Convergência quadrática para obtenção de raízes de equações não lineares mesmo sem o uso de derivadas

Thais Ester Gonçalves thais.ester@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Eder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Geraldo César Gonçalves Ferreira geraldocesar@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

No presente trabalho apresentamos um método numérico para obter raízes de equações não lineares em $\mathbb{R}$. O método foi desenvolvido por Xinyuan Wu e Hongwei Wu em [3] e tem a vantagem de possuir convergência quadrática, assim como o método de Newton, mas sem o uso de derivadas no algoritmo proposto. A prova que apresentamos aqui é diferente da realizada em [3]. Testes numéricos comparando o método estudado e o de Newton também são apresentados.

Palavras-chave

Métodos numéricos, Equações não lineares, Convergência quadrática, Algoritmo.

1 Introdução

A busca por raízes de equações não lineares em $\mathbb{R}$ é um problema antigo. Segundo Pedroso (2010) [10], problemas que envolvem equações polinomiais de segundo grau já estavam presentes há mais de quatro mil anos em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia e em papiros no antigo Egito. Durante a história, diversos métodos foram criados para encontrar raízes de equações de primeiro e segundo graus.

Segundo Boyer e Merzbach (2012) [9], em 1545 Gerônimo Cardano publicou um tratado, o *Ars magna*, apresentando as resoluções de equações de terceiro (sugerida por Niccolo Tartaglia) e quarto grau (descoberta por Ludovico Ferrari), o que marcou o período da matemática moderna, impulsionando a pesquisa em álgebra. Com essa descoberta, pesquisas sobre a resolução de equações de graus maiores continuaram, mas, em 1799, Paolo Ruffini publicou, apesar de ser uma demonstração não satisfatória, sobre a não resolubilidade da equação quíntica. Já em 1824, Abel demonstrou que nenhuma solução é possível para equações de grau maior ou igual a 5. Dessa forma, apesar de existirem equações polinomiais de grau maior que 4 que possuem raízes, o teorema de Abel-Ruffini afirma que não existe fórmula fechada simples, composta unicamente por operações aritméticas e radicais, para encontrar tais raízes. O Teorema do Valor Intermediário (veja [8]) nos garante, por exemplo, que equações polinomiais de grau ímpar sempre possuem, pelo menos, uma raiz real. O mesmo teorema garante para uma grande gama de equações (não necessariamente polinomiais), a existência de raízes reais, mas também não há fórmulas fechadas em geral. Assim sendo, faz-se necessário a utilização de métodos numéricos para aproximar as possíveis raízes de uma equação da forma $f(x) = 0$, em que f é uma função real.

Na literatura, vários métodos são conhecidos para encontrar a solução de uma equação não linear, tais como os da Bisseção, de Ponto Fixo, de Newton e da Secante (veja, por exemplo [1]). Dentre os citados, o Método de Newton, cuja fórmula de iteração é dada por $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$, em que $p_0 \in \mathbb{R}$, é o mais rápido (com convergência quadrática), mas exige o cálculo da derivada da função. Métodos com convergência quadrática são quase sempre dependentes da derivada (veja, por exemplo, [4] e [3]). Do ponto de vista numérico, é de interesse na literatura obter métodos com boa convergência que não utilizem a derivada no algoritmo. O Método da Secante, por exemplo, não utiliza a derivada da função envolvida, mas possui uma taxa de convergência mais lenta que o método de Newton. Este possui uma taxa de convergência dada pelo número de ouro (veja [11]).

