De Pick a Euler: exemplos e demonstrações

Amanda Figueiredo Gomides amanda.gomides@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Geraldo César Gonçalves Ferreira geraldocesar@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Para além das formas tradicionais de cálculo de áreas de figuras planas, existem métodos pouco explorados e difundidos. O teorema de Pick é um desses métodos, que relaciona número de pontos internos e de borda de um polígono simples (sem buracos e cujos lados não se cruzam) inscrito em uma malha quadriculada para calcular sua área. E a partir da associação deste teorema com a Fórmula de Euler para figuras planas poligonais, que relaciona seu número de faces, arestas, vértices e buracos, podemos criar uma generalização do Teorema de Pick que abrange polígonos não simples, desde que inscritos em uma malha quadriculada.

Palavras-chave

Teorema de Pick. Teorema de Euler. Polígonos. Áreas.

1 Introdução

O estudo de áreas de figuras planas está presente desde o início do Ensino Fundamental. Já no 6º ano os alunos são ensinados a calcular a área de figuras que vão desde as mais simples, como triângulos e retângulos, até algumas mais rebuscadas, recorrendo-se tanto a fórmulas matemáticas específicas (no caso de figuras que as possuem), ou a outras estratégias, como por exemplo a clássica repartição em triângulos.

Todavia, não é possível que alguns conteúdos pertinentes ao assunto sejam abordados na escola, e por isso alguns resultados são esquecidos - ou mesmo desconhecidos - por parte tanto de estudantes quanto até mesmo de professores. E não se trata assuntos complexos, mas sim de conteúdos simples que dispõem baixa complexidade matemática, que podem ser facilmente compreendidos, ao mesmo tempo que apresenta interessantes aplicações.

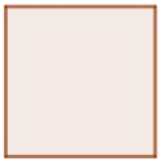
Esse é o caso de dois teoremas: um enunciado por Georg Pick em 1899, conhecido como Teorema de Pick, e o outro, enunciado anteriormente em 1758 por Leonhard Euler, que também leva o nome do autor.

Este artigo foi produzido com base nos seguintes textos: [2] "Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples", de Renata da Costa Abreu; [3] "Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no Geogebra.", de

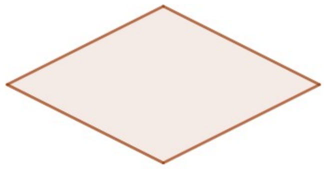
Wesley da Silva Carvalho; [4] "Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick", de Tânia Marli Rocha e Doherty Andrade; [5] "Aritmética em retas e cônicas", de Rodrigo Gondim e [6] "Teorema de Pick", de João Nuno Tavares.

2 Contextualização

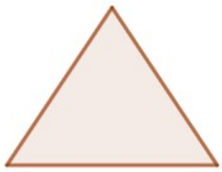
Imagine que você precisa calcular as áreas das seguintes figuras:



(a) $l = 3\ cm$



(b) $D = 6\ cm,\ d = 4\ cm$



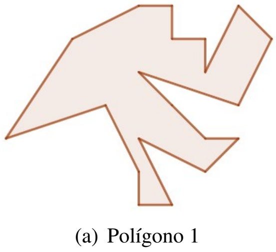
(c) $b_t = 4\ cm,\ h_t = 3\ cm$

(d) $b_r = 5\ cm,\ h_r = 3\ cm$

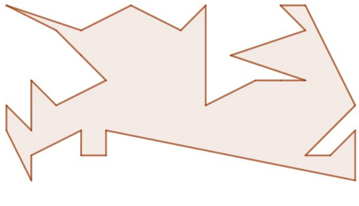
Figura 1: Exemplos de figuras planas com fórmulas específicas

A resposta é simples: o quadrado possui área igual a $9\ cm^2$, o losango, $12\ cm^2$, o triângulo, $6\ cm^2$ e o retângulo, $15\ cm^2$. Isso porque todas são figuras que possuem uma fórmula própria de cálculo de áreas: a área do quadrado é dada por l^2, a do losango é dada por $\dfrac{D \cdot d}{2}$ e por aí vai.

No entanto, podemos nos deparar com figuras cuja área não seja tão trivial. Imagine agora que você precisa calcular a área das seguintes figuras:



(a) Polígono 1



(b) Polígono 2

Figura 2: Exemplos de figuras planas que não possuem fórmulas específicas

Uma possível estratégia para descobrir a área das figuras é a triangulação: divide-se elas em diversos triângulos de bases e alturas conhecidas, calcula-se a área de cada um e depois faz a soma de todas. Apesar de eficaz, pode ser um método extremamente trabalhoso. Verifica-se, então, a necessidade de métodos mais práticos, e de fato, existem: exemplo disso é o Teorema de Pick, que veremos neste trabalho.

3 Característica de Pick

A partir dessa sessão, a não ser que seja especificado, trabalharemos com polígonos simples, que são polígonos que não possuem buracos em seu interior, nem arestas que se cruzam.

Dado um polígono simples P, com B pontos de borda e I pontos internos, definiremos a *característica de Pick* da seguinte forma:

$$Pick(P) = \frac{1}{2}B + I - 1.$$

A respeito dessa relação, podemos afirmar o seguinte:

Seja P um polígono simples, cujos vértices são nós de uma malha quadriculada, e que é obtido a partir da união de dois polígonos P_1 e P_2, ao longo de, pelo menos, uma aresta, e sendo esses polígonos também inscritos na malha. P deverá ser tal que

$$Pick(P) = Pick(P_1) + Pick(P_2).$$

Mostraremos que a afirmação acima é verdadeira.

