O Problema Isoperimétrico sob as Abordagens de Zenodorus e Hurwitz

Henrique Câmara de Oliveira henrique.camara@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Gil Fidelix de Souza gilsouza@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do avanço das técnicas em Matemática pelo desenvolvimento de um importante problema clássico de otimização que busca responder: *Qual seria a curva de comprimento L que englobaria a maior área?* Aqui buscamos explorar duas demonstrações para este resultado. A primeira delas utiliza técnicas do Cálculo e da Geometria Plana, partindo da restrição do problema a polígonos e utilizando resultados atribuídos a Zenodorus. Já a segunda foi apresentada pelo alemão Adolf Hurwitz em 1902 e utiliza séries de Fourier.

Palavras-chave

Curvas, Problema Isoperimétrico, Cálculo das Variações, Séries de Fourier.

1 Introdução

O problema que busca determinar a curva plana que compreende a área máxima dentre todas as demais de mesmo comprimento L, é chamado Problema Isoperimétrico e é citado, talvez pela primeira vez, na obra *Eneida* [7] de Virgílio. Nela, o problema aparece proposto à princesa Dido que poderia obter um pedaço de terra, cercada pelo mar em um dos lados, que pudesse ser limitada por uma corda de comprimento L. A solução para o problema proposto é um semicírculo em que a parte correspondente ao mar estaria na base dessa figura. O problema em si parece ser de fácil resolução, mas não é bem assim, pois a sua primeira demonstração amplamente aceita surgiu em 1870 como uma consequência da pesquisa de Weierstrass com o surgimento do "Cálculo das Variações".

2 O Problema Isoperimétrico

O Problema Isoperimétrico clássico estabelece que dentre todas as curvas fechadas com um perímetro fixo L, o círculo é o que engloba a maior área, o que é formalmente estabelecido pelo resultado a seguir.

Teorema 2.1. ***(Problema Isoperimétrico)*** *Seja C uma curva simples fechada plana de comprimento L e seja A a área da região limitada por C. Então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e a igualdade acontece se, e somente se, C for um círculo.

2.1 O Problema Isoperimétrico por aproximações com polígonos

Nesta seção trataremos de alguns casos particulares do Problema Isoperimétrico, considerando apenas polígonos.

Teorema 2.2. *Dentre todos os triângulos de perímetro dado, o equilátero possui maior área.*

Demonstração. Sejam x, y e z os lados de um triângulo e $2p$ o perímetro. Da fórmula de Heron e do fato que $z = 2p - x - y$, podemos considerar o máximo a função

$$f(x, y) = A^2(x, y) \quad = \quad p(p - x)(p - y)(-p + x + y).$$

Calculando $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, obtemos $p(p - y)(2(p - x) - y) = 0$ e $p(p - x)(2(p - y) - x) = 0$, resultando em $x = y = \dfrac{2p}{3}$, que é o ponto crítico de $f(x, y)$. No entanto, por $f(x, y)$ ser o quadrado de uma função não negativa $A(x, y)$, estas funções possuem o mesmo ponto crítico, aplicando $x = y = \dfrac{2p}{3}$ em $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ teremos $H(2p/3, 2p/3) > 0$, verificando que este é o ponto de máximo de ambas. Portanto, $x = y = z$, verificando pelo teste da derivada segunda que o maior triângulo, fixado o perímetro, é o equilátero.

□

Observação 2.1. *A fim de que um polígono $\mathcal{P}$ possua a maior área dentre os demais com mesmo perímetro, $\mathcal{P}$ deve ser convexo. De fato, se $\mathcal{P}$ não é convexo no vértice B, então os vértices consecutivos a ele, digamos A e C, são tais que o segmento $\overline{AC}$ não está contido no polígono (veja Figura 1). Dessa forma, ao refletirmos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em relação a $\overline{AC}$, obtemos um polígono convexo de mesmo perímetro, mas com área maior. Repetindo o argumento aos demais vértices em que $\mathcal{P}$ não é convexo, obtemos um polígono convexo $\mathcal{P}'$ com o mesmo perímetro de $\mathcal{P}$, porém de maior área.*

Pela observação anterior, o quadrilátero de perímetro fixado que possui maior área deve ser convexo. Para simplificar este caso particular, assumiremos que os ângulos internos de quadriláteros de perímetro fixo e área máxima devem ser ângulos retos, pois o caso geral é provado adiante no Teorema 2.4.