Nosso principal objetivo no presente trabalho é apresentar, detalhar e implementar, em Python, um método, proposto por Wu e Wu (2000) em [3], que possui convergência quadrática, mas que não faz uso da derivada da função envolvida no algoritmo. Tal método é denominado aqui por Método de Wu. Para provar matematicamente a convergência desse método, foi necessário estudar um forte embasamento teórico, tais como análise real (veja [8]), análise numérica (veja [1]) e espaços métricos (veja [7]). Vale ressaltar que as demonstrações que apresentamos dos resultados principais (veja Teoremas 2 e 3) são diferentes daquelas que podem ser vistas em [3]. O algoritmo trabalhado foi implementado em Python para apresentar exemplos numéricos. Neles, ilustramos exemplos em que o Método de Wu converge e o de Newton não.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. As principais referências são [7] e [1].

Definição 1 (Ordem de convergência)**.** *Suponha que (p_n) seja uma sequência que converge para p, com $p_n \neq p$ para todo n. Se existem constantes positivas λ e α com*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda,$$

dizemos que (p_n) converge para p com ordem α e com constante de erro assintótica λ.

No geral, quanto maior a ordem de convergência de um método numérico, mais rápido a sequência se aproxima do seu limite. Em particular, se $\alpha = 2$, a sequência é dita quadraticamente convergente. A constante assintótica afeta a velocidade de convergência, mas não é tão importante quanto a ordem.

Definição 2 (Ponto fixo)**.** *Seja M um conjunto não vazio. Chama-se ponto fixo de uma função $f : M \to M$ um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = p$.*

Vale observar que resolver a equação $f(x) = 0$ é equivalente a encontrar pontos fixos, caso existam, da função $g(x) = x - f(x)$. O Método de Newton, por exemplo, utiliza essa ideia.

Definição 3 (Contração)**.** *Uma função $f : M \to M$, em que M é um espaço métrico com métrica d, é uma contração se existir $0 < k < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.*

Exemplo 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo x, então para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

De fato, seja $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e consideremos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Como f é diferenciável, segue do Teorema do Valor Médio que existe c entre x e y tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq k|x - y|$.

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja M um espaço métrico completo[1] munido da métrica d. Então toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo. Além disso, dado um ponto qualquer $a \in M$, a sequência $(f^n(a)) = (f(a), f^2(a), f^3(a), ...)$ é convergente e seu limite é o ponto fixo de f.*

3 Método de Wu

Nesta seção vamos estudar uma classe de fórmulas de iteração que não utiliza derivadas, mas que ainda assim possuem convergência quadrática. Para isso, utlizamos [3] como referência. As fórmulas de iteração a serem aqui discutidas são do tipo

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f^2(p_n)}{\mu f^2(p_n) + f(p_n + f(p_n)) - f(p_n)}\,, \tag{1}$$

$n = 0, 1, 2, ...$ e $\mu \in \mathbb{R}$.

Observe que a fórmula de iteração (1) pode ser reescrita como

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{\mu f(p_n) + \frac{f(p_n + f(p_n)) - f(p_n)}{f(p_n)}}. \tag{2}$$

[1]Veja [7] para mais detalhes sobre Espaços Métricos Completos.

Para demonstrarmos a convergência da fórmula de iteração (1), precisaremos de alguns lemas apresentados a seguir.

Lema 1. *Seja $f \in C^1[a,b]$ com $f(p) = 0$ e $f'(p) \neq 0$. Se*

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+f(x)) - f(x)}{f(x)}, & \textit{se } x \neq p \\ f'(p), & \textbf{\textit{se}}\ x = p, \end{cases}$$

então ρ é derivável.

Demonstração. Como $f \in C^1[a,b]$, tem-se ρ é derivável para todo $x \neq p$. Para $x = p$, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho'(p) &= \lim_{x\to p} \frac{\rho(x) - \rho(p)}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{\frac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)} - f'(p)}{x-p} \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f(x+f(x)) - f(x) - f'(p)\cdot f(x)}{f(x)\cdot(x-p)}. \end{aligned}$$

Observe que no limite acima temos um indeterminação. Então, aplicando a regra de L'Hôpital duas vezes, temos

$$\rho'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f''(x+f(x))(1+f'(x))^2 + f'(x+f(x))\cdot f''(x) - f''(x) - f'(p)\cdot f''(x)}{f''(x)(x-p) + f'(x) + f'(x)}.$$