Se definirmos B_1 e I_1 como os pontos de borda e internos de P_1, respectivamente, e B_2 e I_2 como os pontos de borda e internos de P_2, respectivamente, sabemos que $Pick(P_1) = \frac{1}{2} \cdot B_1 + I_1 - 1$, e que $Pick(P_2) = \frac{1}{2} \cdot B_2 + I_2 - 1$. Chamemos de v o número de pontos de borda da(s) aresta(s) comum(ns) de P_1 e P_2. Temos que exatamente dois desses pontos são pontos de borda de P, e os outros $v - 2$ pontos que restam são pontos internos de P. Então:

$$\begin{aligned}
Pick(P) &= \frac{1}{2} \cdot B + I - 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot [(B_1 - v) + (B_2 - (v - 2))] + [I_1 + I_2 + v - 2] - 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot (B_1 + B_2 - 2v + 2) + I_1 + I_2 + v - 2 - 1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot B_1 + \frac{1}{2} \cdot B_2 - v + 1 + I_1 + I_2 + v - 2 - 1 \\
&= (\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1) + (\frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1) \\
&= Pick(P_1) + Pick(P_2)
\end{aligned}$$

Então, de fato, se juntarmos dois polígonos para formar um só, a característica de Pick do novo polígono é igual à soma das características de Pick dos menores.

4 O Teorema de Pick

O Teorema de Pick é um resultado que nos permite calcular a área de qualquer figura plana simples cujos vértices estejam sobre pontos de uma malha quadriculada. Ele é enunciado da seguinte forma:

Teorema de Pick. *Dado um polígono simples P, construído sobre a malha quadriculada* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e cujos vértices são nós dessa malha, então sua área é dada por*

$$\acute{A}rea(P) = \frac{B}{2} + I - 1,$$

onde B é a quantidade de pontos da borda e I a quantidade de pontos internos.

Em outras palavras, o Teorema de Pick afirma que a característica de Pick de um polígono simples é igual à sua área.

Uma das vantagens proporcionadas pelo Teorema de Pick é a abrangência desse resultado: desde que o polígono seja simples e cujos vértices sejam nós da malha, o teorema pode ser aplicado; independente de ser convexo ou não, de ter poucos ou muitos lados, de ser ou não regular, ele sempre nos dará a área exata da figura.

Vejamos exemplos da aplicação:

Exemplo 1. *Determine a área dos Polígonos 1 e 2.*

Note que o Teorema de Pick só pode ser utilizado em polígonos inscritos em uma malha quadriculada. Então, é o que faremos com o Polígono 1 (Figura 2(a)). Suponha que ele possa, de fato, ser inscrito numa malha quadriculada, como mostra a figura abaixo:

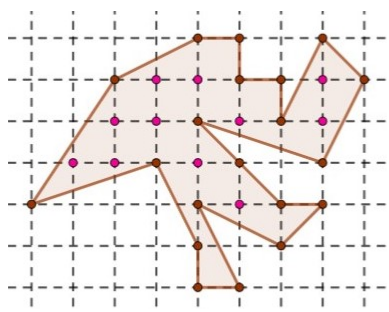


Figura 3: Polígono 1 inscrito na malha

Desse modo, o polígono P atende as condições para uso do Teorema, pois é um polígono simples e cujos vértices se localizam sobre nós da malha. Então, basta aplicarmos a Fórmula de Pick para encontrarmos sua área. Observe que na Figura 3 os pontos internos e de borda já estão destacados, em cores diferentes para facilitar nosso entendimento. Na cor marrom, temos os pontos de borda ,que são os vértices e demais pontos das arestas que coincidem com os nós da malha, e somam 20 pontos. Já na cor rosa, temos os pontos internos, que são 11. Considerando como u a distância entre cada nó da malha e outro nó adjacente, temos:

$$\begin{aligned} A(P_1) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{20}{2} + 11 - 1 \\ &= 10 + 11 - 1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Concluímos, então, que a área do Polígono 1 é de $20u^2$.

Faremos o mesmo procedimento com o Polígono 2 (Figura 2(b)). Primeiramente inscrevemos na malha, da seguinte forma:

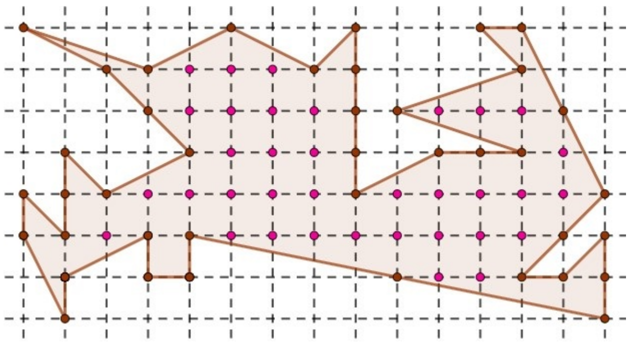


Figura 4: Polígono 2 inscrito na malha

Ao todo, são 40 pontos de borda e 35 pontos internos. Aplicando na fórmula, temos:

$$\begin{aligned} A(P_2) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{40}{2} + 35 - 1 \\ &= 20 + 35 - 1 \\ &= 54 \end{aligned}$$

Portanto, a área do Polígono 2 é de $40u^2$.

Exemplo 2. *Um fazendeiro deseja cultivar determinada hortaliça em seu terreno, delimitado por 22 estacas e uma cerca que liga todas elas e cuja área é de* $78\,m^2$*. O plantio dessa hortaliça deve ser feito em canteiros, tal que cada pé plantado esteja a* *uma distância de, pelo menos, 1 metro do pé mais próximo. Determine quantos pés da hortaliça o fazendeiro poderá plantar.*

Vamos chamar o polígono referente ao terreno de T. Agora temos uma situação um pouco diferente: já temos a área do nosso polígono; o que queremos saber é a quantidade de pontos internos que, dentro do teorema de Pick, esse polígono possui. E isso é possível, pois o exercício nos deu também a quantidade de pontos de borda, que é 22. Portanto, basta, novamente, substituirmos na fórmula. Então:

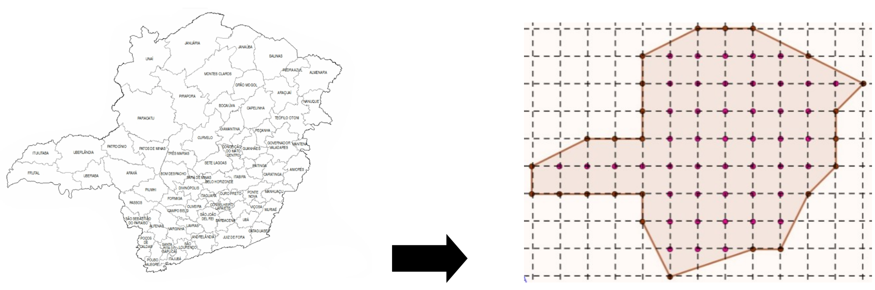
$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ 78 &= \frac{22}{2} + I - 1 \\ 78 &= 11 + I - 1 \\ I &= 78 - 11 + 1 \\ I &= 68 \end{aligned}$$

Portanto, temos 68 pontos internos. Essa será a quantidade de hortaliças que nosso fazendeiro poderá cultivar em seu terreno.