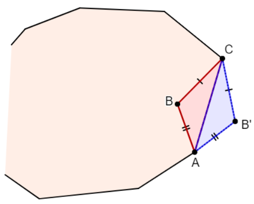

Figura 1: Polígono não convexo (passando por B) e polígono convexo (passando por B') de mesmo perímetro.

Teorema 2.3. *Dentre todos os retângulos de perímetro dado, o quadrado é o de maior área.*

Demonstração. Seja x e y base e altura, respectivamente, de um retângulo de perímetro $2p$, ou seja, $2p = 2(x+y)$ resulta em $p = x+y$. Além disso, $A = xy$ pode ser reescrita como $A(x) = x(p-x) = -x^2 + px$, o valor de x que maximiza a área é $\dfrac{p}{2}$. Portanto, $x = y = \dfrac{p}{2}$, verificando pelo teste da segunda derivada que o retângulo de maior área dentre aqueles de mesmo perímetro é o quadrado. $\square$

Vimos então que nos casos dos triângulos e dos retângulos de mesmo perímetro, a maior área é obtida quando todos os lados possuem a mesma medida. O próximo passo é generalizar este resultado para os n-ágonos, pois esperamos que aquele em que os n lados são congruentes seja o de maior área dentre os de mesmo perímetro.

Proposição 2.1. *Dados uma reta r e dois pontos X e Y em um plano pertencentes ao mesmo semiplano determinado por r, a poligonal de menor comprimento ligando estes pontos e contendo um ponto de r é a poligonal formada pelos segmentos $\overline{PX}$ e $\overline{PY}$, em que $P \in r$ é de tal forma que os ângulos $X\widehat{P}N$ e $N\widehat{P}Y$ são iguais, sendo $\overline{PN}$ a semirreta ortogonal a r que tem origem em P, com N pertencendo ao mesmo semiplano determinado por r que contém X e Y. Observe a Figura 2.*

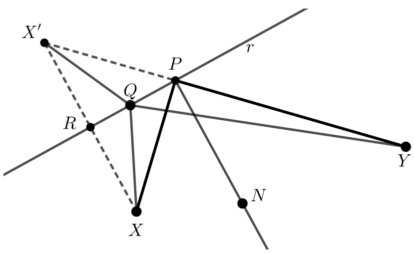

Figura 2: Caminho poligonal da Proposição 2.1.

Indicamos [2], página 72, para a demonstração da Proposição 2.1. Podemos utilizar a proposição anterior para concluir que:

Lema 2.1. *Dentre os n-ágonos de área A dada, o n-ágono regular possui o menor perímetro.*

Demonstração. Tomamos um polígono $\mathcal{P}$, com lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ não congruentes, como na Figura 3. Utilizando a reta r paralela à $\overline{AC}$ por B, segue da Proposição 2.1 que podemos obter B' com

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

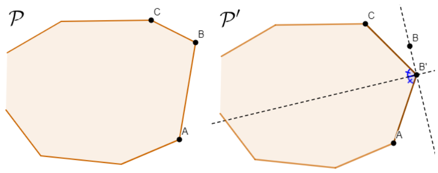

Figura 3: Exemplo de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{P}'$.

Desse modo, o polígono $\mathcal{P}'$ obtido de $\mathcal{P}$ pela substituição de B por B' nos fornece um polígono com lados $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$ congruentes e perímetro menor que o original, repetindo o processo aos demais lados não congruentes concluímos que o polígono equilátero é o de menor perímetro.

