Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática

Juan López Linares jlopez@usp.br
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Universidade de São Paulo, Pirassununga, São Paulo, Brasil

Alexys Bruno-Alfonso alexys.bruno-alfonso@unesp.br
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Matemática, São Paulo, Brasil.

Resumo

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática e a Olimpíada Iraniana de Geometria são discutidos em detalhe. Uma introdução dos conteúdos de trigonometria utilizados é apresentada. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas, utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que se preparam para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e se interessem em problemas mais desafiadores.

Palavras-chave

Olimpíadas internacionais de Matemática, Trigonometria, Problemas resolvidos, Ensino Médio e Universitário, Geometria.

1 Introdução

A trigonometria aparece com frequência nos problemas de olimpíadas coligada a diversos assuntos. Neste artigo são resolvidos cinco, utilizando conteúdos diferentes, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os dois primeiros para a Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) e os três últimos desafios foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad). Em todos requere-se, entre outras habilidades, lidar com as funções seno e cosseno e suas propriedades.

Embora úteis, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas olímpicos não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções encontram-se frequentemente em inglês.

©2023 by Periódicos UFOP

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as discussões no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Baricentro [2], Incírculos e Ex-incírculos [3] e a Desigualdade de Ptolomeu [4]. Na Seção 2 é feita uma breve introdução de alguns conceitos básicos de trigonometria e na Seção 3 são enunciados e resolvidos os cinco problemas olímpicos.

2 Alguns resultados básicos sobre trigonometria

2.1 Funções Seno, Cosseno e Tangente

A Figura 1 mostra uma circunferência trigonométrica (de raio unitário) e três triângulos OAB, OGE e ODC, retângulos em B, E e C, respectivamente.

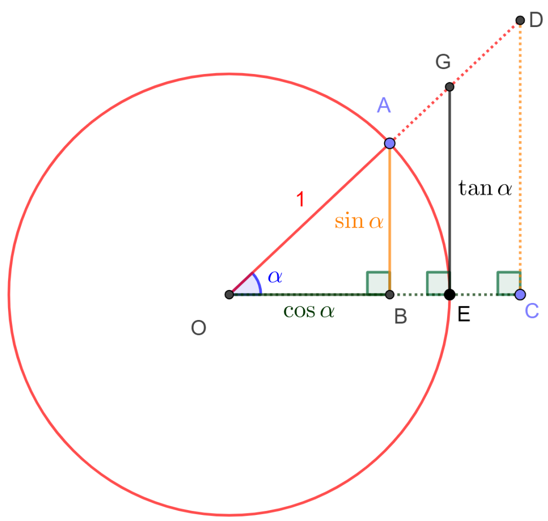

Figura 1: Funções Seno, Cosseno e Tangente. Versão interativa aqui.

Pelo critério de semelhança AA vale que:

$$\triangle DCO \sim \triangle GEO \sim \triangle ABO.$$

Portanto,

$$\frac{DC}{DO} = \frac{GE}{GO} = \frac{AB}{AO},$$
$$\frac{CO}{DO} = \frac{EO}{GO} = \frac{BO}{AO},$$
$$\frac{DC}{CO} = \frac{GE}{EO} = \frac{AB}{BO}.$$

As igualdades anteriores não dependem da posição específica do ponto C sobre o eixo x, somente do $\angle AOB = \angle GOE = \angle DOC = \alpha$. Isto leva à definição das funções seno, cosseno e tangente.

Definição 2.1 (Funções Seno, Cosseno e Tangente)**.** *Num triângulo retângulo, relativo ao ângulo de medida α formado por um dos catetos e a hipotenusa, vale:*

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{cateto\,oposto}{hipotenusa},$$

$$\cos(\alpha) = \frac{cateto\,adjacente}{hipotenusa},$$
$$\tan(\alpha) = \frac{cateto\,oposto}{cateto\,adjacente}.$$

Relativo a circunferência trigonométrica da Figura 1 vale:

$$\text{sen }(\alpha) = \frac{AB}{AO} = AB,$$

$$\cos(\alpha) = \frac{OB}{AO} = OB,$$
$$\tan(\alpha) = \frac{GE}{OE} = GE.$$

Com α escrito em radianos sua medida coincide com o comprimento do arco que ele determina sobre a circunferência unitária. A Figura 1 sugere que para todo ângulo $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\text{sen }(\alpha) \leq \alpha \leq \tan(\alpha).$$

2.2 Relação trigonométrica fundamental

Teorema 2.1 (Relação trigonométrica fundamental)**.** *Para todo ângulo de medida α vale:*

$$\cos^2(\alpha) + \text{sen }^2(\alpha) = 1.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Pitágoras no $\triangle OBA$ da Figura 1. $\square$