Assim, $\rho'(p) = \dfrac{2f''(p) + f'(p)f''(p)}{2}$. Logo, ρ é derivável. □

Lema 2. *Nas mesmas condições do Lema 1, temos que ρ' é contínua.*

Demonstração. Para $x \neq p$, temos

$$\rho'(x) \quad = \quad \frac{[f'(x+f(x))(1+f'(x)) - f'(x)]f(x) - [f(x+f(x)) - f(x)]f'(x)}{f^2(x)},$$

que é uma soma, produto e quociente com denominador não nulo de funções contínuas. Logo, para $x \neq p$, ρ' é contínua. Já para $x = p$:

$$\lim_{x\to p} \rho'(x) = \lim_{x\to p} \frac{[f'(x+f(x))(1+f'(x)) - f'(x)]f(x) - [f(x+f(x)) - f(x)]f'(x)}{f^2(x)}.$$

Aplicando a Regra de L'Hopital, obtemos

$$\lim_{x\to p} \rho'(x) \quad = \quad \lim_{x\to p} \frac{f''(x+f(x))(1+f'(x))^2 + f'(x+f(x))f''(x)}{2f'(x)} - \frac{f(x+f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f''(x)}{2f'(x)}.$$

Como $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x+f(x))}{f(x)} = 1 + f'(p)$, o limite acima existe. Então,

$$\lim_{x\to p} \rho'(x) \quad = \quad \frac{2f''(p) + f'(p)f''(p)}{2}.$$

Pela demonstração do Lema 1, temos que $\rho'(p) = \dfrac{2f''(p) + f'(p)f''(p)}{2}$. Assim, $\lim\limits_{x\to p} \rho'(x) = \rho'(p)$, o que nos garante que ρ' é contínua. $\square$

O teorema apresentado a seguir garante que a fórmula de iteração (1), sob algumas condições, converge.

Teorema 2. *Suponha que $f(p) = 0$ e que U_0 seja uma vizinhança suficientemente pequena de p. Seja f'' contínua em U_0, $f'(p) \neq 0$ e $\mu f(x) + f'(x) \neq 0$ para todo x. Então a sequência (p_n) produzida pela fórmula de iteração (1) é convergente.*

Demonstração. Seja $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{\mu f(x) + \rho(x)}$, em que ρ é dada pelo Lema 1. Pelo Lema 1, tem-se que φ é contínua. Por outro lado, pela Regra do Quociente, temos

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)(\mu f(x) + \rho(x)) - f(x)(\mu f'(x) + \rho'(x))}{(\mu f(x) + \rho(x))^2}.$$

Como $\rho(p) = f'(p)$ e $f(p) = 0$, temos $\varphi'(p) = 0$. Aplicando o Lema 2, concluímos que φ' é uma função contínua. Dessa forma, para todo $0 < k < 1$, existe $\delta > 0$ tal que para $|x - p| < \delta$ temos

$$|\varphi'(x) - \varphi'(p)| < k \Rightarrow |\varphi'(x)| < k.$$

Deste modo, pelo Exemplo 1, φ' é uma contração e o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante que a fórmula de iteração (1) é convergente, já que $p_{n+1} = \varphi(p_n)$. $\square$

O Teorema 2 nos garante que o Método de Wu é convergente. Agora, mostraremos que ele possui ordem de convergência quadrática. Destacamos que iremos apresentar uma demonstração diferente daquela apresentada em [3], sendo necessário introduzirmos uma notação denominada 'o' pequeno, cujas referências são [5] e [2].

Definição 4. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ ilimitado superiormente e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função. Considere o conjunto:*

$$o(g) = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\ \textit{para todo } \varepsilon > 0, \exists\, M > 0 \textit{ tal que } |f(x)| < \varepsilon|g(x)|\ \forall x > M\}.$$

Dizemos que $f(x) = o(g(x))$ (lê-se "f é o pequeno de g") quando $x \to \infty$, se $f \in o(g)$.

