A sequência dos quatérnios k-Perrin hiperbólica

Renata Passos Machado Vieira re.passosm@gmail.com
Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Francisco Regis Vieira Alves fregis@gmail.com
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Paula Maria Machado Cruz Catarino pcatarino@gmail.com
Universidade de Trás-os-Montes de Alto Douro, Vila Real, Portugal

Resumo

Este trabalho introduz a sequência dos quatérnios k-Perrin hiperbólica, realizando o processo de complexificação das sequências lineares e recorrentes, mais especificamente da sequência de Perrin generalizada. Nesse sentido, tem-se o estudo de algumas propriedades em torno dessa sequência, aprofundando o estudo investigativo matemático desses números.

Palavras-chave

números hiperbólicos, quatérnios, sequência k-Perrin.

1 Introdução

Muito tem-se notado estudos de sequências lineares recursivas na literatura matemática. Com base nisso, surge-se a inquietação de realizar um estudo investigativo em torno do processo de complexificação de determinadas sequências. Tão logo, neste trabalho é introduzida a sequência quaterniônica de k-Perrin hiperbólica, apresentando propriedades algébricas em torno desses números.

Estudos em torno dos números quatérnios hiperbólicos de k-Fibonacci e k-Lucas realizado em Godase [7], apresentam propriedades matemáticas desenvolvidas, podendo então serem aplicadas em pesquisas voltadas para a área da física e demais. Assim, o presente estudo aprimora a aplicação dos quatérnios hiperbólicos em outra sequência matemática, possibilitando uma maior abrangência em torno da investigação de sequências numéricas.

Definida pelo engenheiro francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), a sequência de Perrin é uma sequência de terceira ordem com fórmula de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_0 = 3, P_1 = 0, P_2 = 2$. O seu polinômio característico é dado por $x^3 - x - 1 = 0$, com solução real o número plástico, acarretando numa relação dessa sequência com o número plástico, cujo valor aproximado é 1,32 [1, 11].

Destaca-se que Hans van der Laan investigou padrões para a arquitetura com base em experimentos utilizando pedras e, posteriormente, materiais de construção. Feito isso, deram por descoberto um novo padrão de medida, em que a sua construção é dada através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc), denominando este número de número plástico. Porém, este número foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier, chamando-o de número radiante [15].

Trabalhando o processo de complexificação, tem-se os quatérnios, desenvolvido por Willian Rowan Hamilton (1805-1865). Os quatérnios sugiram a partir da tentativa de generalização dos números complexos na forma $z = a + bi$ em três dimensões [12], sendo apresentados como somas formais de escalares com vetores usuais do espaço tridimensional, existindo quatro dimensões. Logo, um quatérnio é descrito por:

$$q = a + bi + cj + dk$$

onde a, b, c são números reais e i, j, k a parte ortogonal na base $\mathbb{R}^3$.

Existem ainda outros trabalhos, tais como [4, 8, 9] que abordam os quatérnios no âmbito de sequências numéricas, sendo utilizados também como base para esta pesquisa.

Por sua vez, Horadam (1993) [10] apresenta o produto quaterniônico sendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ij, jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$.

Quanto aos números hiperbólicos, o conjunto desses números $\mathbb{H}$ pode ser descrito como:

$$\mathbb{H} = \left\{ z = x + hy | h \notin \mathbb{R}, h^2 = -1, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nesse sentido, tem-se os trabalhos em torno dos números hiperbólicos e da sequência quaterniônica, utilizados como base para esse processo investigativo [2, 3, 5, 6, 13].

2 Os quatérnios de k-Perrin hiperbólicos

A sequência de k-Perrin é definida por $P_{k,n} = P_{k,n-2} + kP_{k,n-3}, n \geq 3$ com os valores iniciais $P_{k,0} = 3, P_{k,1} = 0, P_{k,2} = 2$. Por sua vez, tem-se o polinômio característico dessa sequência como sendo $x^3 - x - k = 0$.