2.3 Cálculo de Seno e Cosseno de ângulos notáveis

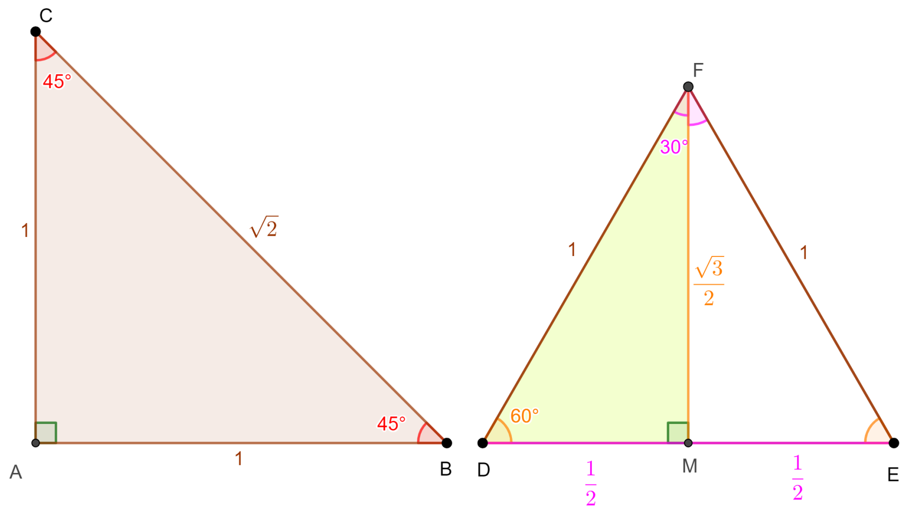

Figura 2: Cálculo de Seno e Cosseno de Ângulos Notáveis. Versão interativa aqui.

$$\operatorname{sen}(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen}(60^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.4 Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos

Teorema 2.2 (Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos)**.** *Para quaisquer dois ângulos de medidas α e β valem:*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta),$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

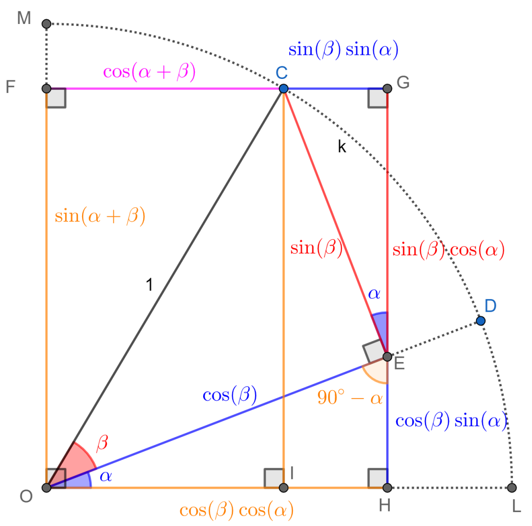

Figura 3: Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos. Versão interativa aqui.

Demonstração. Considera-se uma circunferência unitária k, de centro O, e os pontos $C, D, L, M \in k$ com $OL \perp OM$. Sejam $\angle DOL = \alpha$ e $\angle COD = \beta$. A prova na Figura 3 está ilustrada no caso $\alpha + \beta < 90°$, embora seja válida para qualquer outro valor da soma. Sejam os pontos E, I e F as projeções ortogonais do ponto C sobre os segmentos OD, OL e OM, respectivamente. Do $\triangle OEC$ vale que:

$$OE = \cos(\beta),$$

$$CE = \operatorname{sen}(\beta).$$

Do $\triangle OIC$ tem-se:

$$OI = FC = \cos(\alpha+\beta),$$

$$FO = CI = \operatorname{sen}(\alpha+\beta).$$

Seja o ponto H a projeção ortogonal do ponto E sobre o segmento OL. Do $\triangle OHE$ vale que:

$$EH = OE \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha),$$

$$OH = OE \cdot \cos(\alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha).$$

Seja o ponto $G = HE \cap FC$. Nota-se que $\angle OEH = 90° - \alpha$ e $\angle GEC = \alpha$. Do $\triangle EGC$ segue:

$$EG = CE \cdot \cos(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha),$$

$$CG = CE \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha).$$

Portanto,

$$OF = IC = HE + EG,$$

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta),$$

$$FC = FG - CG = OH - CG,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}\,(\alpha)\,\text{sen}\,(\beta).$$

□

Corolário 2.1 (Seno e Cosseno da Soma do Ângulo Duplo)**.** *Para qualquer ângulo* α *vale,*

$$\text{sen}\,(2\alpha) = 2\,\text{sen}\,(\alpha)\cos(\alpha),$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha).$$

Demonstração. Basta colocar $\alpha = \beta$ nas fórmulas do Teorema 2.2 (Seno e Cosseno da Soma de dois Ângulos). □

2.5 Lei dos Senos

Teorema 2.3 (Lei dos Senos)**.** *Seja o* $\triangle ABC$ *de lados* $BC = a$, $CA = b$ *e* $AB = c$ *e* R *o raio da circunferência circunscrita. Então,*

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\,(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}\,(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}\,(\hat{C})}.$$

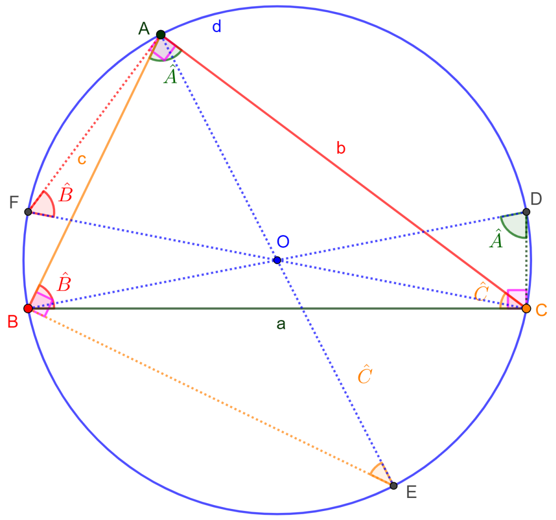

Figura 4: Demonstração da Lei dos Senos. Versão interativa aqui.

