Número equilibrado aritmético ou geométrico

Eudes Antonio Costa eudes@uft.edu.br
Universidade Federal do Tocantins, Arraias, To, Brasil

Bruno Costa Santos costa.santos@uft.edu.br
Acadêmico de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias, To, Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos uma aplicação para as médias aritméticas e geométricas no contexto de números equilibrados, tema abordado em matemática recreativa ou problemas olímpicos, veja [8, 12]. No trabalho [3] foi apresentado alguns resultados sobre um número a aritmético ou equilibrado pela média aritmética. Neste estendemos o conceito de número equilibrado ao número equilibrado pela média geométrica ou geométrico. Aqui exploramos algumas propriedades do *número equilibrado aritmético* ou *geométrico*. Em destaque, mostramos que um número n é aritmético e geométrico ao mesmo tempo, apenas quando n for monodígito.

Palavras-chave

Aritmético, Geométrico, Monodígito.

1 Introdução

Nestas notas consideramos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, e por conveniência diremos apenas n é um número (natural). Considere n um número não nulo representado no sistema posicional decimal (base 10), ou seja, um número com $k + 1$ algarismos (dígitos), e escrito na forma, $n = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$, isto é, $n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$ é um algarismo e $a_k \neq 0$. Detalhes adicionais podem ser encontrados em diversos livros de Aritmética, por exemplo [5, 7, 9, 10]. No arcabouço conceitual do leitor, além da representação de um número no sistema posicional decimal, esperamos que o mesmo domina o conceito referente às médias aritméticas e geométricas, o qual pode ser consultado em [2, 6, 11].

Definição 1. Sejam a e g números:

- a é equilibrado pela média aritmética se um dos seus algarismos é média aritmética dos demais, ou seja, para algum a_i temos

$$A_i(a) = \frac{(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) - a_i}{k} = a_i \ ; \tag{1}$$

- g é equilibrado pela média geométrica se um dos seus algarismos é a média geométrica dos demais, ou seja, para algum a_j temos

$$G_j(g) = \left[\frac{1}{a_j}(a_k \cdot a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0)\right]^{1/k} = a_j \ . \tag{2}$$

Por conveniência e simplicidade, no primeiro caso diremos que a é um número aritmético, e a_i é o algarismo aritmético. No segundo diremos que g é um número geométrico, e a_j é o algarismo geométrico. Em ambos os casos, utilizaremos a notação $n^{(i)}$ para indicar que o número n é equilibrado aritmético ou geométrico; e que o algarismo a_i, $i \in \{0, \ldots, k\}$, é aritmético ou geométrico, isto é, corresponde à média aritmética ou geométrica, respectivamente, dos demais algarismos.

Exemplo 1.

- Veja que o número $a^{(1)} = 456$ é aritmético, pois

$$5 = A_1(456) = \frac{4+6-5}{2} \ .$$

- Já o número $g^{(0)} = 193$ é geométrico, pois

$$3 = G_0(193) = \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 9 \cdot 3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 \cdot 9} = 3 \ .$$

- Enquanto que os números $n = 2222$, $n = \underbrace{555\cdots 55555}_{2022 \text{ vezes}}$ ou $n = \underbrace{99\cdots 9}_{k \geq 2 \text{ vezes}}$ são aritmético e geométrico.

Na proposição 10, veremos que apenas os números *monodígitos* são aritmético e geométrico ao mesmo tempo. Lembramos que *monodígitos* são números formados pela repetição de um dígito (algarismo), com qualquer quantidade de algarismos, detalhes adicionais podem ser encontrados em [4] .

A definição 1, primeira parte, é inspirada e generalizada de problemas do Banco de Questões da OBMEP[8]. A segunda parte é um estudo que fizemos com a adaptação ou substituição na *média* utilizada, usamos a média geométrica ao invés da aritmética.

A motivação para esse trabalho surgiu da exploração conceitual, resolução e discussão de questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) na pesquisa para elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso do segundo autor. Apresentamos algumas dessas questões e suas resoluções na seção 2. Na seção 3 apresentamos por exemplos e resultados a investigação teórica que fundamentou o Trabalho de Conclusão de Curso.

