
Soluções para a Equação Geral de Poisson Unidimensional

Joyce K. Figueiredo

joycekellyfigueiredo@hotmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Eder Marinho Martins

eder@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Wenderson Marques Ferreira

wmf@ufop.edu.br

Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Resumo

A Equação Geral de Poisson Unidimensional é uma equação diferencial com diversas aplicações físicas. À vista disso, há interesse em saber se o problema de valores de contorno definido a partir dela possui solução. Nesse trabalho, provaremos a existência de solução positiva e obteremos uma fórmula geral para esta. A abordagem que apresentamos aqui é diferente da usual vista na literatura.

Palavras-chave

Equação diferencial, Equação de Poisson, Valores de contorno. Existência e unicidade.

1 Introdução

A Equação Geral de Poisson, assim como tantas outras Equações Diferenciais, possui diversas aplicações físicas. É utilizada, por exemplo, na modelagem de fenômenos que envolvem difusão, como calor, eletricidade, mecânica de fluidos e migração de populações (veja, por exemplo, [12] ou [5]). Conseqüentemente, surge o interesse em se estabelecer condições para as quais a equação envolvida no modelo possui solução positiva e quais as propriedades de tais soluções. Dessa forma, busca-se na literatura garantir a existência da solução e desenvolver formas de obtê-la.

Isto posto, o objetivo central deste trabalho é determinar a existência de soluções positivas para a Equação Geral de Poisson linear unidimensional. Assim, definindo-se um problema de valores de fronteira a partir da equação geral e recorrendo-se a resultados conhecidos do Cálculo (que podem ser encontrados em [7]), analisamos problemas preliminares que auxiliaram na escolha de uma candidata a solução. Feito isso, verificamos que a candidata é, de fato, solução para o problema. Em seguida, apresentamos algumas propriedades e exemplos, além de uma seção na qual exploramos a perspectiva geométrica do problema e de sua solução. Cabe observar que a abordagem usada aqui é diferente da usualmente encontrada na literatura via Função de Green (veja,

por exemplo, [11]). As principais referências utilizadas são [1], [5], [6], [7], [8] e [10], além das complementares [3] e [4].

2 A Equação de Poisson Linear unidimensional

A Equação de Poisson Linear unidimensional no intervalo $I = (0, 1)$ é dada por

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \text{ se } x \in I, \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases} \quad (1)$$

em que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Estamos interessados em encontrar uma fórmula integral para a solução $u \in C^2(I) \cap C(\bar{I})$ de (1), em que

$$C^2(I) = \{g : I \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ é de classe } C^2\} \text{ e } C(\bar{I}) = \{g : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ é contínua}\}.$$

Iremos considerar que f é positiva, contínua e satisfaz

$$\int_0^1 \left(\int_s^x f(t) dt \right) ds < +\infty, \text{ para todo } x \in (0, 1). \quad (2)$$

Nossa estratégia é considerar dois problemas auxiliares:

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x), \text{ para } 0 < x < c \\ v(0) = 0 = v'(c), \end{cases} \quad (3)$$

e

$$\begin{cases} -w''(x) = f(x), \text{ para } c < x < 1 \\ w'(c) = 0 = w(1), \end{cases} \quad (4)$$

em que $c \in I$. No decorrer do texto, veremos que há escolhas mais indicadas para c .

Supondo que (3) possui uma solução v , podemos integrar ambos os lados da igualdade $-v''(x) = f(x)$ no intervalo de x a c , para obter $v'(x) = \int_x^c f(t) dt$. Integrando esta última expressão no intervalo de 0 a x , obtemos

$$v(x) = \int_0^x \left(\int_s^c f(t) dt \right) ds. \quad (5)$$

Se derivarmos duas vezes a função dada em (5), obtemos, sem dificuldades, que $-v''(x) = f(x)$. Isto mostra que (3) possui uma única solução dada por (5). De modo análogo, mostra-se que (4) possui solução única dada por

$$w(x) = \int_x^1 \left(\int_c^s f(t) dt \right) ds. \quad (6)$$

Exemplo 1. Considere o problema (3) com $f(x) = x^n$ em que $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{cases} -v''(x) = x^n, x \in (0, c), \\ v(0) = 0 = v'(c), \end{cases} \quad (7)$$

em que $c = 0.5$. Utilizando a fórmula integral (5), temos

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^x \left(\int_s^{0.5} t^n dt \right) ds = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_s^{0.5} ds = \int_0^x \frac{0.5^{n+1} - s^{n+1}}{n+1} ds \\ &= \left(\frac{0.5^{n+1} \cdot s}{n+1} - \frac{s^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right) \Big|_0^x = \frac{(n+2)0.5^{n+1} \cdot x - x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

A Figura 1 ilustra o gráfico da solução do Exemplo (7) para $n = 2$.