Demonstração. Construir a circunferência circunscrita d utilizando duas mediatrizes (Figura 4). Traçar a semirreta BO e marcar o ponto D tal que BD é diâmetro de d. Segue que $\angle BCD = 90^\circ$. Por enxergarem a mesma corda BC vale:

$$\angle BAC = \angle BDC = \hat{A}.$$

No triângulo retângulo DCB tem-se:

$$\text{sen}\,(\hat{A}) = \frac{a}{2R}.$$

Ou seja,

$$2R = \frac{a}{\text{sen}\,(\hat{A})}.$$

Analogamente, no triângulo retângulo FAC vale que:

$$\text{sen}\,(\hat{B}) = \frac{b}{2R}.$$

Portanto,

$$2R = \frac{b}{\text{sen}\,(\hat{B})}.$$

Do mesmo modo, no triângulo retângulo EBA segue:

$$\text{sen}\,(\hat{C}) = \frac{c}{2R}.$$

Isto é,

$$2R = \frac{c}{\text{sen}\,(\hat{C})}.$$

□

3 Problemas olímpicos resolvidos

3.1 Cosseno e Seno de ângulos notáveis. Arco Capaz. Triângulo Acutângulo. P1 NI IGO 2017.

Problema 1. *Seja ABC um triângulo acutângulo com ângulo em A de $60°$. Sejam E e F os pés das alturas por B e C, respectivamente. Provar que:*

$$CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB). \tag{1}$$

Problema 1 (Nível Intermediário) da $4^{\underline{a}}$ Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2017.

3.1.1 Resolução do Problema 1

Na Figura 5 ilustra-se a resolução do problema.

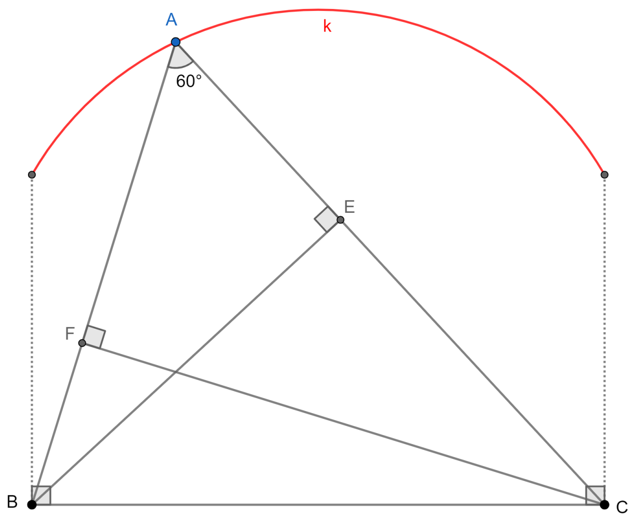

Figura 5: Resolução do Problema 1. Versão interativa aqui.

Neste caso, uma construção geométrica precisa não é imprescindível para resolver o problema, bastaria ter feito um esboço. Porém, aproveita-se a simplicidade da figura para lembrar da construção do Arco Capaz k e de triângulos acutângulos. A sequência de passos para a construção do Arco Capaz pode ser vista aqui. O ponto A deve estar posicionado sobre k.

Lembra-se que $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, logo, no triângulo AEB (retângulo em E) pode-se escrever:

$$\cos(60°) = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Analogamente, no triângulo AFC (retângulo em F) tem-se:

$$\cos(60°) = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

A seguir troca-se AE por $AC - CE$ e AF por $AB - BF$ em (2) e (3):

$$\frac{AC - CE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{AB - BF}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Colocando em evidência CE e BF segue que:

$$CE = AC - \frac{1}{2}AB,$$

$$BF = AB - \frac{1}{2}AC.$$

Da diferença das duas equações anteriores conclui-se a validade de (1). Uma resolução deste problema também está disponível em vídeo.

3.2 Trigonometria, triângulos isósceles e retângulos. P3 NE IGO 2015.

Problema 2. *Na Figura 6 sabe-se que $AB = CD$ e $BC = 2AD$. Provar que $\angle BAD = 30°$.*

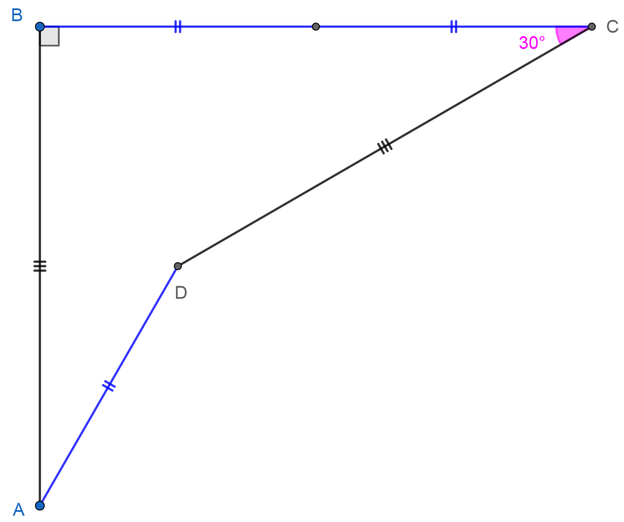

Figura 6: Ilustração do Problema 2. Versão interativa aqui.