Consideremos agora $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ três lados de $\mathcal{P}$ que, como vimos, devem ter o mesmo comprimento. Suponhamos que $A\widehat{B}C = \alpha$ e $B\widehat{C}D = \alpha'$ são diferentes e que α seja o maior. Seja $F \in \overline{CD}$ tal que $C\widehat{B}F = \beta < \dfrac{\alpha - \alpha'}{2}$ e tracemos a paralela a $\overline{BF}$ passando por C e cuja interseção com o prolongamento de $\overline{AB}$ seja E, conforme a Figura 4. Denotemos $\gamma = E\widehat{B}F$ e $\gamma' = B\widehat{F}C$. Vemos que

$$\alpha + \gamma - \beta = \pi \quad \text{e} \quad \alpha' + \gamma' + \beta = \pi.$$

Portanto, $\gamma' - \gamma = \alpha - \alpha' - 2\beta$. Como $2\beta < \alpha - \alpha'$, ambos os lados da igualdade são positivos e, por isso, $\gamma' > \gamma$. Assim, temos que

$$\overline{BE} + \overline{EF} < \overline{BC} + \overline{CF}.$$

(Para validar tal desigualdade, basta pegarmos o quadrilátero $BECF$, marcarmos a interseção P da mediatriz de $\overline{BF}$ com a reta que contém $\overline{EC}$ e notar que a menor curva de extremidades B e F e contendo E ou C, passará pelo ponto, dentre estes dois, cuja distância ao ponto P é a menor, nesse caso, este ponto será o E).

Substituindo $\overline{BC}$ e $\overline{CF}$ por $\overline{BE}$ e $\overline{EF}$, P terá mesma área, mas um perímetro menor, o que é um absurdo. Assim P deverá ser, além de equilátero, equiângulo. □

Teorema 2.4. *Dentre os n-ágonos de perímetro L dado, o regular possui a maior área.*

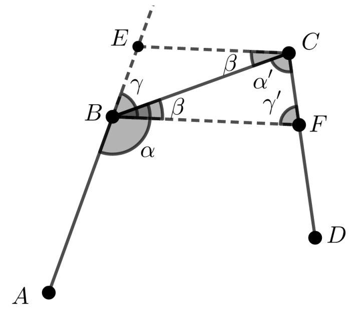

Figura 4: Exemplo de construção como no Lema 2.1.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{P}$ seja o n-ágono de maior área e perímetro L. Supondo que $\mathcal{P}$ não seja regular, há, pelo Lema 2.1, um n-ágono $\mathcal{P}'$ regular de mesma área S, mas de perímetro $L' < L$. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois lados consecutivos de $\mathcal{P}'$. Escolhemos um B' na reta r perpendicular à diagonal $\overline{AC}$ tal que

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} - (\overline{AB} + \overline{BC}) = L - L' \Rightarrow L = L' - (\overline{AB} + \overline{BC}) + (\overline{AB'} + \overline{B'C}).$$

Assim, tomando $\mathcal{P}'$ (de perímetro L') e trocando $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$, construímos um n-ágono $\mathcal{P}''$ de perímetro L e de área $S'' > S$, o que é um absurdo. Portanto $\mathcal{P}$ é regular. □

Teorema 2.5. *Dados dois polígonos regulares de perímetro* L*, aquele com o maior número de lados é o de maior área.*

Para a demonstração do resultado, veja a Proposição 1.2.2.8 de [5]. O Teorema 2.5 nos permite discutir o problema isoperimétrico para polígonos, enunciado no teorema a seguir.