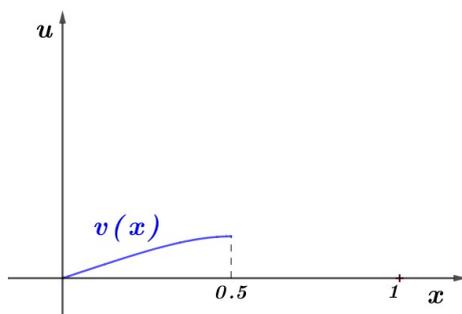


Figura 1: Gráfico da função $v(x) = \frac{x - 2x^4}{24}$.

Exemplo 2. Considere agora o problema (4) com $f(x) = x^n$ em que $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{cases} -w''(x) = x^n, x \in (c, 1), \\ w'(c) = 0 = w(1), \end{cases} \quad (8)$$

em que $c = 0.5$. Utilizando a fórmula integral (6) obtida, temos

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_x^1 \left(\int_{0.5}^s t^n dt \right) ds = \int_x^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_{0.5}^s ds = \int_x^1 \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{0.5^{n+1}}{n+1} \right) ds \\ &= \left(\frac{s^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{0.5^{n+1}}{n+1} \cdot s \right) \Big|_x^1 = \frac{1 - x^{n+2} - (n+2)0.5^{n+1}(1-x)}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Um esboço gráfico da solução do Exemplo (8) é ilustrado na Figura 2 $n = 2$.

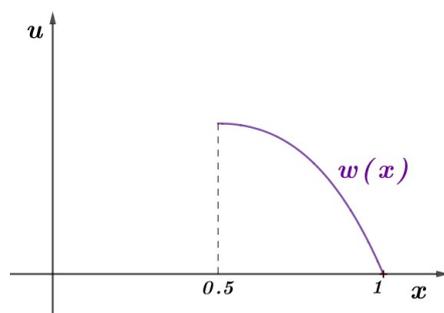


Figura 2: Gráfico da função $w(x) = \frac{-2x^4 + x + 1}{24}$.

Se assumirmos que o Problema (1) possui uma solução $u \in C^2(I) \cap C(\bar{I})$, então u é côncava para baixo, pois f é positiva por hipótese. Por outro lado, o Teorema do Valor Médio, nos garante a existência de algum $c \in I$ tal que

$$u'(c) = \frac{u(1) - u(0)}{1 - 0} = \frac{0 - 0}{1} = 0.$$

Neste caso, u restrita ao intervalo $[0, c]$ seria solução de (3) e u restrita ao intervalo $[c, 1]$ seria solução de (4). Assim, esse c passa a ser o considerado daqui em diante.

Isso nos motiva a definir a seguinte candidata à solução de (1)

$$u(x) = \begin{cases} \int_0^x \left(\int_s^c f(t) dt \right) ds, & \text{se } 0 \leq x \leq c, \\ \int_x^1 \left(\int_c^s f(t) dt \right) ds, & \text{se } c < x \leq 1. \end{cases} \tag{9}$$

De maneira geral, para um c qualquer, pode ocorrer que u seja descontínua (e, portanto, não é solução de (1)). Para um $c \in I$ fixado, denote $v(x) = v(x, c)$ e $w(x) = w(x, c)$. Pode ocorrer uma situação como a descrita na Figura 3.

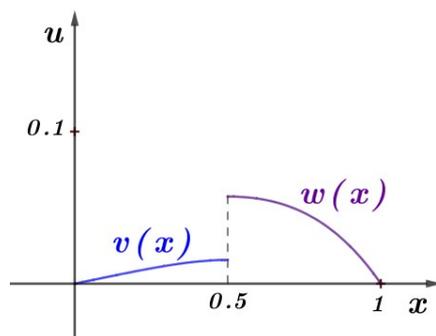


Figura 3: Gráfico de u para um certo valor de $c \in I$.

No sentido de garantir que a expressão dada em (9) é, de fato, solução para o problema (1), defina as funções $v, w : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$v(x, y) = \int_0^x \left(\int_s^y f(t) dt \right) ds \tag{10}$$

e

$$w(x, y) = \int_x^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds. \tag{11}$$

Lema 1. *As funções v, w definidas em (10) e (11) são de classe C^1 , isto é, possuem derivadas parciais contínuas.*