Problema 3 (Nível Elemental) da $2^{\underline{a}}$ Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2015, proposto por Morteza Saghafian. A seguir são apresentadas duas resoluções.

3.2.1 Resolução-1 do Problema 2

Partindo do ponto D traçam-se as perpendiculares a BC e AB. Sejam os pontos E e F as interseções, respectivamente. Como $\angle FBE = 90^\circ$ o quadrilátero $FBED$ é um retângulo e $FB = DE$. No $\triangle DCE$ tem-se:

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{DE}{DC}.$$

Mas, por hipótese, $DC = AB$, logo F é ponto médio de AB. Como DF é altura e mediana, o $\triangle DAB$ é isósceles de base AB. Logo $AD = DB$ e $\angle DAB = \angle DBA$. Adicionalmente, de $BC = 2AD$ segue:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(30^\circ).$$

Isto é, o $\triangle BDC$ é retângulo em D (devido à Lei dos Senos). Portanto, $\angle DBC = 60^\circ$ e $\angle DBA = \angle BAD = 30^\circ$. A Figura 7 mostra a construção geométrica correspondente a esta resolução do problema.

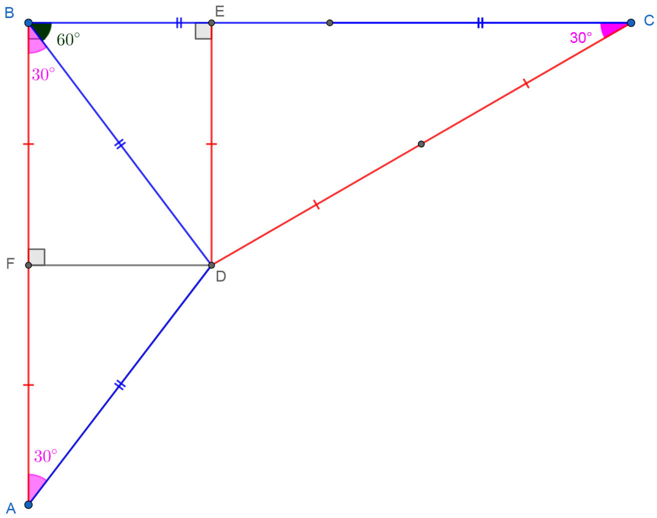

Figura 7: Construção geométrica da Resolução-1 do Problema 2. Versão interativa aqui.

3.2.2 Resolução-2 do Problema 2

Partindo do segmento CD é construído um triângulo equilátero DCP. Somando os ângulos BCD e DCP segue que: $\angle BCP = 90°$. O quadrilátero $ABCP$ é um retângulo com $AB = CP = DC$. Tem-se:

$$\angle APD = \angle APC - \angle DPC = 90° - 60° = 30° = \angle BCD.$$

Adicionalmente, $AP = BC$ e $PD = CD$. Pelo critério de congruência LAL segue $\triangle APD \equiv \triangle BCD$. Consequentemente $AD = BD$, o $\triangle DAB$ é isósceles de base AB e $\angle DAB = \angle DBA$.

Nota-se ainda que $BC = 2AD$, logo:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(30°).$$

Isto é, o $\triangle BDC$ é retângulo em D (devido à Lei dos Senos). Conclui-se que $\angle DBC = 60°$ e $\angle DBA = \angle BAD = 30°$. A Figura 8 mostra a construção geométrica correspondente a esta resolução. Uma discussão deste problema também está disponível em vídeo.

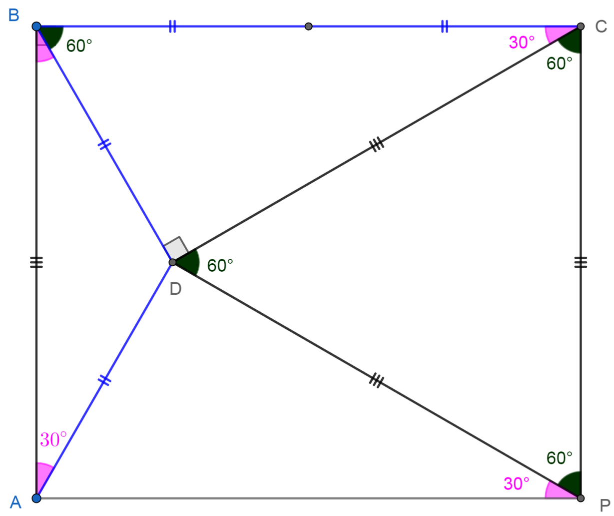

Figura 8: Construção geométrica da Resolução-2 do Problema 2. Versão interativa aqui.