O Teorema de Pick possui uma aplicação real. Ele é usado por satélites de georreferenciamento para calcular áreas de regiões irregulares. Vejamos um exemplo de como isso ocorre:

Exemplo 3. *Encontre a área do estado de Minas Gerais usando o Teorema de Pick.*

A fórmula de Pick exige que a figura usada seja um polígono. Assim sendo, para cálculo de áreas físicas, que nem sempre são poligonais, a ideia é criar um polígono cujo formato se aproxime ao da região original. Trata-se, portanto, de uma estimativa, cuja precisão dependerá da escala utilizada.



(a) Mapa de Minas Gerais [1]

(b) Mapa de Minas Gerais inscrito na malha

Figura 5: Adaptação de área não poligonal para o uso do Teorema de Pick

Usando o polígono acima, temos:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{25}{2} + 47 - 1 \\ &= 12,5 + 47 - 1 \\ &= 58,5 \end{aligned}$$

Depois de encontrarmos o número de Pick do nosso polígono, precisamos agora transformá-lo de acordo com sua escala. No nosso caso, cada unidade de distância vale 100 km e consequentemente, cada unidade de área vale $100 \times 100 = 10.000\, km^2$. Então, a área de Minas Gerais, segundo nossos cálculos, é dada por

$$\begin{aligned} H(P) &= 58,5 \cdot 10.000 \\ &= 585.000 \end{aligned}$$

No nosso cálculo, a área de MG é de $585.000\, km^2$. Segundo dados do IBGE, a área oficial do estado é de aproximadamente $586.521\, km^2$. A precisão encontrada foi satisfatória, mas é possível encontrar aproximações ainda melhores; basta apenas que se amplie mais a imagem ao criar o polígono base.

Exemplo 4. *Encontre a área do polígono abaixo:*

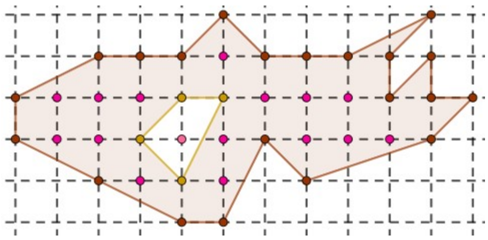


Figura 6: Polígono com buraco

O polígono dado possui um buraco em seu interior. O teorema de Pick não é enunciado para polígonos com buracos, contudo a soma da área do buraco com a área do polígono deverá ser a área total da figura. Como queremos apenas a área do polígono, podemos calcular a área do buraco usando a própria fórmula do teorema e depois subtraí-la da área total, que inclui os pontos que pertencem ao buraco como pontos internos. Assim, temos:

$$\begin{aligned} A(b) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{4}{2} + 1 - 1 \\ &= 2 + 1 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{B}{2} + I - 1 \\ &= \frac{21}{2} + 20 - 1 \\ &= 10,5 + 20 - 1 \\ &= 29,5 \end{aligned}$$

$$A(P) = A(T) - A(b) = 29,5 - 2 = 27,5$$

Portanto, a área do Polígono é de $27,5u^2$.

5 Resultados auxiliares para a demonstração do Teorema de Pick

A demonstração do Teorema de Pick requer a utilização de outros resultados, alguns já amplamente utilizados no dia a dia dos geômetras, outros que podem ser obtidos em função destes. Vamos enunciá-los e demonstrá-los nesta sessão.

Para as seguintes relações, precisamos definir o que são *triângulos primitivos*. Diremos que um triângulo é primitivo se ele é tal que seus vértices são os únicos pontos de borda que possuem, e não contém pontos internos. Note que todos os triângulos a seguir são exemplos de triângulos primitivos:

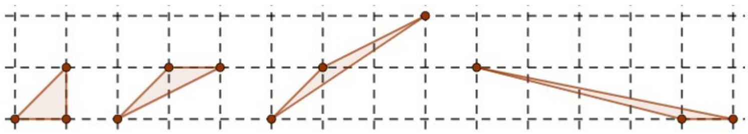


Figura 7: Exemplos de triângulos primitivos

Lema 1. *Sejam m e n dois inteiros. Se eles forem primos entre si, então existem outros inteiros, t e s, tais que $tm - sn = 1$.*

Demonstração. Sejam m e n dois inteiros, primos entre si. Tomemos t e s inteiros tais que

$$tm - sn = p, \tag{1}$$

sendo $p > 1$. Por m e n serem primos entre si, podemos afirmar que pelo menos um deles, digamos m, não é divisível por p. Isso implica que $m = pq + r$, sendo, obviamente, $0 < r < p$.

Agora, seja r' um inteiro tal que $r' = p - r$. Temos $0 < r' < r < p$, ou seja, $0 < r' < p$, e temos também $r = p - r'$. Então:

$$m = pq + r = pq + p - r' = p(q + 1) - r',$$

que pode ser reescrito como

$$p(q + 1) = m + r'. \tag{2}$$

Podemos multiplicar a eq. (1) por $q + 1$. Daí:

$$t(q + 1)m - s(q + 1)n = p(q + 1) = m + r',$$

e desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} t(q + 1)m - s(q + 1)n &= m + r' \\ (tq + t)m - (sq + s)n - m &= r' \\ (tq + t - 1)m - (sq + s)n &= r', \end{aligned}$$

com $0 < r' < p$.