Demonstração. De fato:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_x^y f(t) dt$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left(\int_s^{y+h} f(t) dt \right) ds - \int_0^x \left(\int_s^y f(t) dt \right) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (F(y+h) - F(y)) ds}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[F(y+h) - F(y)] \cdot (x - 0)}{h} \\ &= F'(y)x = f(y)x, \end{aligned}$$

em que $F(y) := \int_s^y f(t) dt$. Logo, $v(x, y)$ é contínua. Considerando agora w dada por (11), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h, y) - w(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x+h}^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds - \int_x^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = G'(x) = - \int_y^x f(t) dt, \end{aligned}$$

em que $G(x) := \int_x^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds$. Além disso,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x, y+h) - w(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^1 \left(\int_{y+h}^s f(t) dt \right) ds - \int_x^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds}{h}.$$

O que nos leva a

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^1 (-F(y+h) + F(y)) ds}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(F(y+h) - F(y)) \cdot (1-x)}{h} = -F'(y)(1-x),$$

ou seja, $\frac{\partial w}{\partial y} = -f(y)(1-x)$. Logo, como $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ são contínuas, segue-se que $w(x, y)$ é de classe C^1 . \square

Observe que, se existir $c \in (0, 1)$ tal que $v(x, c) = w(x, c)$, então a função u dada em (9) é contínua. Defina agora a função $h : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(y) = v(y, y) - w(y, y). \tag{12}$$

Note que h pode ser reescrita como

$$h(y) = \int_0^1 \left(\int_s^y f(t) dt \right) ds, \tag{13}$$

pois

$$h(y) = v(y, y) - w(y, y) = \int_0^y \left(\int_s^y f(t) dt \right) ds - \int_y^1 \left(\int_y^s f(t) dt \right) ds = \int_0^1 \left(\int_s^y f(t) dt \right) ds.$$

Como f é contínua, segue-se que h também é.

Proposição 1. *Seja $h : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (12). Existe um $c \in I$ tal que $h(c) = 0$.*

Demonstração. Como

$$h(0) = v(0, 0) - w(0, 0) = \int_0^0 \left(\int_s^0 f(t) dt \right) ds - \int_0^1 \left(\int_0^s f(t) dt \right) ds < 0$$

e

$$h(1) = v(1, 1) - w(1, 1) = \int_0^1 \left(\int_s^1 f(t) dt \right) ds - \int_1^1 \left(\int_1^s f(t) dt \right) ds > 0$$

e sendo h contínua, segue-se do Teorema do Valor Intermediário, que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, como queríamos. \square

Tomando c dado pela Proposição (1), obtemos que u dada em (9) é contínua. O próximo resultado garante que este c é único.

Proposição 2. *Seja $u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (9). A constante c que torna u contínua é única.*

Demonstração. Aplicando a Regra de Leibniz a h , tem-se, por (13), que $h'(y) = f(y)$. Deste modo, h é crescente e possui apenas uma raiz em I , ou seja, a constante c que torna u contínua é única. \square

Estamos em condições de enunciar o

Teorema 1. *Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, tal que*

$$\int_0^1 \left(\int_s^x f(t) dt \right) ds < +\infty \text{ para todo } x \in \bar{I},$$

v e w definidas em (10) e (11) e $c \in I$ a única raiz de h dada por (12). Então a função $u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (9) é a única solução de (1).

Demonstração. Observe que $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$, ou seja, u satisfaz as condições de fronteira. Por construção, $-u''(x) = f(x)$ em $(0, c) \cup (c, 1)$. Vamos analisar $u(x)$ quando $x = c$. Vimos que $h(c) = 0$ e que isto implica em u ser contínua em $x = c$. Como v e w são de classe C^1 , temos que as derivadas laterais de u em c coincidem e são iguais a zero. Além disso

$$\lim_{x \rightarrow c^-} u'(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} \left(\int_x^c f(t) dt \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow c^+} \left(- \int_c^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow c^+} u'(x),$$

de modo que existe u' e esta é contínua em c . Para tratar da derivada de segunda ordem, observe que u'' existe e é igual a $-f$ em $(0, c) \cup (c, 1)$. Por outro lado,

$$u'(x) = \begin{cases} v(x, c), & \text{se } 0 < x \leq c, \\ w(x, c), & \text{se } c < x \leq 1. \end{cases}$$

De modo que

$$u''_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{u'(x) - u'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{u'(x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{\frac{\partial w}{\partial x}(x, c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{- \int_c^x f(t) dt}{x - c}.$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital no último limite, obtemos $u''_+(c) = -f(c)$. De modo análogo, mostra-se que $u''_-(c) = -f(c)$. Por outro lado, de (9) notamos que

$$u''(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq \bar{c}, \\ -f(x), & \text{se } \bar{c} < x \leq 1, \end{cases}$$

de modo que u'' é contínua em c . Portanto, u é uma solução de (1) de classe C^2 . A Proposição 2 garante a unicidade. \square

Um fato interessante é o próximo resultado que simplifica a expressão que representa a solução da Equação de Poisson.