3.3 Trigonometria e média geométrica em um triângulo arbitrário. P2 IMO 1974.

Problema 3. *Seja ABC um triângulo arbitrário. Provar que existe um ponto D no lado AB tal que CD é a média geométrica de AD e BD se, e somente se,*

$$\sqrt{\operatorname{sen}\left(\hat{A}\right)\operatorname{sen}\left(\hat{B}\right)} \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right). \tag{4}$$

A IMO 1974 foi realizada na cidade de Erforte, na Alemanha. O problema acima foi proposto por Matti Lehtinen da delegação da Finlândia [1].

3.3.1 Caso do triângulo retângulo no Problema 3.

A Figura 9 mostra o caso em que o $\triangle ABC$ é retângulo em C. Sabe-se que existem dois pontos D com a propriedade requerida: $D_1 = H$ está no pé da altura em relação ao vértice C e $D_2 = O$ está no ponto médio do segmento AB. Nos dois casos vale:

$$\frac{CD^2}{AD \cdot BD} = 1. \tag{5}$$

Em outras palavras, CD é a média geométrica de AD e BD. Para D_1 a equação (5) é uma das relações métricas do triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa ao vértice com ângulo reto é o produto das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Para D_2 vale que $CO = AO = BO$, a mediana relativa à hipotenusa mede a metade desta.

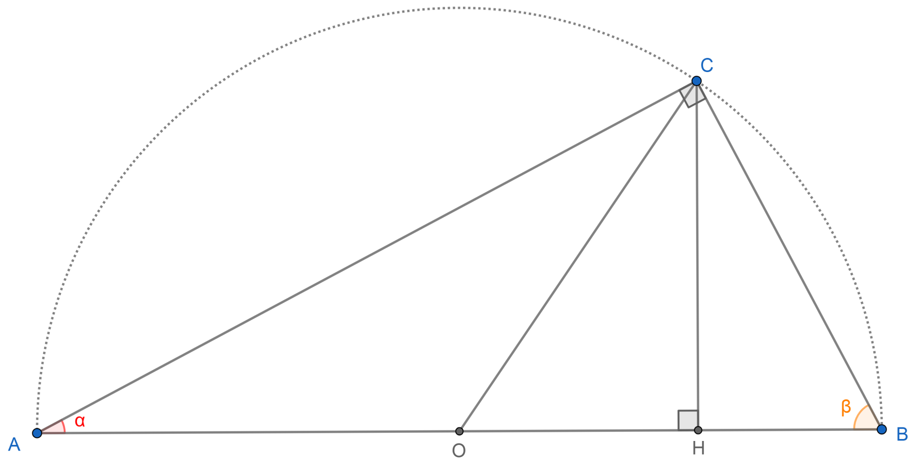

Figura 9: Em um triângulo retângulo existem dois pontos D com a propriedade requerida: $D_1 = H$ está no pé da altura em relação ao vértice C e $D_2 = O$ está no ponto médio do segmento AB. O ponto O é centro do semicírculo pontilhado.

Com $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta = 90^\circ - \alpha$ e $\frac{\hat{C}}{2} = 45^\circ$ a equação (4) transforma-se em:

$$\sqrt{\text{sen } (\alpha) \text{ sen } (90^\circ - \alpha)} \leq \text{ sen } (45^\circ),$$

$$\text{sen } (\alpha) \cos(\alpha) \leq \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Um forma de mostrar que a desigualdade (6) é válida para todo α é notando que:

$$\text{sen } (\alpha) \cos(\alpha) \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \text{ sen } (2\alpha) = 2 \text{ sen } (\alpha) \cos(\alpha) \leq 1,$$

o que sempre é verdade pois o cateto oposto é sempre menor que a hipotenusa.

3.3.2 Resolução do Problema 3.

O problema proposto dá uma condição necessária e suficiente para a existência de um ponto D^* com a propriedade referida em um triângulo arbitrário, não necessariamente retângulo, como ilustrado na Figura 10.

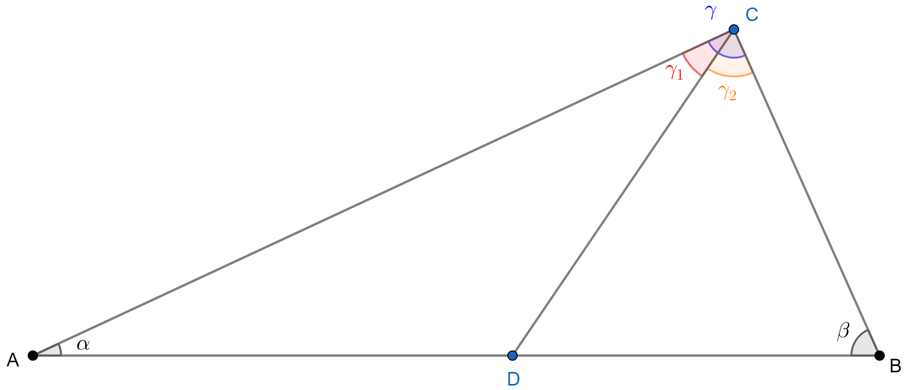

Figura 10: Triângulo com ponto D que satisfaz que CD é a média geométrica de AD e BD. Versão interativa aqui.