Definição 1. *Os quatérnios de k-Perrin hiperbólicos são dados por:*

$$\mathbb{H}P_{k,n} = P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3},$$

em que $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$.

Segundo as definições apresentadas, realiza-se um estudo em torno das operações de adição, subtração e multiplicação dos quatérnios de k-Perrin hiperbólicos.

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n} \pm \mathbb{H}P_{k,m} &= (P_{k,n} \pm P_{k,m}) + i(P_{k,n+1} \pm P_{k,m+1}) + j(P_{k,n+2} \pm P_{k,m+2}) \\ &+ k(P_{k,n+3} \pm P_{k,m+3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n}\mathbb{H}P_{k,m} &= (P_{k,n}P_{k,m} + P_{k,n+1}P_{k,m+1} + P_{k,n+2}P_{k,m+2} + P_{k,n+3}P_{k,m+3}) \\ &+ i(P_{k,n}P_{k,m+1} + P_{k,n+1}P_{k,m} + P_{k,n+2}P_{k,m+3} - P_{k,n+3}P_{k,m+2}) \\ &+ j(P_{k,n}P_{k,m+2} + P_{k,n+2}P_{k,m} - P_{k,n+1}P_{k,m+3} + P_{k,n+3}P_{k,m+1}) \\ &+ k(P_{k,n}P_{k,m+3} + P_{k,n+3}P_{k,m} + P_{k,n+1}P_{k,m+2} - P_{k,n+2}P_{k,m+1}) \\ &\neq \mathbb{H}P_{k,m}\mathbb{H}P_{k,n}\end{aligned}$$

O conjugado dos números quatérnios de k-Perrin hiperbólicos é representado por:

$$\overline{\mathbb{H}P}_{k,n} = P_{k,n} - iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} - kP_{k,n+3}.$$

Teorema 1. *Seja $P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência de k-Perrin e $\mathbb{H}P_{k,n}$ o n-ésimo termo da sequência quaterniônica de k-Perrin hiperbólica, então, para $n \geqslant 1$, temos:*

$$\mathbb{H}P_{k,n} - i\mathbb{H}P_{k,n+1} - j\mathbb{H}P_{k,n+2} - k\mathbb{H}P_{k,n+3} = P_{k,n} + P_{k,n+2} + P_{k,n+4} + P_{k,n+6}$$

Demonstração. Com base na Definição 1, temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n} - i\mathbb{H}P_{k,n+1} - j\mathbb{H}P_{k,n+2} - k\mathbb{H}P_{k,n+3} &= P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3} \\ &- i(P_{k,n+1} + iP_{k,n+2} + jP_{k,n+3} + kP_{k,n+4}) \\ &- j(P_{k,n+2} + iP_{k,n+3} + jP_{k,n+4} + kP_{k,n+5}) \\ &- k(P_{k,n+3} + iP_{k,n+4} + jP_{k,n+5} + kP_{k,n+6}) \\ &= P_{k,n} + P_{k,n+2} - kP_{k,n+3} + jP_{k,n+4} \\ &+ kP_{k,n+3} + P_{k,n+4} - iP_{k,n+5} \\ &- jP_{k,n+4} + iP_{k,n+5} + P_{k,n+6} \\ &= P_{k,n} + P_{k,n+2} + P_{k,n+4} + P_{k,n+6}\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Seja $\overline{\mathbb{H}P}_{k,n}$ o conjugado quaterniônico de k-Perrin hiperbólico, tem-se então:*

$$\mathbb{H}P_{k,n} + \overline{\mathbb{H}P}_{k,n} = 2P_{k,n}$$

Demonstração. Segundo a Definição 1, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}P_{k,n} + \overline{\mathbb{H}P}_{k,n} &= P_{k,n} + iP_{k,n+1} + jP_{k,n+2} + kP_{k,n+3} \\ &+ P_{k,n} - iP_{k,n+1} - jP_{k,n+2} - kP_{k,n+3} \\ &= 2P_{k,n}\end{aligned}$$

□

3 Algumas propriedades

Doravante, são estudadas algumas propriedades da sequência quaterniônica de k-Perrin hiperbólica, com base nas definições discutidas na seção anterior.