Teorema 2.6 (Zenodorus). *Sejam um polígono de área* A *e um círculo de área* A_C*. Se ambos possuem perímetro* L*, então* $A_C > A$*.*

Demonstração. Tomemos a área A de um n-ágono regular de perímetro L que, pelo Teorema 2.4, é a maior dentre as áreas de todos os n-ágonos de mesmo perímetro. Como vimos, essa área pode ser dada como

$$A = n \cdot \frac{L}{2n} \cdot \frac{\frac{L}{2}}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{L^2}{4\pi} \cdot f\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Em que $f(x) = \dfrac{x}{\tan(x)}$ com $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ acima, determina se a área é maior ou menor. De

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x) - x}{\sin^2(x)} = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2(x)},$$

como $2\sin^2(x) > 0\ \forall x$, o sinal de f' é o mesmo que o de $\sin(2x) - 2x$. Para sabermos o sinal de $f'(x)$ no domínio de f, recorremos à uma análise no ciclo trigonométrico da Figura 5. Pondo $\alpha = A\widehat{O}B \neq 0$ cujo seno é $\overline{OB''} = \sin\alpha = \overline{BB'}$, teremos

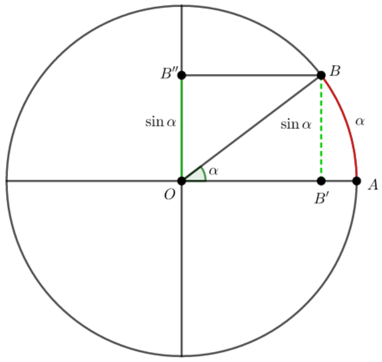

Figura 5: Círculo trigonométrico.

$\overline{BB'} < \overset{\frown}{AB}$ o que é equivalente a $\sin\alpha < \alpha$. Assim, para qualquer x do domínio de f teremos $\sin(2x) - 2x < 0$. Portanto, f' é negativa e, consequentemente f é uma função decrescente (o que reforça o Teorema 2.5). Além disso, usando a Regra de L'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cos^2(x) = \cos^2(0) = 1.$$

Como

$$0 < \frac{x}{\tan(x)} < \frac{\frac{\pi}{2}}{\tan(x)},$$

segue do Teorema do Confronto que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{x}{\tan(x)} = 0$, pois

$$0 < \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\tan(x)} < \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2}}{\tan(x)} = 0.$$

Das informações de f ser decrescente, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{x}{\tan(x)} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\tan(x)} = 1$, concluímos que $0 < f(x) < 1$, portanto

$$A = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \underbrace{f(x)}_{<1} \Rightarrow A < \frac{L^2}{4\pi}.$$

Essa desigualdade é dita **desigualdade isoperimétrica para polígonos**. O círculo de perímetro L possui raio $r = L/2\pi$, portanto sua área é

$$A_c = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} > A,$$

concluindo o resultado. $\square$

Partindo dos Lemas 2.2 e 2.3, chegamos ao Teorema 2.7, que nos garante que, considerando qualquer conjunto convexo diferente de um círculo e com perímetro fixo, podemos tomar um outro conjunto de mesmo perímetro, mas com uma área ainda maior.

Lema 2.2. *Dentre todos os triângulos com dois lados dados, o triângulo no qual esses lados são perpendiculares tem a maior área.*

Definição 2.1. *Seja S um subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^2$. Uma **corda** de S é um segmento de reta entre dois pontos da fronteira de S.*

Lema 2.3. *Se a corda de um conjunto convexo C bissecta o seu perímetro dividindo-o em dois setores de áreas diferentes, então existe um conjunto convexo C' com mesmo perímetro que C mas com maior área.*

As demonstrações dos Lemas 2.2 e 2.3 podem ser encontradas respectivamente nos Lemas 13.1 e 13.3 da página 90 de [4].

Teorema 2.7. *Seja um conjunto compacto e convexo $S \subset \mathbb{R}^2$ com interior não vazio. Se S não for um círculo, então existe um conjunto S' de maior área que possui o mesmo perímetro que S.*

Demonstração. Sejam X e Y pontos da fronteira de S que bissecta o perímetro. Se a corda $\overline{XY}$ divide a área de S em duas partes diferentes, pelo Lema 2.3 existe o conjunto S' desejado. Assim, podemos assumir que $\overline{XY}$ divide S em duas partes S_1 e S_2 que possuem áreas iguais.