Corolário 1. *Seja $u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada em (9). Então, u pode ser definida simplesmente como*

$$u(x) = \int_0^x \left(\int_s^c f(t) dt \right) ds, \tag{14}$$

com $x \in \bar{I}$.

Demonstração. Defina $g : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} g(x) &= v(x, c) - w(x, c) \\ &= \int_0^x \left(\int_s^c f(t) dt \right) ds - \int_x^1 \left(\int_c^s f(t) dt \right) ds. \end{aligned} \tag{15}$$

Daí, $g'(x) = \int_x^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt = 0$. Logo $g(x) = g(c) = v(c, c) - w(c, c) = h(c) = 0$. Portanto, $v(x, c) = w(x, c)$ para todo $x \in [0, 1]$, o que prova o resultado. \square

3 Exemplos

Exemplo 3. Considere o problema (1) com $f(x) = x^n$ em que $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{cases} -u''(x) = x^n, x \in I, \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \tag{16}$$

Como

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 \left(\int_s^x t^n dt \right) ds = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (x^{n+1} - s^{n+1}) ds \\ &= \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1}s - \frac{s^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} - \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

segue-se que a raiz de h é dada por $c = \left(\frac{1}{n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$. Deste modo, a solução é dada por

$$u(x) = \frac{x - x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

A Figura 4 ilustra o gráfico de u para $n = 0$ $\left(u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right)$ e $n = 2$ $\left(u(x) = \frac{x - x^4}{12} \right)$.

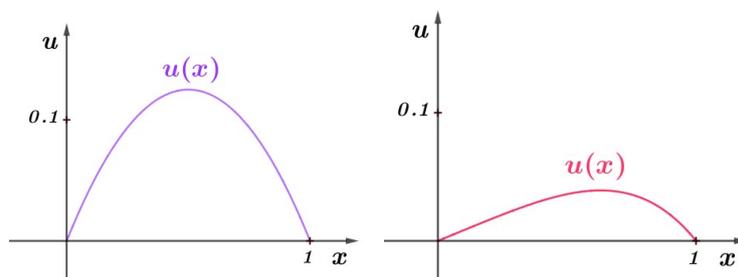


Figura 4: Gráfico da solução u para $n = 0$ e $n = 2$.

Exemplo 4. Considere o problema (1) com $f(x) = \frac{1}{x}$. Uma vez que, por construção, temos $h(\bar{c}) = 0$, isto é,

$$h(\bar{c}) = \int_0^1 \left(\int_s^{\bar{c}} \frac{1}{t} dt \right) ds = \ln(\bar{c}) + 1 = 0,$$

segue-se que $c = \frac{1}{e}$. Portanto, a solução do problema será dada por $u(x) = -x \ln x$. Na Figura 5 podemos ver o gráfico da solução u .

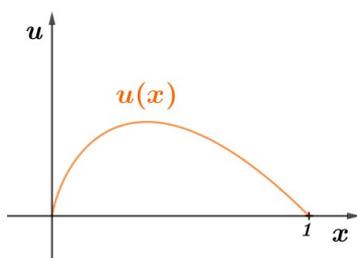


Figura 5: Gráfico da função $u(x) = -x \ln x$.

Observação 1. No Exemplo 4 não explicitamos as contas, porém note que as integrais são impróprias, visto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, o que deve ser considerado ao efetuar os cálculos.

Nos Exemplos a seguir, exploraremos o que ocorre com o problema (1) se $f(x) = \frac{1}{x^p}$, considerando diferentes valores para p . Note que o Exemplo anterior é o caso em que $p = 1$. Vejamos o que ocorre quando $0 < p < 1$ ou $1 < p < 2$.

Exemplo 5. Consideremos a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$, com $p \in (0, 1) \cup (1, 2)$, e o problema

$$\begin{cases} -u''(x) = \frac{1}{x^p}, x \in I, \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \quad (17)$$

Com os mesmos cálculos feitos no Exemplo (3), obtemos $c = \left(\frac{1}{2-p} \right)^{\frac{1}{1-p}}$ e, portanto, a solução é dada por

$$u(x) = \frac{x - x^{2-p}}{(1-p)(2-p)},$$

para todo $x \in [0, 1]$. A Figura 6 ilustra o caso em que $p = 0.3$.

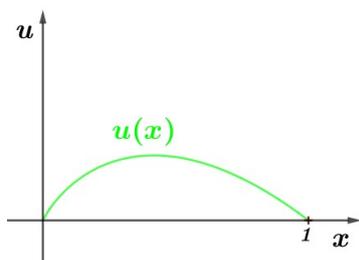


Figura 6: Gráfico da função $u(x) = \frac{100x - 100x^{\frac{13}{10}}}{39}$.