Proposição 1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções com $g(x)$ não nula para todo x suficientemente grande, então $f(x) = o(g(x))$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Demonstração. $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow$ para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x > M$ tem-se $|f(x)| < \varepsilon|g(x)| \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. $\square$

Definição 5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de X e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções com $g(x)$ não nula numa vizinhança do ponto a. Dizemos que $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to a$ se $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

A partir da Definição 5, quando usamos a expressão de Taylor para uma função suficientemente derivável, podemos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \text{ quando } x \to a.$$

De fato, se $r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, pela Fórmula de Taylor Infinitesimal, temos $\lim_{x\to a} \dfrac{r(x)}{x-a} = 0$, ou seja, $r(x) = o(x-a)$ quando $x \to a$. Analogamente, se $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + o\Big((x-a)^n\Big).$$

Definição 6. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado superiormente e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções. Definimos as operações:*

(i) $c \cdot o(f) = o(f)$ *para* $c \neq 0$;

(ii) $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;

(iii) $f \cdot o(g) = o(fg)$;

(iv) $o(f) + o(g) = o(h)$, *em que* $h = max\{|f|, |g|\}$.

A boa definição das operações dadas na Definição 6 pode ser vista em [6]. A partir da notação introduzida acima, demonstraremos o

Teorema 3. *Suponha que $f(p) = 0$ e que U_0 seja uma vizinhança suficientemente pequena de p. Seja f'' contínua em U_0, $f'(p) \neq 0$ e $\mu f(x) + f'(x) \neq 0$ para todo x. Então a sequência (p_n) produzida pela fórmula de iteração* (1) *possui ordem de convergência quadrática.*

Demonstração. Considere $e_n = p_n - p$. Por (2), temos:

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(p_n)}{\mu f(p_n) + \frac{f(p_n + f(p_n)) - f(p_n)}{f(p_n)}}. \tag{3}$$

Pela expansão do polinômio de Taylor, temos que

$$f(p_n) = f(p) + f'(p)e_n + \frac{f''(p)e_n^2}{2} + o({e_n}^2) = f'(p)e_n + \frac{f''(p)e_n^2}{2} + o({e_n}^2).$$

Substituindo o termo anterior em (3), temos:

$$e_{n+1} = e_n \left(1 - \frac{f'(p) + \frac{f''(p)e_n}{2} + o(e_n)}{\mu f(p_n) + \frac{f(p_n+f(p_n))-f(p_n)}{f(p_n)}}\right). \tag{4}$$

Expandindo $f(p_n + f(p_n))$ em torno de p_n, temos:

$$f(p_n + f(p_n)) = f(p_n) + f(p_n)[f'(p_n) + \frac{1}{2}f''(p_n)f(p_n) + o(f(p_n))],$$

o que implica em $\dfrac{f(p_n + f(p_n)) - f(p_n)}{f(p_n)} = f'(p_n) + \dfrac{1}{2}f''(p_n) \cdot f(p_n) + o(f(p_n))$.
Logo, substituindo esse resultado em (4), temos que e_{n+1} é igual a

$$e_n \left(\frac{\mu f(p_n) + f'(p_n) + \frac{1}{2}f''(p_n) \cdot f(p_n) + f(p_n)o(1) - f'(p) - \frac{f''(p)e_n}{2} - o(e_n)}{\mu f(p_n) + f'(p_n) + \frac{1}{2}f''(p_n) \cdot f(p_n) + o(f(p_n))}\right).$$