Se S não for um círculo, deve haver ao menos um ponto P da fronteira de S tal que $X\widehat{P}Y$ não seja um ângulo reto, e podemos assumir que $P \in S_1$ (veja a Figura 6). Os segmentos $\overline{XP}$ e $\overline{PY}$ dividem S_1 em três partes: o triângulo XPY, o setor A_1 cortado pela corda $\overline{XP}$, e o setor A_2 cortado pela corda $\overline{PY}$. Agora substituímos S_1 por uma nova figura S_1' deixando A_1 e A_2 inalterados, mas de modo que tenhamos não mais o ângulo $X\widehat{P}Y$ entre A_1 e A_2, mas um ângulo reto $X'\widehat{P'}Y'$. Finalmente, seja S' a união de S_1' com a reflexão de S_1' na corda $X'Y'$. Assim S' tem o mesmo perímetro que S e, pelo Lema 2.2, a área de S' é maior que a de S. $\square$

Pelo Teorema 2.7, somente o círculo não nos dá a possibilidade de se obter a partir dele uma nova figura de mesmo perímetro e área maior. Isto é, o círculo é a figura de maior área dado um perímetro fixo.

2.2 Problema Isoperimétrico: uma abordagem utilizando Séries de Fourier

Nesta seção, baseada em Blåsjö [1] e em Klaser e Telichevesky [3], apresentamos uma demonstração da Desigualdade Isoperimétrica devida a Adolf Hurwitz (1902), cuja

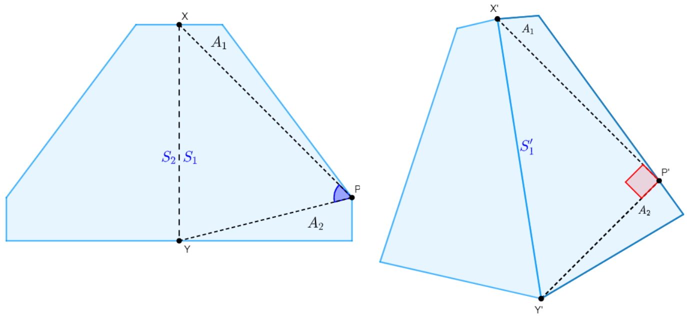

Figura 6: Exemplo de conjunto S e S' do Teorema 2.7.

ferramenta principal são as séries de Fourier. A seguir, alguns resultados envolvendo séries de Fourier são listados e retirados do texto de Reginaldo Santos [6].

Teorema 2.8. ***(Teorema de Fourier)*** *Nos pontos de $(-\ell, \ell)$ nos quais f é C^1 por partes, a série de Fourier de f converge para f. Isto é, nesse caso, podemos representar f pela sua série de Fourier:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right), \quad \forall t \in (-\ell, \ell),$$

tal que f é contínua, onde

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)\, dt \text{ e } b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)\, dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Além disso, para f', utilizamos o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Se $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua C^2 por partes tal que $f(-\ell) = f(\ell)$, então os coeficientes da série de Fourier de f', que converge, podem ser obtidos derivando, termo a termo, a série de Fourier de f.*

Aliamos ao Teorema 2.8 à Identidade de Parseval e um de seus resultados, enunciados a seguir.

Teorema 2.9. ***(Identidade de Parseval)*** *Sendo $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ contínua e C^1 por partes, tal que $f(-\ell) = f(\ell)$, é válida a igualdade a seguir.*

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} (f(t))^2\, dt \quad = \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{1}$$

Corolário 2.2. *Sejam f e g funções satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.9 e sejam*

a_n e b_n os coeficientes da série de Fourier de f e c_n e d_n os de g. Então

$$\frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)g(t)\,dt.$$

Seja C uma curva fechada C^1 por partes de comprimento L que limita uma região de área A. Além disso, seja $\overline{\alpha} = (\overline{x}(s), \overline{y}(s))$ uma parametrização de C pelo comprimento de arco. Então sua reparametrização $\alpha(t) = \overline{\alpha}\,(f(t))$ em que

$$f(t) = L\left(\frac{1}{2} + t\right),\ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

