq f \leq f_2$ pontualmente e

$$\int_0^1 (f_2 - f_1)(x)\,dx < \epsilon$$

Como $f \leq f_2$ temos que

$$\int_0^1 f(x) - f_1(x)\,dx \leq \int_0^1 f_2(x) - f_1(x)\,dx \leq \epsilon,$$

Isso implica que

$$\int_0^1 f(x) - \epsilon\,dx \leq \int_0^1 f_1(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_1(\mathrm{fr}(x_j)).$$

Então para m suficientemente grande

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \epsilon \leq \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f_1(\mathrm{fr}(x_j)) \leq \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)),$$

[4] $f(x) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{(a_i,b_i)}(x)$.

procedendo da mesma forma, obtém-se

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) \leq \int_0^1 f(x)\ dx + \epsilon.$$

Provando que

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) - \int_0^1 f(x)\ dx\right| \leq \epsilon.$$

Ou seja,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Concluindo que *(a)* implica *(b)*.

A recíproca, *(b)* implica *(a)*, é imediata uma vez que a função indicadora $\chi_{(a,b)}$, para qualquer subintervalo (a,b), é integrável. Então segue da hipótese que a equação (3) é verdadeira. □

Por simplicidade, vamos considerar o seguinte abuso de notação: para cada $x \in \mathbb{R}$, defina $e(x) := e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i\ \mathrm{sen}(2\pi x)$.

Proposição 3.4 (Critérios de Weyl parte 2)**.** *Considerando a sequência de números reais $(x_n)_n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

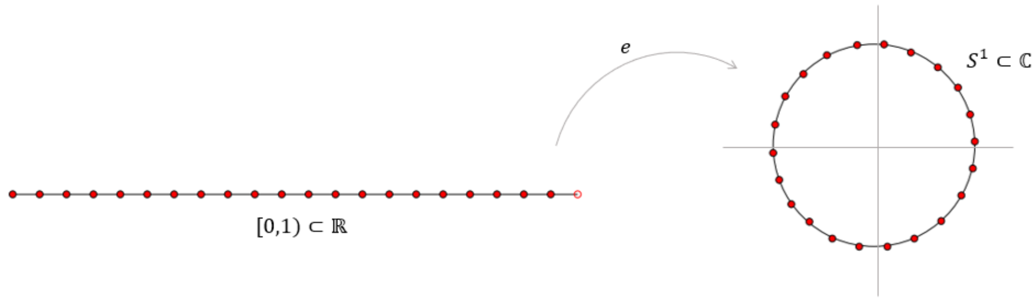
(b) Para cada função Riemann-integrável $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ vale

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 f(x)\ dx.$$

(c) Para cada k inteiro não nulo,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e(kx_j) = 0.$$

Ideia. O item *(c)* usa que o fato da exponencial transformar de forma contínua, o intervalo $[0,1) \subset \mathbb{R}$ na circunferência $S^1 \subset \mathbb{C}$ conforme imagem a seguir.



Logo, aproveitando a simetria de S^1, a distribuição uniforme da sequência nos permite intuir que o somatório dos elementos da sequência no plano complexo tende para 0.

Demonstração. Assuma *(b)* como hipótese. Então dado um $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, considere $f(x) := e(kx)$. Como $f(x+n) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, segue que $f(\mathrm{fr}(x)) = f(x)$.[5] Logo, usando a hipótese assumida, teremos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e(kx_j) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e(kx)dx = 0.$$

Concluindo que *(c)* é válido.

Assuma agora *(c)*. Como feito na Proposição 3.3, é suficiente mostrar que *(b)* vale para funções com contradomínio real. Primeiro, mostraremos que vale para funções contínuas. Se $f(x) \equiv a_0$ é a função constante igual a $a_0 \in \mathbb{R}$, a igualdade em *(b)* é verdadeira, de fato

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} a_0 = a_0 = \int_0^1 a_0 dx.$$

Além disso, *(c)* implica que *(b)* também é verdadeiro para as partes reais e imaginárias de funções da forma $f(x) = e(kx)$ com $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Consequentemente, *(b)* vale para todos os polinômios trigonométricos da forma

$$q(x) = a_0 + (a_1 \cos 2\pi kx + b_1 \mathrm{sen} 2\pi kx) + \ldots + (a_n \cos 2\pi kx + b_n \mathrm{sen} 2\pi kx).$$

Observe ainda que $\displaystyle\int_0^1 q(x) = a_0$. Considere uma função arbitrária $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\epsilon > 0$, pelo teorema de Stone-Weierstrass [4, pg 138-144] existe um polinômio trigonométrico q tal que

$$q - \frac{\epsilon}{2} \le f \le q + \frac{\epsilon}{2}.$$

[5] De fato, observe que $x = \mathrm{fr}(x) + \lfloor x \rfloor$ onde $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ é a parte inteira de x.