Exemplo 6. Consideremos a mesma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$, agora com $p \geq 2$. Para $p > 2$, note que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_s^x \frac{1}{t^p} dt \right) ds &= \int_0^1 \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{s^{1-p}}{1-p} \right) ds = \frac{1}{1-p} \left(x^{p-1} \cdot s - \frac{s^{2-p}}{(2-p)} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= -\frac{1}{p-1} \left(\frac{s}{x^{p-1}} + \frac{1}{(p-2)s^{p-2}} \right) \Bigg|_0^1 = -\infty, \end{aligned}$$

de modo que a função f não satisfaz a Hipótese (2) e o método que desenvolvemos aqui não se aplica. Analogamente, no caso em que $p = 2$, temos uma integral imprópria divergente.

Apresentaremos a seguir uma propriedade de convergência das funções u_p dadas no Exemplo (5). Para isto, utilizaremos a

Proposição 3 (Regra de L'Hopital para monotonicidade). *Sejam f, g funções diferenciáveis no intervalo (a, b) tal que $g' > 0$ (ou $g' < 0$) em (a, b) . Suponha que $\lim_{p \rightarrow 1^+} f(y) = \lim_{p \rightarrow 1^+} g(y) = 0$ ou $\lim_{p \rightarrow 1^-} f(y) = \lim_{p \rightarrow 1^-} g(y) = 0$.*

- Se $\frac{f'}{g'}$ é crescente em (a, b) , então $\left(\frac{f}{g}\right)' > 0$ em (a, b) .
- Se $\frac{f'}{g'}$ é decrescente em (a, b) , então $\left(\frac{f}{g}\right)' < 0$ em (a, b) .

Demonstração. Veja [9]. □

Teorema 2. Para cada $p \in (0, 2)$, seja u_p solução de

$$\begin{cases} -u''(x) = \frac{1}{x^p}, \\ u(0) = 0 = u(1), \end{cases}$$

em que $p \in (0, 1) \cup (1, 2)$. Então, para cada $x \in \bar{I}$, $u_p(x)$ converge para $u_1(x)$ quando $p \rightarrow 1$. Além disso, dada uma sequência monótona (p_n) tal que $p_n \in (0, 1) \cup (1, 2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim p_n = 1$, a sequência $\{u_{p_n}\}$ converge uniformemente para u_1 .

Demonstração. Pelos Exemplos 4 e 5, respectivamente, temos que $u_1(x) = -x \cdot \ln x$ e $u_p(x) = \frac{x - x^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$. Assim, utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{p \rightarrow 1} u_p(x) = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{x^{2-p} \cdot \ln x}{2p - 3} = -x \cdot \ln x = u_1(x).$$

Seja (p_n) uma sequência monótona arbitrária tal que $p_n \in (0, 1) \cup (1, 2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim p_n = 1$. Como p_n é monótona e tende para 1, há duas situações possíveis: a sequência é crescente e $p_n \in (0, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou é decrescente e $p_n \in (1, 2)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponha que ocorra o primeiro caso. Então, u_{p_n} é crescente. De fato, definindo as funções diferenciáveis $g(p, x) = x - x^{2-p}$ e $h(p) = (1-p)(2-p)$, com $p \in (0, 1)$ e $x \in [0, 1]$, note que u_p pode ser escrita como uma função de duas variáveis: x e p , da seguinte forma

$$u_p(x) = u(p, x) = \frac{g(p, x)}{h(p)}.$$

Além disso, temos que

$$h'(p) = 2p - 3 < 0$$

para todo $p \in (0, 1)$ e

$$\lim_{p \rightarrow 1^+} g(p, x) = 0 = \lim_{p \rightarrow 1^+} h(p),$$

para todo $x \in [0, 1]$. Afirmação: a função

$$\frac{g'}{h'}(p, x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial p}}{\frac{dh}{dp}}(p, x) = \frac{x^{2-p} \ln x}{2p - 3}$$

é positiva e crescente (em p) para todo $x \in [0, 1]$. De fato, ao derivar a função em p , temos

$$\left(\frac{g'}{h'}\right)'(p, x) = \frac{-x^{2-p}(\ln x)^2(2p - 3) - 2x^{2-p} \ln x}{(2p - 3)^2} > 0$$

para todo $p \in (0, 1)$ e $x \in [0, 1]$. Daí, segue-se da Regra de L'Hopital para monotonicidade 3 que

$$\left(\frac{g(p, x)}{h(p)}\right)' > 0$$

em $(0, 1)$. Logo, $u_p = u(p, x)$ é crescente em p . Portanto, pelo Teorema 7, a conver-

gência é uniforme. □

Na Figura 7, podemos observar os gráficos de funções do tipo $u_p(x) = \frac{x - x^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$ se aproximando do gráfico da função $u(x) = -x \cdot \ln x$, a medida que p se aproxima de 1.