é tal que

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left[L \cdot \overline{x}'\,(f(t))\right]^2 + \left[L \cdot \overline{y}'\,(f(t))\right]^2 = L^2\left[\overline{x}'\,(f(t))^2 + \overline{y}'\,(f(t))\right]^2 = L^2.$$

Pelo Corolário 2.1, vemos que

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi\left[-a_n\sin(2n\pi t) + b_n\cos(2n\pi t)\right]$$

e, analogamente,

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\pi\left[-c_n\sin(2n\pi t) + d_n\cos(2n\pi t)\right].$$

Já pela Identidade de Parseval (1),

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x'(t))^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2) \tag{2}$$

e

$$2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (y'(t))^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} 4n^2\pi^2(c_n^2 + d_n^2). \tag{3}$$

Somando as equações (2) e (3), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x'(t))^2 + (y'(t))^2\,dt = L^2.$$

Pelo Corolário 2.2, a área A pode ser dada por

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t)y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot 2n\pi d_n + b_n \cdot 2n\pi(-c_n)\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(a_nd_n - b_nc_n).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
L^2 - 4A\pi &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[2n^2\pi^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 4n\pi^2(a_n d_n - b_n c_n)\right] \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[(na_n - d_n)^2 + d_n^2(n^2 - 1) + (nb_n + c_n)^2 + c_n^2(n^2 - 1)\right] \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Para que a igualdade seja válida, devemos ter $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para $n > 1$, e que $b_1 = -c_1 = -c$ e $a_1 = d_1 = d$. Resultando em:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + d\cos(2\pi t) - c\sin(2\pi t)$$

e

$$y(t) = \frac{c_0}{2} + c\cos(2\pi t) - d\sin(2\pi t).$$

Além disso, segue das expressões acima que

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = c^2 + d^2.$$

Ou seja, C é um círculo de centro em $\left(\frac{a_0}{2}, \frac{c_0}{2}\right)$ e raio $\sqrt{c^2 + d^2}$, e apenas esta curva nos dá $L^2 - 4A\pi = 0$, resolvendo o problema isoperimétrico.

3 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi demonstrar que o círculo é a solução do Problema Isoperimétrico, enunciado no Teorema 2.1, a partir de duas óticas distintas. A primeira delas parte de restrições do problema para polígonos, desenvolvendo um processo limite, enquanto a segunda, apresentada no início do século XX por Adolf Hurwitz, utiliza séries de Fourier.

4 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Gil Fidelix de Souza por toda paciência e dedicação, incomensuráveis para a produção deste trabalho; e ao grupo PETMAT que tanto contribuiu para minha formação, para o meu comprometimento com a educação de qualidade e para a concretização deste trabalho. Enfim, toda minha sincera gratidão a todos que de algum modo contribuíram para a realização deste trabalho.

Referências

[1] Viktor Blåsjö. The Isoperimetric Problem. *The American Mathematical Monthly*, 112(6):526–566, 2005.

[2] Djairo G de Figueiredo. Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana. *Matemática Universitária*, nº 9/10, 1989.

[3] Miriam Klaser, Patrícia Kruse e Telichevesky. *O Problema Isoperimétrico, IV Colóquio de Matemática da Região Sul*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[4] Steven R Lay. Convex Sets and Their Applications. John Wiley & Sons. *New York*, 1982.

[5] Roberto Limberger. Abordagens do Problema Isoperimétrico. *Dissertação de mestrado*, 2012.

[6] Reginaldo J Santos. Tópicos de Equaçoes Diferenciais. *Belo Horizonte*, 2011.

[7] P. Virgílio. *Eneida. Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em*, volume http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html. (acessado em 07/09/2022), 2005.