Inicia-se definindo uma função real f, com variável no conjunto de todas as posições possíveis do ponto D no lado AB, $D \neq A$ e $D \neq B$, dada pela equação:

$$f(D) = \frac{CD^2}{AD \cdot BD}. \tag{7}$$

Sejam os ângulos $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$, $A\hat{C}D = \gamma_1$ e $B\hat{C}D = \gamma_2$. Tem-se:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo DCA encontra-se:

$$\frac{CD}{\text{sen }(\alpha)} = \frac{AD}{\text{sen }(\gamma_1)},$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\text{sen }(\alpha)}{\text{sen }(\gamma_1)}. \tag{8}$$

Analogamente, aplicando a Lei dos Senos no triângulo DCB encontra-se:

$$\frac{CD}{\text{sen }(\beta)} = \frac{BD}{\text{sen }(\gamma_2)},$$

$$\frac{CD}{BD} = \frac{\text{sen }(\beta)}{\text{sen }(\gamma_2)}. \tag{9}$$

Com as equações (8) e (9) reescreve-se (7) como:

$$f\left(D\right) = \frac{\text{ sen }\left(\alpha\right) \text{ sen }\left(\beta\right)}{\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right)}. \tag{10}$$

Movimentando o ponto D no lado AB do triângulo arbitrário ABC mudarão γ_1 e γ_2 e consequentemente $f\left(D\right)$. Quer-se encontrar o conjunto imagem dessa função, o que permitirá determinar a condição necessária e suficiente da existência do ponto D^* que satisfaz $f\left(D^*\right) = 1$. Para isso será procurada uma desigualdade que relacione $\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right)$ com $\text{ sen }\left(\gamma\right)$.

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas:

$$\cos\left(\gamma_1 - \gamma_2\right) = \cos\left(\gamma_1\right)\cos\left(\gamma_2\right) + \text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right), \tag{11}$$

$$\cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) = \cos\left(\gamma_1\right)\cos\left(\gamma_2\right) - \text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right). \tag{12}$$

Subtraindo (12) de (11) encontra-se que:

$$\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\gamma_1 - \gamma_2\right) - \cos\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)\right],$$

$$\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\gamma_1 - \gamma_2\right) - \cos\left(\gamma\right)\right].$$

Como $\cos\left(\gamma_1 - \gamma_2\right) \leq 1$, valendo a igualdade quando $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$, segue que:

$$\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right) \leq \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\gamma\right)\right]. \tag{13}$$

Partindo de (12) pode-se escrever:

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{ sen }\left(\frac{\gamma}{2}\right) \text{ sen }\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos\left(\gamma\right) = \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{ sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\cos\left(\gamma\right) = 1 - 2\,\text{sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\gamma\right)\right] = \text{ sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \tag{14}$$

Substituindo (14) em (13) encontra-se:

$$\text{ sen }\left(\gamma_1\right) \text{ sen }\left(\gamma_2\right) \leq \text{ sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right). \tag{15}$$

Agora substituindo (15) em (10) chega-se a:

$$f\,(D) = \frac{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)}{\text{sen }(\gamma_1)\text{ sen }(\gamma_2)} \geq \frac{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)}{\text{sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Isto é, a imagem da função f não pode ser menor que o valor mínimo dado por:

$$\frac{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)}{\text{sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Por outro lado, como

$$\text{sen }(\gamma_1)\text{ sen }(\gamma_2)$$

tende a zero por valores positivos quando o ponto D tende ao ponto A ou ao ponto B, tem-se que a função f é ilimitada superiormente. Em outras palavras, vale que:

$$\frac{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)}{\text{sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \leq f\,(D) < \infty.$$

Como procura-se que o valor $f\,(D^*) = 1$ esteja contido no intervalo acima conclui-se que isto é possível se, e somente se,

$$\frac{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)}{\text{sen }^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \leq 1,$$

$$\sqrt{\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta)} \leq \text{sen }\left(\frac{\gamma}{2}\right). \tag{16}$$

Quando a desigualdade anterior é satisfeita existem duas posições do ponto D, uma perto de A e outra perto de B, tais que $f(D) = 1$. No caso da igualdade, os dois pontos D degeneram em um.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ escreve-se $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ em (16):

$$\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta) \leq \text{sen }^2\left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\text{sen }(\alpha)\text{ sen }(\beta) \leq \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{17}$$

A desigualdade (17) é uma forma alternativa de escrever (4).

3.4 Trigonometria e soma de áreas. P12 SL da IMO 1975.

Problema 4. *Sejam $A = (1,0)$ e M_i pontos no primeiro quadrante do círculo trigonométrico de centro $O = (0,0)$. Considerar os arcos $AM_1 = \theta_1$, $AM_2 = \theta_2$,*

$AM_3 = \theta_3, \cdots, AM_\nu = \theta_\nu$, *tais que:*

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \cdots < \theta_\nu.$$

Provar que:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(\theta_i - \theta_{i+1}) < \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(\theta_i + \theta_{i+1}). \tag{18}$$

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária. O problema acima foi selecionado para a lista curta (Short List, SL) da competição e proposto pela delegação da Grécia [1].