Propriedade 1. *A função geradora dos quatérnios de k-Perrin hiperbólico é dada por:*

$$g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \frac{\mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x^2, kx^3 nas equações abaixo, tem-se:

$$g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}P_{k,n}x^n = \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + \mathbb{H}P_{k,2}x^2 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n}x^n + \ldots \tag{1}$$

$$x^2 g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0}x^2 + \mathbb{H}P_{k,1}x^3 + \mathbb{H}P_{k,2}x^4 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n-2}x^n + \ldots \tag{2}$$

$$kx^3 g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0}kx^3 + \mathbb{H}P_{k,1}kx^4 + \mathbb{H}P_{k,2}kx^5 + \ldots + \mathbb{H}P_{k,n-3}kx^n + \ldots \tag{3}$$

Baseada na Equação (1-2+3), tem-se que:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - kx^3)g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) = \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2 + (\mathbb{H}P_{k,3} - \mathbb{H}P_{k,1} - \mathbb{H}P_{k,0})x^3 \\ + \ldots + (\mathbb{H}P_{k,n} - \mathbb{H}P_{k,n-2} - \mathbb{H}P_{k,n-3})x^n + \ldots\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}(1 - x^2 - kx^3)g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) &= \mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2 \\ g(\mathbb{H}P_{k,n}, x) &= \frac{\mathbb{H}P_{k,0} + \mathbb{H}P_{k,1}x + (\mathbb{H}P_{k,2} - \mathbb{H}P_{k,0})x^2}{1 - x^2 - kx^3}.\end{aligned}$$

□

Propriedade 2. *Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de Binet dos quatérnios de k-Perrin hiperbólicos é expressa por:*

$$Q_{k,n}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

em que C_1, C_2, C_3 são os coeficientes da fórmula de Binet da sequência e r_1, r_2, r_3 as raízes do polinômio característico ($x^3 - x - k = 0$).

Demonstração. Com base na fórmula de recorrência da sequência k-Perrin, em seus respectivos valores iniciais definidos e no seu polinômio característico cujas raízes são r_1, r_2, r_3, é possível obter por meio de resolução do sistema linear de equações, os valores dos coeficientes C_1, C_2, C_3, como acontece no trabalho de Vieira [14].

Além disso, tem-se o estudo do discriminante Δ, com base na fórmula de Cardano, em que apresenta $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{4p^3}{27}$ para a equação $z^3 + px + q = 0$. Assim, o estudo do discriminante para a sequência k-Perrin é dado por: $\Delta = \frac{(-k)^2}{4} - \frac{(-1)^3}{27} = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{27}$, referente ao polinômio de 3º grau, Com isso, o discriminante determina a maneira de como serão as raízes do polinômio. Desse modo, quando $\Delta \neq 0$ todas as raízes serão distintas, concluindo que $\frac{k^2}{4} - \frac{1}{27} \neq 0$. Logo, $k^2 \neq \frac{4}{27}$. Note-se também que $r_1 r_2 r_3 = k$ e $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. $\square$