2 Problemas Motivadores

Analisando algumas questões de olimpíadas de matemáticas no Banco de Questões da OBMEP 2008 nos deparamos com a definição de números equilibrados pela média aritmética, para números formados por 3 algarismos, na qual também pedia para determinar a quantidade deles.

Questão 1. [8, 2008] Quantos números equilibrados pela média aritmética existem com 3 algarismos?

Resolução: Consideremos um número equilibrado com os três algarismos distintos e diferentes de zero; com estes algarismos obtemos 6 números equilibrados. Para isso basta trocar os algarismos de posição (permutar os algarismos). Por exemplo:

$$123; 132; 213; 231; 312; 321 \ .$$

Se um dos 3 algarismos do número equilibrado é 0, então com estes algarismos obtemos apenas 4 números equilibrados, pois o 0 não pode ocupar a posição da centena. Por exemplo:

$$102; 120; 201; 210 \ .$$

Agora, para listar estes números, vamos variar apenas os algarismos da centena e da dezena. Fixamos que o algarismo da unidade será a média dos 2 algarismos, e contamos as permutações. Observe que os 2 algarismos (centena e dezena) são ambos pares ou ímpares. Assim, os possíveis números equilibrados são:

- iniciando com 1 temos:
$$111; 132; 153; 174; 195;$$
e o total de números equilibrados, considerando as permutações, iniciando com 1 é $1 + (4 \times 6) = 25$;

- iniciando com 2 temos:
$$201; 222; 243; 264; 285;$$
e o total de números equilibrados iniciando com 2 é $(4 + 1 + 3 \times 6) = 23$;

- iniciando com 3 temos:
$$333; 354; 375; 396;$$
e o total de números equilibrados iniciando com 3 é $(1 + 3 \times 6) = 19$;

- iniciando com 4 temos:
$$402; 444; 465; 486;$$
e o total de números equilibrados iniciando com 4 é $(4 + 1 + 2 \times 6) = 17$;

- iniciando com 5 temos:
$$555; 576; 597;$$
e o total de números equilibrados iniciando com 5 é $(1 + 2 \times 6) = 13$;
- iniciando com 6 temos: $603; 666; 687$; e o total de números equilibrados iniciando com 6 é $(4 + 1 + 6) = 11$;
- iniciando com 7 temos: $777; 798$; e o total de números equilibrados iniciando com 7 é $(1 + 6) = 7$;
- iniciando com 8 temos $804; 888$ e o total de números equilibrados iniciando com 8 é $(4 + 1) = 5$;
- iniciando com 9 é apenas o 999 e o total de números equilibrados iniciando com 9 é 1.

Portanto a quantidade total de números equilibrados com três algarismos é 121, visto que $25 + 23 + 19 + 17 + 13 + 11 + 7 + 5 + 1 = 121$.

E no Banco de Questões da OBMEP 2007, a questão seguinte nos motivou a estender o conceito de *número equilibrado* para a média geométrica.

Questão 2. [8, 2007] Considere n um número com 2 ou mais algarismos. Considere $P(n)$ o produto dos algarismos do número n. Por exemplo: $P(58) = 5 \cdot 8 = 40$ e $P(319) = 3 \cdot 1 \cdot 9 = 27$. Determine:

1. os números naturais menores que 1000 cujo produto de seus algarismos é 12;
2. os números naturais menores que 199 que satisfazem $P(n) = 0$;
3. quais números naturais menores que 200 satisfazem a desigualdade $37 < P(n) < 45$;
4. dentre os números de 1 a 250, qual o número cujo produto de seus algarismos é o maior.

Resolução: Veja que $n = a_1a_0$ ou $n = a_2a_1a_0$ com $a_i \in D$, para $i \in \{0, 1, 2\}$.

1. Temos que $n < 1000$ tal que $P(n) = 12$. Como $12 = 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Assim temos:
   (a) 4 números com 2 algarismos, a saber: 26, 62, 34 e 43;
   (b) 15 números com 3 algarismos, a saber:
      - 6 com os algarismos $1, 2$ e 6: 126, 162, 216, 261, 612 e 621 ;

- 6 com os algarismos $1, 3$ e 4: 134, 143, 314, 341, 413 e 431;
- 3 com os algarismos 2, 2 e 3: 223, 232 e 322.