3.4.1 Resolução do Problema 4.

Inicialmente reescreve-se (18) como:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(2\theta_i) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(\theta_i - \theta_{i+1}) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen }(\theta_i + \theta_{i+1}) < \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} [\text{sen }(2\theta_i) - \text{sen }(\theta_i - \theta_{i+1}) - \text{sen }(\theta_i + \theta_{i+1})] < \frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Convém neste ponto lembrar de duas identidades trigonométricas:

$$\text{sen }(\theta + \beta) = \text{sen }(\theta)\cos(\beta) + \text{sen }(\beta)\cos(\theta), \tag{20}$$

$$\text{sen }(\theta - \beta) = \text{sen }(\theta)\cos(\beta) - \text{sen }(\beta)\cos(\theta). \tag{21}$$

Quando $\theta = \beta$ em (20) tem-se:

$$\text{sen }(2\theta) = 2\,\text{sen }(\theta)\cos(\theta) \tag{22}$$

e somando (20) e (21) encontra-se:

$$\text{sen }(\theta + \beta) + \text{sen }(\theta - \beta) = 2\,\text{sen }(\theta)\cos(\beta). \tag{23}$$

Utilizando (22) e (23) pode-se reescrever o interior do somatório em (19):

$$\text{sen }(2\theta_i) - \text{sen }(\theta_i - \theta_{i+1}) - \text{sen }(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2\,\text{sen }(\theta_i)\cos(\theta_i) - 2\,\text{sen }(\theta_i)\cos(\theta_{i+1}),$$

$$\text{sen }(2\theta_i) - \text{sen }(\theta_i - \theta_{i+1}) - \text{sen }(\theta_i + \theta_{i+1}) = 2\,\text{sen }(\theta_i)\left[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})\right].$$

Segue que (19) transforma-se em:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} \text{sen } (\theta_i) \left[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})\right] < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{sen } (\theta_1) \left[\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right] + \cdots + \text{sen } (\theta_{\nu-1}) \left[\cos(\theta_{\nu-1}) - \cos(\theta_v)\right] < \frac{\pi}{4}. \quad (24)$$

Existe uma interpretação geométrica simples para cada um dos somandos da forma:

$$\text{sen } (\theta_i) \left[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})\right].$$

A Figura 11 mostra o primeiro quadrante de um círculo trigonométrico ($raio = 1$) e três pontos genéricos sobre o arco da circunferência: M_i, M_{i+1} e M_{i+2}. Lembra-se que, por hipótese, tem-se: $\theta_i < \theta_{i+1} < \theta_{i+2}$.

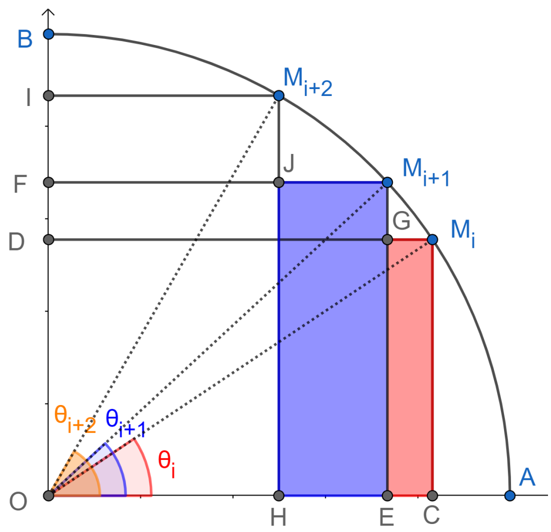

Figura 11: Interpretação geométrica de área para cada um dos somandos da forma $\text{sen } (\theta_i) \left[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})\right]$ na resolução do Problema 4. Versão interativa aqui.

Sejam os pontos C, E e H os pés das perpendiculares ao eixo x passando por M_i, M_{i+1} e M_{i+2}, respectivamente. Sejam os pontos D, F e I os pés das perpendiculares ao eixo y passando por M_i, M_{i+1} e M_{i+2}, respectivamente. Seja o ponto G a interseção dos segmentos DM_i e EM_{i+1} e seja o ponto J a interseção dos segmentos FM_{i+1} e HM_{i+2}.

Nota-se que as coordenadas dos pontos M_i são $(\cos(\theta_i), \text{sen } (\theta_i))$ e os segmentos EC, HE, M_iC e $M_{i+1}E$ tem comprimentos $\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})$, $\cos(\theta_{i+1}) -$

$\cos(\theta_{i+2})$, $\text{sen}\ (\theta_i)$ e $\text{sen}\ (\theta_{i+1})$, respectivamente. Logo, as áreas dos retângulos M_iGEC e $M_{i+1}JHE$ são:

$$\text{sen}\ (\theta_i)\left(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})\right),$$

$$\text{sen}\ (\theta_{i+1})\left(\cos(\theta_{i+1}) - \cos(\theta_{i+2})\right),$$

respectivamente.

Como a área da interseção entre retângulos vizinhos é zero, as somas das suas áreas é sempre inferior a área de $\frac{1}{4}$ de círculo unitário. Ou seja, $\frac{\pi}{4}$. Isto é, vale (24) e consequentemente (18).

3.5 Distância entre pontos na semicircunferência trigonométrica. P15 SL da IMO 1975.

Problema 5. *É possível colocar* 1975 *pontos numa circunferência de raio* 1 *de tal forma que as distâncias entre quaisquer dois pontos (medida pela corda que os conecta) seja um número racional?*

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgária. O problema acima foi selecionado para a lista curta (Short List, SL) da competição e proposto pela delegação da antiga União Soviética [1].