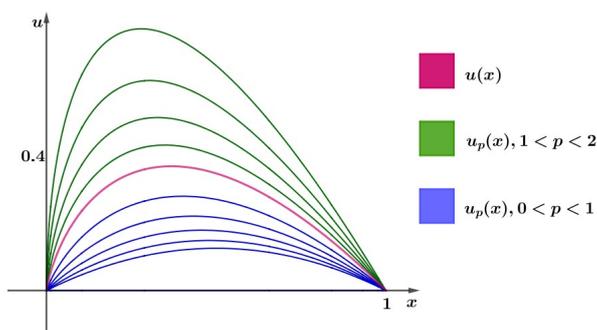


Figura 7: Gráficos das funções $u(x) = -x \cdot \ln x$ e $u_p(x) = \frac{x - x^{2-p}}{(1-p)(2-p)}$, com diferentes valores de $p \in (0, 2)$.

Exemplos Numéricos

A expressão dada em (9) permite obter a solução da Equação (1) explicitamente. Existem duas dificuldades para isto. Uma delas é resolver as integrais envolvidas e a outra é que é necessário encontrar a raiz (única) da função h . Para encontrar as raízes da função h , podemos utilizar algum método numérico que resolva equações não lineares, como o Método de Newton. Embora o Método de Newton tenha convergência quadrática, ele tem o inconveniente de ter que se calcular a derivada da função. Todavia, uma vez que $h'(x) = f(x)$, podemos escrever o método de Newton para h assim

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{f(x_n)}. \tag{18}$$

Para realizar os testes numéricos, utilizamos a linguagem Python e os exemplos estão a seguir.

Exemplo 7. Ao resolver a Equação (1) com o método proposto para $f(x) = x^4 + 1$, obtemos $h(x) = \frac{x^5}{5} + x - \frac{8}{15}$. Aplicando o Método de Newton com chute inicial $x_0 = 0,6$ na expressão (18), obtemos 0.5253313680253423 como raiz de h e a solução é dada por

$$u(x) = -\frac{x^6}{30} - \frac{x^2}{2} + x \left(\frac{0.5253313680253423^5}{5} + 0.5253313680253423 \right)$$

cujo gráfico é ilustrado na Figura 8.

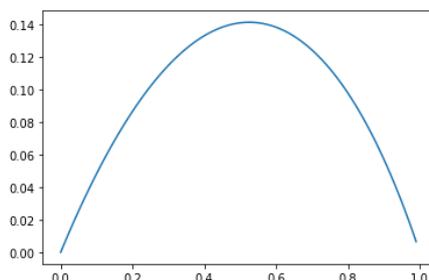


Figura 8: Gráfico da Solução do Exemplo 7

Exemplo 8. Considerando em (1), $f(x) = \sqrt{x} + 1$, obtemos $h(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + x - \frac{23}{30}$. Aplicando o Método de Newton com chute inicial $x_0 = 0,6$ em (18), obtemos 0.5180712960154776 como raiz de h e a solução é dada por

$$u(x) = \left(\frac{2 \cdot 0,5180712960154776^{\frac{3}{2}}}{3} + 0,5180712960154776 \cdot x - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} \right)$$

cujo gráfico é ilustrado na Figura 9.

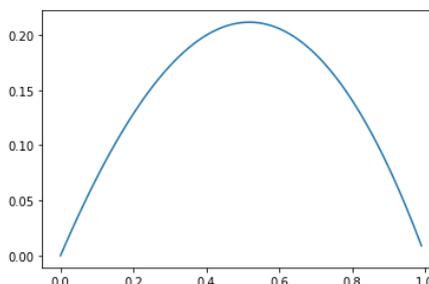


Figura 9: Gráfico da Solução do Exemplo 8

Exemplo 9. Com $f(x) = \cos \pi x + 2x$ em (1), obtemos $h(x) = x^2 - \frac{3}{2} + \frac{\text{sen} \pi x}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}$. Tomando $x_0 = 0,6$ como chute inicial no método de Newton, para obter a raiz de (18), temos 0,4682402521553725 como raiz de h e a solução é dada por (aqui, π está aproximado por 3,14159265358979):

$$u(x) = 0,4682402521553725^2 x - \frac{x^3}{3} + 0,318309886183791 x \text{sen}(3,14159265358979 \\ \cdot 0,4682402521553725) + 0,101321183642338 \cos(3,14159265358979 x) \\ - 0,101321183642338$$

cujos gráficos são ilustrados na Figura 10.