2. Se $P(n) = 0$ então o produto de seus algarismos é igual a zero, ou seja,

$$a_1 \cdot a_0 = 0 \text{ e } a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 = 0 \,,$$

logo pelo menos um dos algarismos a_i do número $n < 199$ é zero.

   (a) temos 9 números do tipo $a_1 0$, pois $a_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$;

   (b) temos 10 números do tipo $10a_0$, pois $a_0 \in D$;

   (c) temos 10 números do tipo $1a_1 0$, pois $a_1 \in D$.

   Assim, temos um total de 28 números, pois o 100 foi contado 2 vezes.

3. Queremos encontrar os números n menores do que 200, cujo produto de seus algarismos seja maior do que 37 e menor do que 45. Em primeiro lugar, note que não existem números cujo produto de seus algarismos sejam $38, 39, 41, 43$ e 44 porque esses números não podem ser escritos como produto de dois ou três algarismos. Restam, então: 40 e 42. Vejamos as possibilidades, números menores do que 200 cujo produto dos algarismos é 40 temos: 58, 85, 158 e 185. E os números menores do que 200 cujo produto dos algarismos é 42, temos: 67, 76, 167 e 176.

4. Se tivermos n da forma $a_2 a_1 a_0$ então os maiores algarismos possíveis são $a_2 = 2$, $a_1 = 4$ e $a_0 = 9$ e $P(249) = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$. Agora para $n = a_1 a_0$ temos $a_1 = 9$ e $a_0 = 9$ resultando que $P(99) = 9 \cdot 9 = 81$. E portanto $n = 99$ tem o maior $P(n)$.

Outros problemas podem ser consultados nos diversos Banco de Questões da OBMEP [8].

3 Alguns Resultados

Aqui vamos apresentar algumas propriedades dos números equilibrados aritmético ou geométrico. No resto do texto consideramos o número $n \neq 0$ não nulo. Dado um número n, lembramos que a aplicação *soma* de algarismos do número n é obtida pela adição dos algarismos deste número; enquanto a aplicação *produto* dos algarismos é obtida pela multiplicação dos algarismos. Formalmente temos que:

Definição 2. Considere um número $n \in Z_+$ com $k + 1$ algarismos, ou seja, um número na forma $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, com $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ e $a_k \neq 0$.

- A *soma de algarismos* S é uma aplicação que a cada número n associa ao número natural s dado por

$$S(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 := s\ .$$

- O *produto de algarismos* P é uma aplicação que a cada número n associa ao número natural p dado por,

$$P(n) = (a_k \cdot a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0) =: p\ .$$

Segue da definição 2 que $S(2022) = 2 + 0 + 2 + 2 = 6$ e $S(123456789) = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$. Na definição 1 podemos reescrever a equação (1) usando a aplicação soma dos algarismos, ou seja,

$$A_i(n) = \frac{S(n) - a_i}{k} \tag{3}$$

sendo $k+1$ a quantidades de algarismos de n . Assim o número $a^{(2)} = 657$ é aritmético pois $S(657) = 6 + 5 + 7 = 18$ e $A_2(567) = \dfrac{18-6}{2} = 6$.

Bem como, $P(1972) = 1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 2 = 126$ e claramente $P(2022) = 0$. Segue ainda da definição 2 que para $g = 193$ temos $P(g) = 1 \cdot 9 \cdot 3 = 27$ e $g = 193$ é geométrico. Enquanto que para $n = 7352$ obtemos $P(7352) = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 210$. Já $P(2022) = 0$. Dado o número n com $k + 1$ algarismos e fazendo $P(n) = p$ podemos reescrever a equação (2) usando a aplicação produto e obtemos

$$G_j(n) = \left[\frac{p}{a_j}\right]^{1/k}\ . \tag{4}$$

3.1 Número Aritmético ou Geométrico

Nas justificativas ou demonstrações consideraremos apenas o caso geométrico, visto que no trabalho [3] apresentamos algumas propriedades, e suas respectivas provas, dos números equilibrados pela média aritmética.

O primeiro resultado segue diretamente da definição 2 e equações (3) e (4).