Chegamos então a uma expressão que multiplica m, e que ao ser desenvolvida resulta em um número inteiro; o mesmo ocorre com s. Isso nos indica que podemos repetir esse processo quantas vezes se faça necessário, até encontrarmos inteiros, digamos t' e s', tais que $t'm - s'n = 1$.

□

Lema 2. *Todo triângulo primitivo possui área igual a* $\frac{1}{2}u^2$.

Demonstração. Seja ABC um triângulo primitivo, tal que A e B sejam pontos de coordenadas inteiras, $A = (0, 0)$ e $B = (m, n)$ com m e n não nulos e primos entre si. Se não fossem, existiria um número inteiro d que seria divisor comum de m e n, daí o ponto $P = \left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$, que estaria sobre o lado AB seria inteiro e ABC não seria um triângulo primitivo.

O ponto B pode ter uma das coordenadas igual a 0; digamos ser $m = 0$. Como ABC é um triângulo primitivo, para que não haja pontos de borda, devemos ter $n = \pm 1$. Na Figura 8, exibimos todas as configurações possíveis nas quais não há pontos internos:

Em todas elas, ABC possuirá, pela fórmula de área triangular, $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}u^2$.

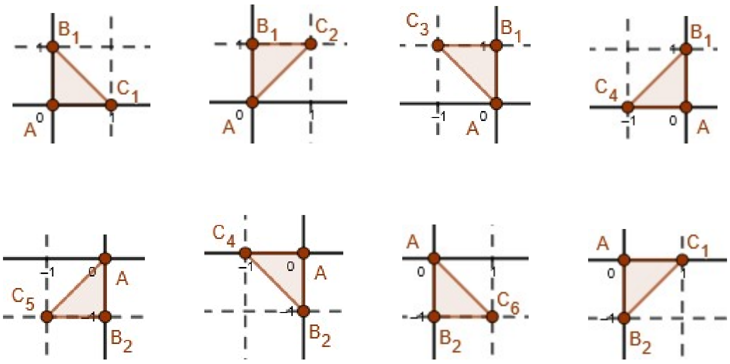


Figura 8: Possíveis posições do triângulo ABC

Caso B possua primeira coordenada $m \neq 0$ (o caso será análogo para $n \neq 0$), o ponto C pertencerá a uma reta $r = \dfrac{n}{m}x + b$, paralela a AB, sendo $D = (0, b_1)$ o ponto onde essa reta passa pelo eixo vertical. E existem infinitos pontos, dos quais escolheremos $Q = (s, t)$, sendo $Q \neq C$, por onde r também passa, ou seja, vale $t = \dfrac{n}{m}s + b$. Daí,

$$b_1 = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - ns}{m}. \tag{3}$$

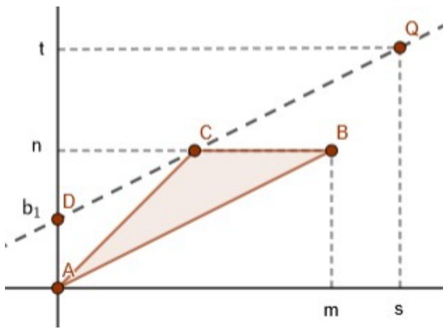


Figura 9: $ABC, m \neq 0$

Se considerarmos b uma constante genérica, a equação acima representa um conjunto de retas paralelas ao segmento AB. Deste conjunto, a reta r, que passa por C, é a mais próxima de AB; se assim não fosse, ABC possuiria pontos internos, ou seja, deixaria de ser um triângulo primitivo. Isso implica que $|b_1|$ é o menor valor que b pode assumir. Mas como m e n são números primos entre si, temos, do Lema 1, que existem s e t inteiros tais que $tm - sn = 1$, e então, a partir da eq. (3), temos

$$b = \frac{1}{m}. \tag{4}$$

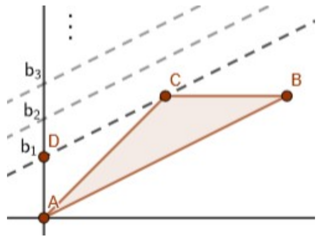


Figura 10: Retas paralelas ao segmento AB

Considere o triângulo ABD. Ele possui área igual a $\dfrac{|b_1| \cdot m}{2}$, pois $|b_1|$ é a medida de AD e m é a primeira coordenada de B, o que nos permite identificar essas medidas como sendo, respectivamente, base e altura do triângulo. Agora, note que outra forma de enxergar á área de ABD é considerando AB base do triângulo e a distância desse segmento a D como a altura. Por ser o mesmo triângulo, a área não muda.

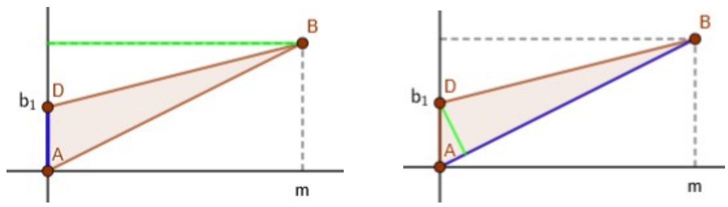


Figura 11: Diferentes bases (azul) e alturas (verde) de ABD

Seguindo essa linha de raciocínio, conseguimos infinitos triângulos formados por essa base AB e tendo como terceiro vértice um ponto qualquer da reta r, e que por isso possuirão a mesma área de ABD, ou seja, $\dfrac{|b_1| \cdot m}{2}$. Um triângulo desse tipo é o triângulo ABC. E como b_1 é um valor específico de b, vale a eq. (4); portanto:

$$\text{Área(ABC)} = \frac{|b_1| \cdot m}{2} = \frac{\frac{1}{m} \cdot m}{2} = \frac{\frac{m}{m}}{2} = \frac{1}{2}u^2.$$