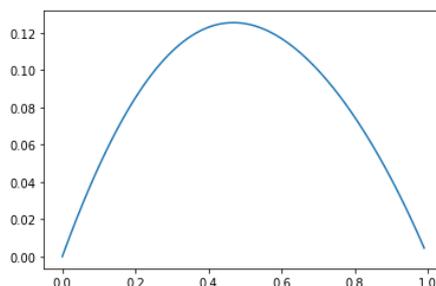


Figura 10: Gráfico da Solução do Exemplo 9

4 Perspectiva geométrica

Nesta seção, iremos explorar geometricamente as soluções obtidas para os problemas (3) e (4), a fim de ter maior entendimento sobre a solução obtida para o problema (1). Para esse estudo, utilizamos o software de matemática dinâmica *GeoGebra* e tomamos como base o caso em que $f(x) = 1$.

Nesse caso, temos $c = \frac{1}{2}$ e $u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$. Vejamos o que acontece geometricamente.

As funções (10) e (11), definidas em $[0, 1] \times [0, 1]$ a partir das soluções de (3) e (4), respectivamente, são funções de duas variáveis cujo gráfico está contido em \mathbb{R}^3 , como ilustra a Figura 11.

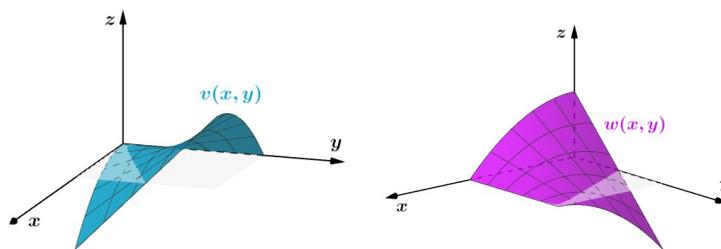


Figura 11: Gráficos das funções (10) e (11).

Pelo Corolário 1, temos $u(x) = v(x, c) = w(x, c)$ para todo $x \in \bar{I}$, em que c é a raiz de h definida em (12). Logo, o gráfico de u coincide com as curvas formadas por $v(x, y)$ e $w(x, y)$ quando $y = c$. Gráficamente isso significa que as superfícies geradas por $v(x, y)$ e $w(x, y)$ possuem interseção e que esta interseção é precisamente a curva de $u(x)$.

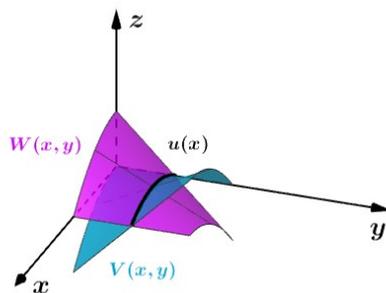


Figura 12: Interseção das superfícies que representam v e w .

Note que o que fizemos na primeira seção foi procurar um $y = c$ de forma que $u(x)$ fosse contínua em $x = c$, isto é, $v(c, c) = w(c, c)$, em que (c, c) é um ponto da reta $y = x$. Isto é, analisamos o comportamento das duas funções nos pontos da forma (y, y) . Sendo assim, tomando $z = 0$, traçamos a reta $y = x$, dividindo o retângulo $A = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ em duas regiões, como mostra a Figura 13.

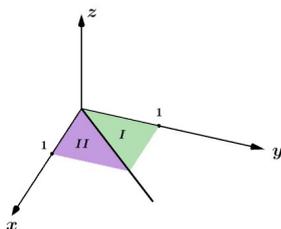


Figura 13: Regiões definidas por

Note que na região I temos $x < y$ e, na região II, $y < x$. Dessa forma, como a solução de (1) é dada por

$$u(x) = \begin{cases} v(x, c), & \text{se } 0 \leq x \leq c, \\ w(x, c), & \text{se } c < x \leq 1, \end{cases}$$

analisamos v e w restritas às regiões I e II, respectivamente. Para isso, parametrizamos as funções de forma a obtermos uma curva para cada valor de $y \in I$. Fixado $y = y_0$, as parametrizações obtidas foram

$$V(t) = \left(t, y_0, y_0 t - \frac{t^2}{2} \right), \text{ com } 0 \leq t \leq y_0,$$

e

$$W(t) = \left(t, y_0, \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} - y_0 + y_0 t \right), \text{ com } y_0 \leq t \leq 1,$$

de modo que, ao variar o valor de y_0 dentro do intervalo $[0, 1]$, é possível analisarmos para qual valor as curvas $V(t)$ e $W(t)$ se justapõem, isto é, $V(y_0) = W(y_0)$. Por fim, observe na Figura 14 o traço de V e W para diferentes valores de y_0 , inclusive $y_0 = c = \frac{1}{2}$, que nos dá $u(x)$.