Proposição 1. *Sejam a, g números equilibrados com $k + 1$ algarismos:*

1. *se a for aritmético e a_0 é o algarismo aritmético então $S(a) = (k + 1) \cdot a_0$.*
2. *se g for geométrico e a_0 é o algarismo geométrico então $P(g) = {a_0}^{k+1}$.*

Como consequência da proposição 1 temos

Proposição 2. *Sejam a, g números equilibrados com $k+1$ algarismos, e n qualquer natural:*

1. *se a for aritmético e a_0 é o algarismo aritmético então $n \cdot S(a) = n \cdot ((k+1) \cdot a_0)$.*
2. *se g for geométrico e a_0 é o algarismo geométrico então $P(g)^n = ({a_0}^{k+1})^n$.*

Definição 3. Dado um número n com $k+1$ algarismos, considere o número n' também com $k+1$ algarismos da forma $n' = a'_k a'_{k-1} \dots a'_1 a'_0$, obtido de n permutando (trocando a posição de) seus algarismos, isto é, $a'_j \ (0 \leq j \leq k)$ é igual a algum $a_i \ (0 \leq i \leq k)$.

Por exemplo os números 139, 193, 319, 391, 913 e 931 são permutações obtidas do número 319. Um estudo sobre propriedades acerca dos números permutados pode ser encontrado em [1]. De agora em diante n' indicara qualquer número inteiro obtido de n permutando seus algarismos. Por simplicidades diremos que n' é um número permutado obtido de n. Caso o algarismo 0 apareça como algum algarismo do número n com $k+1$ algarismos, ainda assim consideramos, e escrevemos, os números permutados n', obtido de n, com $k+1$ algarismos. Por exemplo, 012 e 021 são números permutados obtidos do número 102 com 3 algarismos.

Proposição 3. *Se n é um número equilibrado (aritmético ou geométrico) com $k+1$ algarismos então n' também o é.*

Demonstração. Para todo $k > 1$, tomemos $g = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ um número geométrico, vamos fixar que $a_0 = G_{a_0}(g)$ e como g' é uma permutação de g. A permutação dos algarismos não altera o valor do produto $P(g) = a_k \cdot a_{k-1} \cdot \dots \cdot a_1 \cdot a_0 = p$, nem a quantidade de algarismos, altera apenas a ordem, a posição entre eles. Admita que $g'_{j_0} = a_0$ assim

$$G_{j_0}(g') = \left[\frac{p}{a_0}\right]^{1/k} = G_0(g) = a_0 \ .$$

Portanto, toda permutação de g também é um número equilibrado geometricamente. □

Exemplo 2. Segue da proposição 3 que todo número permutado n' obtido pela permutação dos algarismos do número n é equilibrado, assim:

- dado que $a^{(1)} = 456$ é aritmético então $a^{(0)} = 465$, $a^{(0)} = 645$, $a^{(1)} = 456$, $a^{(1)} = 654$, $a^{(2)} = 546$ e $a^{(2)} = 564$ são números aritméticos.
- no exemplo 1 vimos que $g^{(0)} = 193$ é um número geométrico, então também o são $g^{(0)} = 193$, $g^{(0)} = 913$, $g^{(1)} = 139$, $g^{(1)} = 931$, $g^{(2)} = 319$ e $g^{(2)} = 391$.

Vamos apresentar a seguir dois resultados que mostram como podemos obter outros novos números equilibrados aritmético ou geométrico dado qualquer número não nulo. Isto garante que a quantidade de números equilibrados é infinita.

Proposição 4. *Dado um número $n = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com $k \geq 1$ algarismos, considere $s = \dfrac{S(b)}{k}$ e $p = P(n)^{1/k}$.*

1. *Se $0 \neq s \in D$ então $a = 10 \cdot n + s$ é um número aritmético com $k+1$ algarismos.*
2. *Se $0 \neq p \in D$ então $g = 10 \cdot n + p$ é um número geométrico com $k+1$ algarismos.*

Demonstração. Se n é geométrico, segue que g respectivamente também o é.

No caso em que n não é equilibrado e $0 \neq p \in D$. Basta observar que

$$G_0(g) = \left[\frac{P(g)}{p}\right]^{1/k} = p\ .$$

□

Exemplo 3.