$\square$

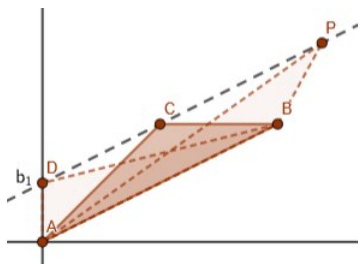


Figura 12: Triângulos de mesma área

Lema 3. *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração. Suponha que existe um número n tal que para qualquer polígono com quantidade de lados menor que n o teorema é válido, mas que existam polígonos com quantidade de lados maior ou igual a n para os quais o teorema seja falso. Então, existe algum polígono P de n lados que não pode ser decomposto em $n-2$ triângulos justapostos cujos vértices sejam vértices de P. Seja, esse polígono, tal que haja um único ponto de maior abcissa e um único ponto de menor abcissa, como mostrado na figura a seguir. Caso essa condição não seja imediata, basta girar o polígono em alguma quantidade adequada de graus com relação à origem.

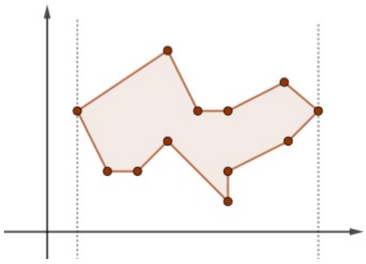


Figura 13: Polígono com pontos de maior e menor abcissa únicos

Tomemos o ponto B, que é o ponto de maior abcissa de P. Tomemos ainda os vértices A e C, consecutivos a A, e tracemos o triângulo formado por esses três vértices. Existem duas possibilidades: o triângulo ABC contém, ou não contém, algum outro vértice de P.

- ABC contém algum outro vértice de P

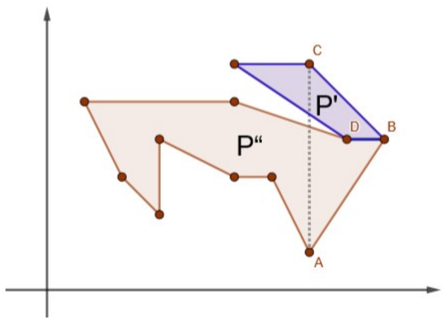


Figura 14: Triângulo ABC contém outro vértice de P

Digamos que o triângulo ABC contenha o ponto D, que é vértice de P. Traçando o segmento BD, o polígono P é dividido em dois polígonos: P', com n' lados, e P”, com n" lados. Ao somarmos os lados de P' e P", encontramos $n' + n" = n + 2$, pois o lado AD, que é o único dos dois polígonos que não é lado de P, é contado duas vezes, enquanto cada um dos outros n lados é contado uma única vez. Como P' e P" são polígonos, $n' \geq 3$ e $n" \geq 3$, o que implica que tanto n' quanto n" são menores que n e então o teorema vale para P' e P". Logo, P' pode ser repartido em $n' - 2$ triângulos, e P" pode ser repartido em $n - 2$. Juntando a quantidade de triângulos total, temos $(n' - 2) + (n - 2) = n - 2$, o que é um absurdo pois o teorema não vale para P.

- ABC não contém nenhum outro vértice de P

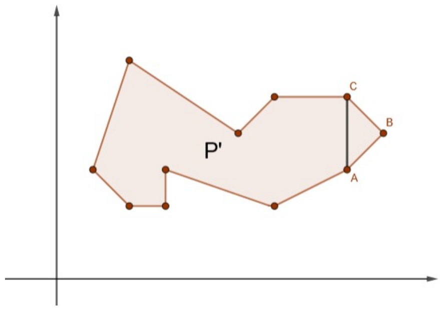


Figura 15: Triângulo ABC não contém outros vértices de P

Nesse caso, consideremos que o segmento AC divide P em dois novos polígonos: o triângulo ABC e o restante de P, que chamaremos P' e o qual, devido a forma que foi construído, possui $n - 1$ lados. Portanto, o teorema vale para P', que pode ser triangulado em $(n - 1) - 2 = n - 3$ triângulos. Então, a divisão total de P em triângulos seria igual a quantidade de triângulos de P' somado ao triângulo ABC, ou seja, o número de triângulos de P é $n - 3 + 1 = n - 2$, o que é um absurdo pois o teorema não vale para P.

Portanto, o lema é verdadeiro. □

Lema 4. *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2)\pi$.*

Demonstração. No lema 3 vimos que um polígono de n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. Sabemos também que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π. Então a soma dos ângulos internos do polígono é a soma dos ângulos internos de todos os triângulos, ou seja, $(n - 2)\pi$. □

Lema 5. *Todo polígono cujos vértices pertencem a um reticulado pode ser decomposto numa reunião de triângulos primitivos.*

Demonstração. Considere um triângulo ABC cujos vértices sejam pontos da malha.

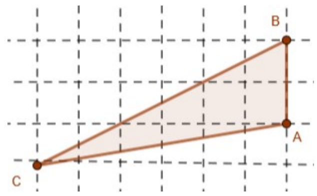


Figura 16: Triângulo ABC

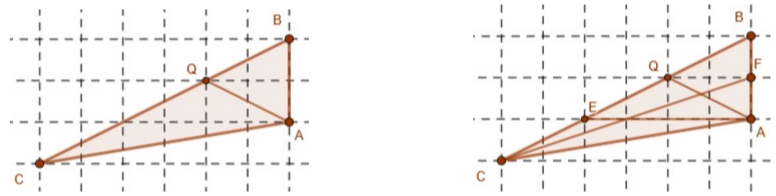
Se ele possuir uma quantidade p de pontos internos, podemos escolher um ponto específico, digamos P, e traçar os segmentos AP, BP e CP. Obtém-se, assim, três triângulos: APB, BPC e CPA. Como P é ponto da malha, cada um dos três novos triângulos terá um número menor do que p de pontos internos. O processo ser repetido até que cada triângulo não possua nenhum ponto interno.