Propriedade 3. *Para $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos quatérnios de k-Perrin hiperbólico é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} Q_{k,2} & Q_{k,1} & Q_{k,0} \\ Q_{k,1} & Q_{k,0} & Q_{k,-1} \\ Q_{k,0} & Q_{k,-1} & Q_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,n+2} & \mathbb{H}_{k,n+1} & \mathbb{H}_{k,n} \\ \mathbb{H}_{k,n+1} & \mathbb{H}_{k,n} & \mathbb{H}_{k,n-1} \\ \mathbb{H}_{k,n} & \mathbb{H}_{k,n-1} & \mathbb{H}_{k,n-2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \\ \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \\ \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} + k\mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,1} + k\mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,0} + k\mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,1} + k\mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,0} + k\mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-1} + k\mathbb{H}_{k,-2} \\ \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,4} & \mathbb{H}_{k,3} & \mathbb{H}_{k,2} \\ \mathbb{H}_{k,3} & \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} \\ \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = z$, $z \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^z \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \\ \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,z+2} & \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} \\ \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} \\ \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} & \mathbb{H}_{k,z-2} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = z + 1 = 1 + z$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{1+z} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \\ \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{z} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,2} & \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} \\ \mathbb{H}_{k,1} & \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} \\ \mathbb{H}_{k,0} & \mathbb{H}_{k,-1} & \mathbb{H}_{k,-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,z+2} & \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} \\ \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} \\ \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} & \mathbb{H}_{k,z-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,z+1} + k\mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z} + k\mathbb{H}_{k,z-1} & \mathbb{H}_{k,z-1} + k\mathbb{H}_{k,z-2} \\ \mathbb{H}_{k,z+2} & \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} \\ \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{H}_{k,z+3} & \mathbb{H}_{k,z+2} & \mathbb{H}_{k,z+1} \\ \mathbb{H}_{k,z+2} & \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z} \\ \mathbb{H}_{k,z+1} & \mathbb{H}_{k,z} & \mathbb{H}_{k,z-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

4 Conclusão

O estudo permitiu realizar um aprofundamento matemático em torno da sequência de k-Perrin e de sua forma complexa. Dessa forma, introduziu-se a sequência dos quatérnios k-Perrin hiperbólica, abordando algumas propriedades e teoremas matemáticos. Ressalta-se que para o caso particular de $k = 1$, é possível perceber que tem-se a sequência quaterniônica de Perrin hiperbólica.

Referências

[1] F. R. V. Alves, P. M. M. C. Catarino, R. P. M. Vieira, and M. C. dos S. Mangueira. Teaching recurrent sequences in brazil using historical facts and graphical illustrations. *Acta Didactica Napocensia*, 13(1):87–104, 2020.

[2] F. T. Aydin. Hyperbolic k-fibonacci quaternions. *https://arxiv.org/pdf/1812.00781.pdf*, 2018.

[3] P. Catarino. On hyperbolic k-pell quaternions sequences. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 49:61–73, 2018.

[4] P. Catarino. Bicomplex k-pell quaternions. *Computational Methods and Function Theory*, 19(3):65–76, 2019.

[5] F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, and P. Zampetti. Hyperbolic numbers in geometry of minkowskispace-time. *Springer, Heidelberg*, pages 3–23, 2011.

[6] G. Dattoli, S. Licciardi, R. M. Pidatella, and E. Sabia. Hybrid complex numbers: The matrix version. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28(3):58, 2017.

[7] A. D. Godase. Hyperbolic k-fibonacci and k-lucas quaternions. *The Mathematics Student*, 90(1-2):103–116, 2021.

[8] S. Halici and A. Karatas. On a generalization for fibonacci quaternions. *Chaos Solitons, Fractals*, 98:178–182, 2017.

[9] S. Halici and A. Karatas. Some matrix representations of fibonacci quaternions and octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(2):1233–1242, 2017.

[10] A. F. Horadam. Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2):23–33, 1993.

[11] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 3. Addison-Wesley, Reading, MA, 2nd edition edition, 1998.

[12] M. J. Menon. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31(2):1–11, 2009.

[13] A. E. Motter and A. F. Rosa. Hyperbolic calculus. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 8(1):109–128, 1998.

[14] R. P. M. Vieira. Engenharia didática (ed): o caso da generalização e complexificação da sequência de padovan ou cordonnier. 2020. 266 f. Mestrado em ensino de ciências e matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2020.

[15] Caroline Voet. The poetics of order: Dom hans van der laan's architectonic space. *Architectural Research Quarterly*, 16(2):137–154, 2012.