- Dado o número $n = 2321$ não aritmético, temos $S(n) = 8$, assim $s = 2$. Donde obtemos que $a^{(0)} = 23212$ e qualquer número a' obtido pela permutação dos algarismos do número a é aritmético.
- Dado o número $n = 214$ não geométrico, temos $P(n) = 8$, assim $p = 2$. Donde obtemos que $g^{(0)} = 2142$ e qualquer número g' obtido pela permutação dos algarismos do número g é geométrico.

Proposição 5. *Dado um número g equilibrado, aritmético ou geométrico, com $k+1$ algarismos, em que a_0 é o algarismo aritmético ou geométrico então todo número da forma $a \cdot 10^n + \underbrace{a_0 a_0 \cdots a_0}_{n \text{ vezes}}$, é também um número equilibrado.*

Demonstração. Tomemos g um número geométrico com $k+1$ algarismos. Sendo g geométrico então $P(g) = p = a_0^{k+1}$. Consideremos $b = g \cdot 10^n + \underbrace{a_0 a_0 \cdots a_0}_{n\text{vezes}}$. Para quaisquer naturais k e n, veja que

$$\begin{aligned} G_0(b) &= \left[\frac{P(b)}{a_0}\right]^{1/[k+n]} = \left[\frac{P(a) \cdot a_0^n}{a_0}\right]^{1/[k+n]} \\ &= \left[\frac{p \cdot a_0^n}{a_0}\right]^{1/k+n} = \left[a_0^{k+n}\right]^{1/k+n} = a_0\ . \end{aligned}$$

E assim, $P(b) = a_0^{(k+n)+1}$. Donde obtemos que b é geométrico. □

Exemplo 4.

- Veja que $a = 310152$ é um número aritmético, pois $A_0(310152) = 2$. Considere $n = 4$, assim $b = 3101522222$ é aritmético.
- Veja que $g = 3193$ é um número geométrico, pois $G_0(g) = G_0(3193) = 3$. Considere $n = 2$, assim $b = 319333$ é geométrico.

Exemplo 5. • O número $a = 311142$ é aritmético, pois $A_0(a) = A_0(311142) = 2$. Considere o número $b = 311142311142$, justaposição dos algarismos de a duas vezes, veja que b também é aritmético com $B_0(311142311142) = 2$.

• O número $g = 142$ é geométrico, pois $G_0(g) = G_0(142) = 2$. Considere o número $b = 142142142$ obtido pela justaposição dos algarismos de g três vezes. Veja que b também é geométrico.

A situação descrita no exemplo 5 pode ser generalizada no seguinte resultado

Proposição 6. *Dado um número n equilibrado, aritmético ou geométrico, com $k+1$ algarismos, então o número $\underbrace{nn\cdots n}_{j \text{ vezes}}$ é também equilibrado, em que nn é a justaposição dos algarismos de n.*

Demonstração. Tomemos g equilibrado com $k+1$ algarismos e a_0 o algarismo geométrico, assim $P(g) = m = a_0^{k+1}$. Para algum natural $j \geq 1$ fixado, considere $b = \underbrace{nn\cdots n}_{j \text{ vezes}}$, assim

$$\begin{aligned} G_0(b) &= \left[\frac{P(b)}{a_0}\right]^{1/[j\cdot(k+1)-1]} = \left[\frac{m^j}{a_0}\right]^{1/[j\cdot(k+1)-1]} \\ &= \left[\frac{(a_0^{k+1})^j}{a_0}\right]^{1/[j\cdot(k+1)-1]} = a_0\ . \end{aligned}$$

Donde obtemos que b é geométrico. □

3.2 Número Geométrico

O próximo resultado é exclusivo aos números geométricos.

Proposição 7. *Seja g um número geométrico com $k+1$ algarismos. No número g não contém o algarismo 0 ou o algarismo 0 aparece duas ou mais vezes.*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que em g o algarismos 0 não pode aparecer uma vez. Suponha $g = a_{k-1}\cdots a_1 0$ com $k \geq 1$ e $\{a_{k-1}, \cdots, a_1\} \subset \{1, 2, \cdots, 9\}$. Veja que $P(g) = 0$, bem como $G_i(g) = 0$ com $i \neq 0$ e $G_0(g) \neq 0$. Portanto o número g jamais será geométrico.