(a) Ponto P interno

(b) Triângulos gerados a partir dos pontos internos

Figura 17: Nenhum dos triângulos possuem pontos internos

Se ele possuir uma quantidade q de pontos de borda, podemos escolher um ponto específico, digamos Q sobre o lado BC, e traçar um segmento que saia de algum dos vértices, nesse caso o segmento AQ. Assim, obtém-se dois triângulos: ABQ e AQC. Como Q é ponto de borda, cada um dos dois novos triângulos terá um número menor do que q de pontos de borda. O processo pode ser repetido até que cada triângulo possua, como pontos de borda, apenas seus vértices.



(a) Ponto Q de borda

(b) Triângulos gerados a partir dos pontos de borda

Figura 18: Nenhum dos triângulos possuem possui pontos de borda além de seus vértices

Então, o processo pode ser repetido até que o triângulo ABC esteja completamente triangulado em triângulos primitivos. Pelo lema anterior, qualquer polígono pode ser triangulado, e cada um desses triângulos pode ser subdividido em triângulos primitivos. Logo, o lema é válido para qualquer polígono inscrito na malha. □

6 Demonstração do Teorema de Pick

A partir dos resultados enunciados e demonstrados na sessão anterior, é possível, finalmente, demonstrarmos o Teorema de Pick.

Demonstração. Seja P um polígono inscrito numa malha quadriculada, B sua quantidade de pontos de borda e I sua quantidade de pontos internos. Ao triangular o polígono P em T triângulos primitivos, todos os pontos internos e de borda se tornam vértices desses triângulos. Vamos separar os pontos de borda em dois grupos: B' será a quantidade de pontos de borda que são vértices de P, e B" a quantidade de pontos de borda que não são vértices de P, de forma que $B = B' + B$".

A soma de todos os ângulos internos, por um lado, é $T\pi$. Por outro lado, podemos dividí-la em dois grupos: S_b, que será a soma dos ângulos internos que fazem parte da borda de P, e S_i, que será a soma dos ângulos internos que fazem parte, e então a soma $S_b + S_i$ deverá ser a soma total de ângulos internos. Daí, obtemos:

$$T\pi = S_b + S_i \tag{5}$$

Observe que S_b pode ser expressa da seguinte forma: ângulos internos que estão sobre os B' vértices de P devem somar $(B' - 2)\pi$, pois a quantidade de lados é a mesma de vértices e daí segue o resultado encontrado no lema 4. Ângulos que estão sobre os B" pontos de borda devem somar B"π pois cada um desses pontos se sobre um segmento. Logo,

$$\begin{aligned} S_b &= (B' - 2)\pi + B"\pi \\ &= (B' + B - 2)\pi \\ &= (B - 2)\pi \end{aligned} \tag{6}$$

Observe que cada um dos seus pontos internos está completamente rodeado por triângulos, de forma que todos os ângulos possíveis formados por esses pontos são ângulos de algum triângulo primitivo. Logo,

$$S_i = 2I\pi \tag{7}$$

. Substituindo as eqs. (6) e (7) na eq. (5), encontramos

$$\begin{aligned} T\pi &= S_b + S_i \\ &= (B-2)\pi + 2I\pi \\ &= (B+2I-2)\pi \end{aligned}$$

$$T = B + 2I - 2$$

Então, a quantidade T de triângulos primitivos que P foi repartido é $B + 2I - 2$. Como, já mostrado, a área de cada triângulo primitivo é $\frac{1}{2}$, então:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{1}{2}(B+2I-2) \\ &= \frac{B}{2} + I - 1 \end{aligned}$$

□

7 O Teorema de Euler para figuras planas poligonais

O Teorema de Euler é um resultado que diz respeito a figuras planas poligonais, as quais podem ser descritas como uma junção de polígonos simples (os quais chamamos *faces*), que se unem a partir da sobreposição de seus lados (*arestas*) e e/ou vértices. Esse resultado nos diz o seguinte:

Teorema de Euler. *Seja P uma figura plana poligonal simples. Tomando subdivisões poligonais simples de P, às quais chamaremos faces, tais que a interseção de duas faces seja vazia ou um conjunto de arestas ou de vértices, e sendo V o número de vértices e A de arestas (ambos incluindo os originais e os originados a partir da criação das faces) então* $F - A + V = 1$.

Do Teorema de Euler, que vale para polígonos simples, podemos obter o seguinte corolário, que serve para polígonos com buracos:

Corolário. *Seja P uma figura plana poligonal, simples ou não, com ou sem buracos. Tomando subdivisões poligonais simples de P, às quais chamaremos faces, tais que a interseção de duas faces seja vazia ou um conjunto de arestas ou de vértices, e sendo V o número de vértices e A de arestas (ambos incluindo os originais e os originados a partir da criação das faces), e sendo b o número de buracos de P, então* $F - A + V = 1 - b$.

Exemplo 5. *Verifique a validade do teorema de Euler para o Polígono 1 e seu corolário para o Polígono com buraco.*

O teorema é usado em polígonos que são subdivididos em polígonos menores;

independe a quantidade ou o formato dessas subdivisões, desde que sejam poligonais. Uma das formas mais comuns de criar subdivisões em um polígono é a partir da triangulação; faremos esse procedimento com o *Polígono 1*.

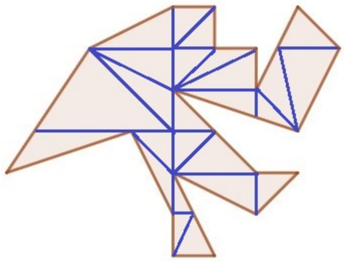


Figura 19: Polígono 1, triangulado

Ao todo, são 25 faces, 50 arestas e 26 vértices. Então, temos:

Daí, temos:

$$\begin{aligned} F - A + V &= 1 \\ 25 - 50 + 26 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, o teorema de Euler vale no Polígono 1.