A partir de manipulações algébricas e expansões em polinômios de Taylor, obtemos que $\dfrac{e_{n+1}}{{e_n}^2}$ é igual a

$$\frac{\mu\left[f'(p) + \frac{1}{2}f''(p)e_n + o(e_n)\right] + f''(p) + o(1) + \frac{1}{2}f''(p_n)\left[f'(p) + \frac{1}{2}f''(p)e_n + o(e_n)\right]}{\mu f(p_n) + f'(p_n) + \frac{1}{2}f''(p_n) \cdot f(p_n) + o(f(p_n))}$$
$$+ \frac{\left[f'(p) + \frac{1}{2}f''(p)e_n + o(e_n)\right]o(1) - \frac{1}{2}f''(p) - o(1)}{\mu f(p_n) + f'(p_n) + \frac{1}{2}f''(p_n) \cdot f(p_n) + o(f(p_n))}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{{e_n}^2} = \frac{\mu f'(p) + f''(p) + \frac{1}{2}f''(p) \cdot f'(p) - \frac{1}{2}f''(p)}{f'(p)} = \mu + \frac{1}{2}\frac{f''(p)}{f'(p)} + \frac{1}{2}f''(p),$$

o que mostra que a fórmula de iteração (1) é quadraticamente convergente. □

4 Testes numéricos

Nesta seção apresentamos testes numéricos utilizando a fórmula de iteração (1) e fazemos comparações com o Método de Newton. Nos exemplos discutidos, no Método de Wu consideramos $\mu = 1$. Em todos os testes numéricos adotamos como critério de parada $\max\{|p_{n+1} - p_n|, |f(p_{n+1}) - f(p_n)|\} < 10^{-10}$, com o máximo de 100 iterações. Além disso, nos exemplos consideramos funções f definidas em um intervalo $[a, b]$ sendo o extremo direito do intervalo a aproximação inicial, isto é, $p_0 = b$. Os Algoritmos foram implementados em Python e estão disponíveis em `https://github.com/thaisgoncalves19/Numerical-methods`.

Exemplo 2. $f(x) = 10xe^{-x^2} - 1$ *definida no intervalo* $[0, 3]$ *com* $p_0 = 3$.

Neste exemplo, o Método de Wu fornece uma aproximação para a raiz da equação após 9 iterações (veja a Tabela 1), enquanto o método de Newton é divergente.

Tabela 1: Iteração utilizando o Método de Wu para o Exemplo 2.

n	p_n	$\|f(p_n)\|$
0	3	-
1	2.265005094147629	0.866022844581497
2	1.9756799844179935	0.6014066970725402
3	1.7985622929483887	0.2919592348220904
4	1.707292160496921	0.07443678415685595
5	1.6815271321234542	0.0052322790309589085
6	1.6796402179630705	$2.6553946283591756 \times 10^{-5}$
7	1.6796306106764014	$6.853109191240492 \times 10^{-10}$
8	1.67963061042845	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
9	1.67963061042845	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$

Exemplo 3. $f(x) = x^3 - 2x + 2$, *definida em* $[-2, 1]$ *com* $p_0 = 1$.

O Método dado pela fórmula de iteração (1), com 21 iterações, fornece uma aproximação para a raiz da equação, como podemos visualizar na Tabela 2. Já o método de Newton gera a sequência $(1, 0, 1, 0, ...)$, que diverge.

Tabela 2: Iteração utilizando a fórmula descrita em 1 para o Exemplo 3.

n	p_n	$\|f(p_n)\|$
0	1	-
1	0.8333333333333334	0.9120370370370372
2	0.6112792600980715	1.0058535147515608
3	0.27410138747808677	1.472390892793467
4	-0.2044955496791801	2.4004394165617975
5	-0.7029912268557252	3.058566533849702
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
19	-1.7692931278480435	$5.717894468126872 \times 10^{-6}$
20	-1.7692923542416392	$2.2231105845094135 \times 10^{-11}$
21	-1.7692923542386314	0.0

Exemplo 4. $f(x) = cos(x)$ *definida no intervalo* $[0, 3.5]$ *com* $p_0 = 3.5$.