Agora, caso no número g contenha 2 (ou mais) algarismos 0 é fácil ver que $P(g) = 0$ e $G_i(g) = 0$ com $0 \leq i \leq k-1$. □

Exemplo 6. O número $a = 2022$ não é geométrico. No entanto o número $g = 20202$ é geométrico.

3.3 Número Aritmético e Geométrico

No exemplo 1 observamos que números monodígitos são aritmético e geométrico. Tal fato pode ser generalizado pelo seguinte resultado:

Proposição 8. *Todo número monodígito é um número equilibrado aritmético e geométrico.*

Demonstração. Temos que todos os algarismos de n são iguais a $0 \neq a_0 \in D$. Primeiro vamos mostrar que n é aritmético, assim $s = (k+1) \cdot a_0$ disto obtemos que para todo a_i,

$$A_i(n) = \frac{s - a_0}{k} = a_0, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, k\,.$$

Agora para mostrar que n é geométrico basta observar que $p = P(n) = {a_0}^{(k+1)}$, assim,

$$G_j(n) = \left[\frac{p}{a_0}\right]^{1/k} = \sqrt[k]{{a_0}^k} = a_0, \text{ para } j = 0, 1, \ldots, k\,.$$

□

Proposição 9. *Sejam g um número geométrico com $k+1$ algarismos e a_0 o algarismo geométrico. Se $a_0 \in \{1, 5, 7, 8, 9\}$ então g é monodígito e aritmético.*

Demonstração. Segue da proposição 1 que $P(g) = p = a_0^{k+1}$, sendo a_0 o algarismo geométrico então o produto dos algarismos restantes é $\dfrac{p}{a_0} = a_0^k$, como $a_0 \in \{1, 5, 7, 8, 9\}$ o resultado segue. □

Por fim,

Proposição 10. *Um número equilibrado n é aritmético e geométrico ao mesmo tempo, se e somente se, n for monodígito.*

Este resultado decorre imediatamente do resultado conhecido como **desigualdade das médias** e a demonstração pode ser consultada em [2, 6, 11].

Teorema 1 (Desigualdade das médias)**.** *A média aritmética de n números positivos é maior que ou igual à sua média geométrica, e só é igual se os números forem todos iguais.*

4 Considerações

Acreditamos que o conceito de números equilibrados, apresentado em forma de desafio, encontrar números equilibrados com k algarismos, é uma boa aplicação para motivar o estudo das médias aritméticas e geométricas, ou seja, ser apresentado como matemática recreativa ou na preparação para olimpíadas de matemática. Não foi encontrado na literatura outros trabalhos acerca desta classe de números, isso nos fez aprofundar ainda mais em nossa procura por novos resultados. Por fim apresentamos ao leitor, um problema ainda não resolvido: *para todo $k > 1$, quantos números equilibrados (aritméticos ou geométricos) existem com k algarismos?*

Referências

[1] Fernando Soares de Carvalho and Eudes Antonio Costa. Permutando algarismos dos números. *Eureka! (SBM)*, -(39):27–36, 2015.

[2] Paulo Cezar P. Carvalho and Augusto César Morgado. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] Eudes Antonio Costa and Bruno Costa Santos. Número equilibrado pela média aritmética. *Revista da Olimpíada, UFG-IME*, -(15):23–30, 2020.

[4] Eudes Antonio Costa and Douglas Catulio Santos. Algumas propriedades sobre os números monodígitos e repunidades. *Revista de Matemática*, 2(2022):47–58, 2022.

[5] Abramo Hefez. *Aritmética, Coleção PROFMAT, 1a edição*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[6] Elon L. Lima and outros. *Meu professor de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[7] Ivan Niven, Herbert S Zuckerman, and Hugh L Montgomery. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, 1991.

[8] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP. *Banco de Questões*. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em 16 de Fev de 2022.

[9] Valdir Vilmar da Silva. *Números: construção e propriedades*. Editora UFG, 2003.

[10] Ivan Matveevich Vinogradov. *An introduction to the theory of numbers*. Pergamon press, 1955.

[11] Eduardo Wagner. Duas médias. *Revista do Professor de Matemática*, –(18):43–47, 1991.

[12] Paul Zeitz. *Art Craft Problem Solving*. John Wiley New York publisher, 1999.