Para o polígono com buracos, prosseguimos com a seguinte divisão:

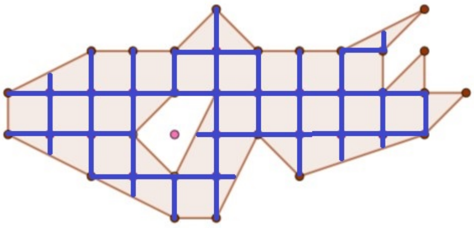


Figura 20: Polígono com buraco, subdividido

Podemos contar 39 faces, 86 arestas, 47 vértices e 1 buraco. Daí, temos:

$$\begin{aligned} F - A + V &= 1 - b \\ 39 - 86 + 47 &= 1 - 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, o corolário do teorema vale no Polígono com buraco.

8 Demonstração do Teorema de Euler

Primeiramente, vamos mostrar que é válida a relação de Euler em regiões poligonais simples.

Demonstração. Dado um polígono P sem buracos, podemos subdividí-lo todo em triângulos. Como definido acima, a quantidade de triângulos será a quantidade de faces.

- Se $F = 1$, P é um triângulo e temos $A = 3$ e $V = 3$. Então, de fato $F - A + V = 1$.
- Se $F > 1$, podemos retirar triângulos de fronteira (que contém algum vértice da fronteira do polígono) e vamos mostrar que o $X(P)$ continuará o mesmo, e no final teremos um triângulo como polígono.

Os triângulos de fronteira podem ser de dois tipos. Vamos nos referir como *tipo 1* os triângulos que tiverem 2 vértices na fronteira, e *tipo 2* os que tiverem 3.

- Se retiramos de P um triângulo do tipo 1, teremos 1 face e 1 aresta a menos e o número de vértices se mantém. Logo:

$$V - (A - 1) + (F - 1) = V - A + 1 + F - 1 = V - A + F$$

- Se retiramos de P um triângulo do tipo 2 que contenha duas arestas de fronteira, teremos 1 face, 2 arestas e 1 vértice a menos. Logo:

$$(V - 1) - (A - 2) + (F - 1) = V - 1 - A + 2 + F - 1 = V - A + F$$

- Se retiramos de P um triângulo do tipo 2 que contenha três arestas de fronteira, teremos 1 face, 3 arestas e 2 vértices a menos. Logo:

$$(V - 2) - (A - 2) + (F - 1) = V - 2 - A + 3 + F - 1 = V - A + F$$

Através de uma sequência apropriada de operações, podemos reduzir o polígono P a um único triângulo e voltamos para o caso $F = 1$.

$\square$

Agora, vamos mostrar que é verdadeiro o corolário das figuras com buracos.

Demonstração. Se P é uma figura simples, imediatamente o corolário é válido. De fato, temos $b = 0$ e a igualdade se torna $F - A + V = 1$, que é exatamente a igualdade presente no Teorema de Euler, que foi provado acima.

Se P é uma figura com buracos, defina P' um polígono obtido a partir de P, após preenchermos cada um de seus buracos com uma nova face. Essa nova figura é sem buracos, portanto o teorema valerá de acordo com o que provamos anteriormente. Porém, vale destacar que o número de faces a ser trabalhado em P' será o número F referente ao polígono P somado aos seus b buracos. Portanto, a fórmula será dada por $(F + b) - A + V = 1$, ou seja, $F - A + V = 1 - b$. □

9 A relação entre os Teoremas de Pick e Euler

Dado um polígono simples P, cujos vértices estejam sobre os nós de uma malha. Esse polígono pode ser triangulado de tal forma que os triângulos sejam todos primitivos. O polígono abaixo é um exemplo de polígono dividido em triângulos primitivos:

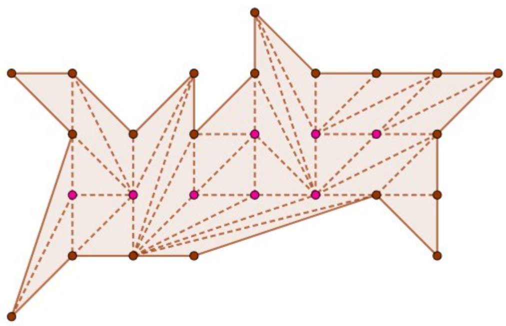


Figura 21: Polígono triangulado em triângulos primitivos

Como os únicos nós da malha sobre o polígono são os vértices dos triângulos, vale:

$$V = B + I, \tag{8}$$

sendo V o número total de vértices, B os pontos de borda e I os pontos internos. Isso porque em cada triângulo primitivo, temos $V = 3, B = 3$ e $I = 0$.

Cada aresta do interior de P pertence a exatamente dois triângulos (o polígono não tem buracos) e o número de arestas de fronteira é igual ao número de vértices da fronteira B (o polígono é simples). Assim, ao contarmos as arestas em cada triângulo teremos contado 3F arestas das quais cada aresta interior foi contada duas vezes e cada aresta de fronteira, uma vez. Logo:

$$3F = 2(A - b) + B$$

onde F = faces (triângulos), A = arestas totais e b = arestas de borda. E observe que F é triplicado pois, ao contar as arestas de cada triângulo separadamente, contamos 3 vezes a mais pois um triângulo possui 3 arestas. A eq. acima pode ser reescrita como

$$A = \frac{1}{2}(3F + B) \tag{9}$$

9.1 Pick implica Euler

Vamos mostrar que a fórmula de Pick implica o Teorema de Euler.