Neste exemplo, o Método de Wu converge, com 8 iterações, para a raiz da função, $p = 1.5707963267948968$, no intervalo em que está definida. Já o Método de Newton, converge para uma raiz, $\tilde{p} = -1.5707963267948968$, que está fora do intervalo em que a função está definida. As tabelas a seguir exibem as iterações obtidas em cada um desses métodos.

Tabela 3: Iterações dos Métodos de Wu e Newton para o Exemplo 4.

(a) Método de Wu e Wu.

n	p_n	$\|f(p_n)\|$
0	3.5	-
1	2.601371940994912	0.8575951841846744
2	2.083780354584462	0.4907793634155008
3	1.7442673928887016	0.1726023528855814
4	1.5964368960255222	0.025637759805508087
5	1.5714373296081592	0.0006410027693662004
6	1.5707967374162937	$4.106213970454369\times10^{-7}$
7	1.5707963267950653	$1.6869266740306641\times10^{-13}$
8	1.5707963267948968	$1.6081226496766366\times10^{-16}$

(b) Método de Newton.

n	p_n	$\|f(p_n)\|$
0	3.5	-
1	6.16961648496887	0.993557989799850
2	-2.59772816850558	0.855715410830415
3	-0.944001642456988	0.586551752701094
4	-1.66821851339413	0.0972681527140461
5	-1.57048693816704	0.000309388622918670
6	-1.57079632680477	$9.87159781341708\times10^{-12}$
7	-1.57079632679490	$6.12323399573677\times10^{-17}$

5 Conclusão

Neste trabalho notamos a importância dos métodos numéricos para aproximar raízes de equações. Na busca por bons métodos, conseguimos apresentar um algoritmo (Método de Wu) que não necessita do cálculo de derivada da função envolvida e, ainda assim, possui boa taxa de convergência (quadrática), diferentemente de outros métodos, como o da Secante, que não usam derivadas, mas possuem taxa de convergência mais lenta.

Além disso, no decorrer deste trabalho ficou evidente a importância e necessidade de se escolher/definir uma linguagem adequada (a saber, a 'o' pequeno) para se obter o(s) resultado(s) desejado(s).

Cabe ressaltar que para realizar os testes numéricos foi necessário estudar uma linguagem de programação. Optamos pela linguagem Python por sua simplicidade.

Por fim, o Método de Wu se mostrou mais interessante que o de Newton, pois, além de não utilizar derivadas em seu algoritmo, foi mais eficiente na obtenção de raízes dentro de um intervalo escolhido, como ilustraram os exemplos discutidos na Seção 4.

6 Agradecimentos

À Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concebida através do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) e ao Programa de Educação Tutorial de Matemática (PETMAT UFOP), que permitiram o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

[1] Richard L. Burden; J. Douglas Faires; Annette M. Burden. *Análise numérica*. Cengage Learning, 2016.

[2] Matheus da Silva Serpa et al. *Análise de algoritmos*. Porto Alegre, SAGAH, 2021.

[3] Xinyuan Wu e Hongwei Wu. On a class of quadratic convergence iteration formulae without derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 107(2-3):77–80, 2000.

[4] Xinlong Feng e Yinnian He. High order iterative methods without derivatives for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation v. 186, n. 2, p. 1617-1623*, 2007.

[5] Thomas H. Cormen et al. Tradução Arlete Simille Marques. *Algoritmos - Teoria e Prática*. Rio de Janeiro, LTC, 2022.

[6] Thais Ester Gonçalves. *Raízes de equações não lineares: um método numérico com convergência quadrática sem o uso de derivadas*. Monografia (Graduação em Matemática) - Instituto de Ciência Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2022.

[7] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 2017.

[8] Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2018.

[9] Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach. *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

[10] Hermes Antônio Pedroso. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de Matemática*, 2010.

[11] REAMAT. Cálculo numérico. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/sdeduv.html. Acesso em: 02 de nov. de 2022, 2020.