Fazendo $f_1 := q - \epsilon/2$ e $f_2 := q + \epsilon/2$, temos $f_1 \leq f \leq f_2$ e

$$\int_0^1 (f_2 - f_1)(x)\, dx \leq \epsilon.$$

Assim como na demonstração da Proposição 3.3, isso implica

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f(\mathrm{fr}(x_j)) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Concluindo que *(b)* é verdade no caso de f ser contínua. A fim de estender o resultado para funções integráveis, vamos mostrar primeiro que o resultado é válido para funções escadas e usar este fato para provar que é válido para funções integráveis. Considere $s\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função escada. De fato, s é integrável e, portanto, pode ser aproximada em área por funções contínuas[6]. Assim, existem f_1 e f_2 contínuas tais que $f_1 \leq s \leq f_2$ pontualmente e

$$\int_0^1 f_2(x) - f_1(x)\, dx \leq \epsilon.$$

Novamente, repetindo o procedimento da demonstração da proposição 3.3, segue que *(c)* vale para funções escadas. Portanto, como qualquer função integrável pode ser aproximada em área por funções escadas (por definição de integrabilidade), o item *(c)* é verdadeiro para funções integráveis. □

4 Resultados e Discussões

4.1 Demonstração do Teorema 1.1

Proposição 4.1. *Seja α um número irracional, então a sequência $(\alpha n)_n$ é equidistribuída.*

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, como $\alpha \notin \mathbb{Q}$, segue que $k\alpha$ não é um número inteiro. Portanto, $1 - e(k\alpha) \neq 0$ e, para cada inteiro m, obtemos

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e(k\alpha j)\right| = \left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} e(k\alpha)^j\right| = \frac{1}{m}\frac{|1-e(k\alpha)^m|}{|1-e(k\alpha)|} \leq \frac{1}{m}\frac{2}{|1-e(k\alpha)|} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

onde a primeira igualdade é consequência da fórmula de Moivre. Logo, pelo item *(c)*

[6]Uma função escada possui finitos pontos de descontinuidades, para construir uma função contínua basta contruí-la de forma que seja igual à função escada "longe"das descontinuidades e, nas descontinuidades, basta interpolar linearmente com inclinação suficientemente próxima da vertical para minimizar a diferença entre as áreas.

dos critérios de Weyl, a sequência $(n\alpha)_n$ é equidistribuída. $\square$

Vamos demonstrar o teorema 1.1. Pela Proposição 2.3 temos que o Teorema é equivalente a responder: Dado $d \in \mathbb{N}$, definindo um intervalo

$$I_d := \left(\log_{10} \frac{d}{10^{N_d - 1}}, \log_{10} \frac{d+1}{10^{N_d - 1}} \right),$$

será se existe m_0 natural tal que $\mathrm{fr}(m_0 \log_{10} b)$ pertence à I_d? De fato, pelo Lema 2.1 temos que $\log_{10} b$ é irracional, então a Proposição 4.1 garante que a sequência $(m \log_{10} b)_m$ é equidistribuída. Em particular, para o intervalo I_d, temos

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \# P^m_{I_d} = \mathrm{comprimento}(I_d). \tag{4}$$

Dessa forma, como I_d é um intervalo não degenerado, temos que existem infinitos m tais que $\# P^m_{I_p} \neq 0$ e, consequentemente, o conjunto $P^m_{I_d}$ não é vazio, implicando que existe $m_0 \leq m$ tal que $\mathrm{fr}(m_0 \log_{10} b) \in I_d$. Concluindo a demonstração.

4.2 Demonstração do Corolário 1.2

A demonstração acima garante a existência de qualquer possibilidade de combinação de dígitos para iniciar qualquer potência não nula $b \in \mathbb{N} - \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para verificar agora a validade de Lei de Benford para $(b^n)_n$, basta considerar $d = 1, 2, \ldots, 9$. Veja que, desta forma,

$$\mathrm{comprimento}(I_d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right).$$

Além disso, pela Proposição 2.3, b^n começa com d se, e só se, $\mathrm{n} \log_{10} \mathrm{b} \in I_d$. Já sabemos que isso acontece, mas note que a porcentagem das vezes que ocorrem é dado pela razão $\frac{1}{m} \# P^m_{I_d}$ que, no infinito, é igual ao comprimento de I_d.

5 Agradecimentos

Este trabalho é fruto de um projeto de iniciação científica realizado na UFMG, orientado e co-orientado respectivamente por José Antônio Miranda e Carlos Maria Carballo iniciado em meados de 2020 e finalizado em meados de 2021. Agradeço-os por todas as discussões e ensinamentos. Agradeço também minha amiga Janaíne Mesquita Martins por ter elaborado e disponibilizado as figuras que aparecem na seção 3. Por fim, agradeço à minha orientadora de mestrado, professora Katrin Gelfert, por todos os ensinamentos e motivação, sobretudo em relação à prática de escrita.

Referências

[1] V. I. Arnol'd and A. Avez. *Ergodic problems of classical mechanics*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968. Translated from the French by A. Avez.

[2] F. Benford. The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 78:551–572, 1938.

[3] Arno Berger, Leonid A. Bunimovich, and Theodore P. Hill. One-dimensional dynamical systems and Benford's law. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1):197–219, 2005.

[4] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[5] Hermann Weyl. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.*, 77(3):313–352, 1916.