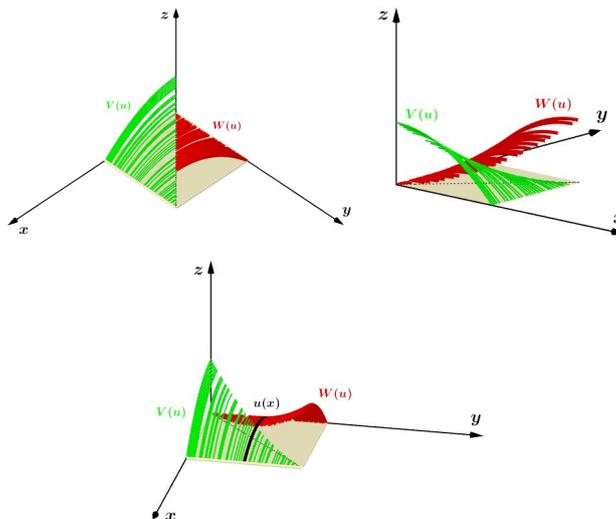


Figura 14: Traço das curvas V e W para diferentes valores de y_0 .

Ao leitor interessado, seguem-se links para construções realizadas no *GeoGebra* que permitem explorar, dinamicamente, o estudo apresentado.

1. Solução do exemplo com $f(x) = x^n$: <https://www.geogebra.org/m/mkj3fqu3>.
2. Solução do exemplo com $f(x) = \frac{1}{x^p}$: <https://www.geogebra.org/m/yvwyzr9j>.
3. Explorando geometricamente o exemplo com $f(x) = 1$: <https://www.geogebra.org/m/jejvjtag>.

5 Conclusão

A Equação Geral de Poisson Unidimensional é uma equação diferencial com aplicações reais em diferentes fenômenos e que pode ser estudada, como feito, por alunos em nível de graduação. Isto é, não utilizou-se neste estudo conceitos e resultados distantes do que se aborda na graduação em Matemática.

Apenas com o uso de tais conceitos, obteve-se sob quais hipóteses o problema escolhido possui solução positiva, destacando-se o processo de obtenção e verificação da mesma, além de obter uma fórmula geral em função da aplicação f .

Por fim, ao trabalhar com exemplos, foi possível termos ideias que nos permitiram obter outras propriedades da solução, como as apresentadas nos Corolários, e compreender, com o auxílio do *GeoGebra*, o que ocorre geometricamente.

6 Apêndice

Teorema 3 (Teorema do Valor Médio de Lagrange). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Teorema 4 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I . São equivalentes:*

- Uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral indefinida de f se existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$.
- F é dita primitiva de f e vale $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Teorema 5 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

A demonstração desses resultados pode ser vista em [7] e, para mais detalhes sobre o Teorema a seguir, o leitor pode consultar [2].

Teorema 6 (Regra de Leibniz para integrais próprias). *Seja $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

a) a função

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y)dy$$

é contínua em $[a, b]$;

b) se $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ existe e é contínua em $[a, b] \times [0, 1]$, então F é de classe C^1 e

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy.$$

Teorema 7 (Dini). *Se a sequência de funções contínuas $u_p : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, converge monotonicamente para a função contínua $u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ no conjunto compacto \bar{I} , então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Veja [7].

□

7 Agradecimentos

A primeira autora agradece a seus orientadores, pelos ensinamentos, pela paciência e incentivo, ao Grupo PET Matemática da UFOP e ao PIVIC-UFOP. O segundo autor agradece ao FNDE/MEC pelo apoio parcial.

Referências

- [1] Valéria de Magalhaes Iório. *EDP, Um Curso de Graduação*. IMPA, 2001.
- [2] Oswaldo Rio Branco de Oliveira. *Derivação Sob o Sinal de Integração - Integrais Oscilatórias e Transformadas*. IME-USP, 2015.
- [3] Claus Ivo Doering and Artur Oscar Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. SBM, 2008.
- [4] Leah Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2005.
- [5] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, 4ª Edição*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, IMPA, 1997.
- [6] Rafael Iório Júnior and Valéria de Magalhães Iório. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, IMPA, 1988.
- [7] Elon Lages Lima. *Análise Real vol. 1: Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] Eder Marinho Martins. *Fundamentos de Análise Real*. UFOP, Em preparação.
- [9] Iosif Pinelis. *L'Hospital Type Rules for Monotonicity, With Applications*, volume 3. Citeseer, 2002.
- [10] Jadiel Carlos Asevedo Silva et al. *O Método de Sub e Super Soluções e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão, 2019.
- [11] Aslak Tveito and Ragnar Winther. *Introduction to Partial Differential Equations: a Computational Approach*, volume 29. Springer Science & Business Media, 2004.
- [12] Hans J. Weber and George B. Arfken. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, London, 1995.