Demonstração. Consideremos triângulos primitivos. Eles têm 3 pontos de fronteira e nenhum ponto interior. Então, temos $Pick(T) = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$. Consideremos ainda o polígono P, triangulado em F triângulos primitivos. Como vale a fórmula de Pick, a área do polígono é $\frac{1}{2}F$. Ou seja, $\frac{F}{2} = \frac{B}{2} + I - 1$. Ou ainda:

$$F = B + 2I - 2 \tag{10}$$

Usando as equações (8), (9) e (10), temos:

$$\begin{aligned}
F - A + V &= F - \frac{1}{2}(3F + B) + B + I \\
&= \frac{B}{2} + I - \frac{1}{2}F \\
&= \frac{B}{2} + I - \frac{1}{2}(B + 2I - 2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Se a fórmula vale para triângulos primitivos, também vale para qualquer polígono simples, pois:

a) O polígono sendo triangulado em triângulos simples, valerão (9) e (10).

b) Se Pick vale para triângulos primitivos, a área de cada um é $\frac{1}{2}$ de seu número de Pick e consequentemente a área do polígono é $\frac{1}{2}F$.

c) Se vale a fórmula de Euler, sendo o polígono sem buracos, vale que $F - A + V = 1$

De (8) e (9), temos:

$$F + \frac{1}{2}(3F + B) + B + I - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}B + I - 1$$

□

Assim, mostramos que a Fórmula de Pick implica o Teorema de Euler.

9.2 Euler implica Pick

Mostraremos agora que o teorema de Euler implica o de Pick

Demonstração. Consideremos um polígono simples, triangulado em F triângulos primitivos. A partir do Lema 2, podemos concluir que sua área é dada por:

$$A(P) = \frac{1}{2}F \tag{11}$$

A fórmula de Euler diz que $V - A + F = 1$, ou seja, $F = A - V + 1$. Daí:

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}(A - V + 1)$$

De (8) e (9), obtemos:

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(3F + B) - (B + I) + 1\right) \Rightarrow \frac{F}{4} = \frac{B}{4} + \frac{I}{2} - \frac{1}{2},$$

e daí encontramos

$$F = B + 2I - 2.$$

Substituindo em (11), obtemos:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{1}{2}F \\ &= \frac{1}{2}(B + 2I - 2) \end{aligned}$$

$$\therefore A(P) = \frac{1}{2}B + I - 1,$$

que é exatamente a fórmula de Pick. □

10 Generalização do Teorema de Pick

A partir da comparação dos teoremas de Pick e Euler, podemos encontrar uma terceira fórmula, que também é de simples compreensão. Essa é a generalização do Teorema de Pick, válida para polígonos com buracos inscritos na malha $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

Teorema de Pick (Polígono com Buracos). *Dado um polígono P, com buracos, construído sobre a malha quadriculada $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e cujos vértices são nós dessa malha, então sua área é dada por*

$$\acute{A}rea(P) = \frac{B}{2} + I - 1 + b,$$

onde B é a quantidade de pontos da borda, I a quantidade de pontos internos e b a quantidade de buracos em seu interior.

Demonstração. Vamos supor que P esteja dividido em F triângulos primitivos. Como cada triângulo primitivo tem área igual a $\frac{1}{2}$, podemos afirmar que $A(P) = \frac{1}{2}F$. E sabemos do Teorema de Euler que $V - A + F = 1 - b$, ou seja, $F = A - V + 1 - b$ e, daí,

$$\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\left(A - V + 1 - b\right).$$

Substituindo por (8) e (9), temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}F &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(3F+B) - (B+I) + 1 - b\right)\\ &= \frac{3F}{4} - \frac{B}{4} - \frac{I}{2} + \frac{1}{2} - \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\frac{F}{4} = \frac{B}{4} + \frac{I}{2} - \frac{1}{2} + \frac{b}{2}$$

E, portanto, concluímos que

$$A(P) = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}B + I - 1 + b$$

□

Voltemos ao Exemplo 4. Vamos resolvê-lo a partir dessa generalização.

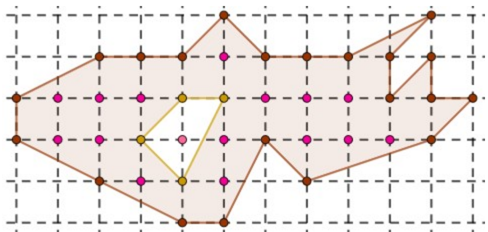


Figura 22: Polígono com buraco

Note que agora, os pontos de borda do buraco, que antes eram contados como pontos internos do polígono, passam a ser vistos como pontos de borda do polígono. Então o cálculo se dá da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{B}{2} + I - 1 + b \\ &= \frac{25}{2} + 15 - 1 + 1 \\ &= 12,5 + 15 - 1 + 1 \\ &= 27,5 \end{aligned}$$

Chegamos, assim, ao mesmo resultado de $27,5u^2$ de área.

11 Conclusão

Apesar de não serem tão difundidos, o Teorema de Pick e a Fórmula de Euler possuem complexidade matemática baixa, o que possibilita que mesmo pessoas com conhecimento matemático em um nível mais elementar, como estudantes do ensino fundamental, possam compreendê-los e utilizá-los sem grandes dificuldades. Além disso, são formas alternativas para cálculo de áreas de regiões planas e que apresentam uma boa aproximação de resultados.

12 Agradecimentos

Ao PICME e ao CNPq pela oportunidade e pelo fomento da pesquisa. À Universidade Federal de Ouro Preto por me permitir fazer este trabalho pelo PIVIC. E sobretudo ao meu orientador, Geraldo, pela paciência e incentivo de sempre.

Referências

[1] Mapa de Minas Gerais. Disponível em: *http://psd-mg.org.br/mapa-de-minas-gerais/*. Acesso em 15/02/2021.

[2] Renata da Costa Abreu. Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples. Disponível em: *https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/29052015Re nata-da-Costa-Abreu.pdf*. Acesso em 25/02/2021.

[3] Wesley da Silva Carvalho. Cálculo das Fórmulas de Euler e Pick no Geoplano e no Geogebra. Disponível em: *https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6970/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Wesley%20da%20Silva%20Carvalho%20-%202016.pdf*. Acesso em 15/02/2021.

[4] Tania Marli Rocha e Doherty Andrade. Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick. Disponível em: *http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_tania_marli_rocha.pdf*. Acesso em 15/02/2021.

[5] Rodrigo Gondim. Aritmética em retas e cônicas. Disponível em: *www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC15Completo.pdf*. Acesso em 15/02/2021.

[6] João Nuno Tavares. Teorema de Pick. Disponível em: *https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html*. Acesso em 15/02/2021.