3.5.1 Considerações iniciais sobre o Problema 5.

A Figura 12 mostra os pontos A_i e A_j em uma semicircunferência de raio 1 e centrada em $O = (0, 0)$. O segmento BA_1 representa a horizontal. Sejam os ângulos $\angle A_iOA_1 = \alpha_i$ e $\angle A_jOA_1 = \alpha_j$. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $\alpha_j > \alpha_i$.

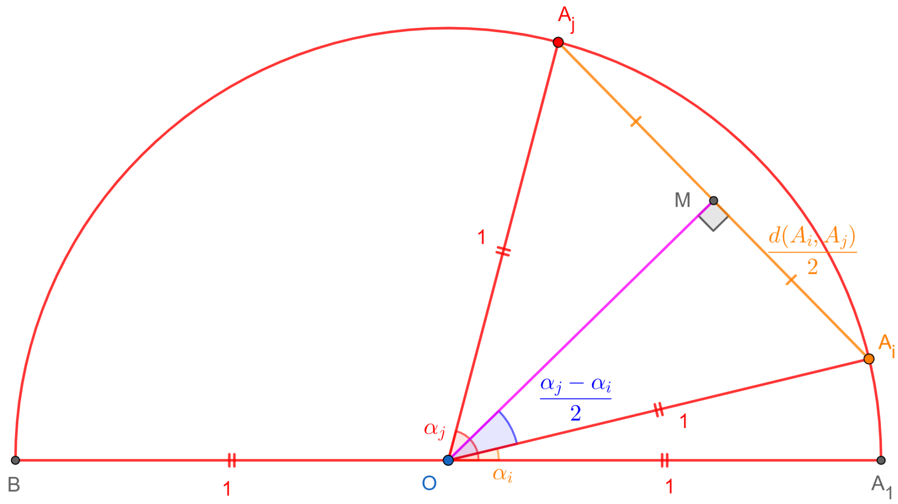

Figura 12: Distância entre dois pontos medida por uma corda na semicircunferência trigonométrica, que tem raio de medida 1, para resolução do Problema 5. Versão interativa aqui.

Proposição 3.1. *A distância entre os pontos A_i e A_j pode ser calculada como:*

$$d\left(A_i, A_j\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right). \tag{25}$$

Demonstração. Como $OA_i = OA_j = 1$ o $\triangle A_iOA_j$ é isósceles de base A_iA_j. Segue que a altura OM também é bissetriz e mediana. Logo,

$$\angle A_iOM = \angle MOA_j = \frac{\alpha_j - \alpha_i}{2},$$

$$A_iM = MA_j = \frac{d\left(A_i, A_j\right)}{2}.$$

Pelo $\triangle OMA_i$, retângulo em M, pode ser escrito que:

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right) = \frac{d\left(A_i, A_j\right)}{2},$$

$$d\left(A_i, A_j\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha_j - \alpha_i}{2}\right).$$

□

3.5.2 Resolução do Problema 5.

Assume-se que o centro da circunferência está no ponto $O = (0, 0)$ e que os pontos $A_1, A_2, ..., A_{1975}$ são colocados na semicircunferência superior. Denotam-se os ângulos por $\angle A_iOA_1 = \alpha_i$ com $1 \leq i \leq 1975$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_i < \alpha_j$ para todo $i < j$.

Utilizando a identidade para o seno da diferença

$$\text{sen}\,(x-y) = \text{ sen }(x)\cos(y) - \text{ sen }(y)\cos(x)\,,$$

pode-se escrever (25) como:

$$d\,(A_i, A_j) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha_j}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_j}{2}\right). \tag{26}$$

A distância será um número racional se $\text{sen}\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ e $\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)$ são racionais para todo $1 \leq i \leq 1975$.

Lembra-se de outras duas identidades trigonométricas que relacionam as funções seno e cosseno com a tangente:

$$\text{sen}\,(2x) = \frac{2\tan(x)}{\tan^2(x)+1},$$

$$\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{\tan^2(x)+1}.$$

Nota-se agora que é possível introduzir uma mudança de variáveis: $t = \tan(x)$. Com isto, dado $t \in \mathbb{Q}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que sejam válidas simultaneamente as equações a seguir:

$$\text{sen}\,(x) = \frac{2t}{t^2+1},$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

Verifica-se que:

$$-1 \leq \frac{2t}{t^2+1} \leq 1,\ \forall t \in [-\infty, \infty],$$

$$-1 \leq \frac{1-t^2}{t^2+1} \leq 1,\ \forall t \in [-\infty, \infty].$$

Logo, existe um número infinito de valores de t racionais, e tão pequenos quanto se queira, para os quais $\text{sen }(x)$ e $\cos(x)$ são números racionais e por (26) a distância entre os pontos A_i e A_j será um número racional.

Alternativamente, inspirados na construção de ternos pitagóricos, pode-se verificar que se t é racional, então o triângulo de lados

$$\left(1, \frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)$$

é retângulo. Tomando t racional e pequeno, encontram-se diversos ângulos para os quais senos e cossenos são racionais.

4 Comentários finais

Foi feita uma rápida introdução de alguns conceitos básicos de trigonometria. A seguir foram discutidos detalhadamente cinco problemas. Os dois primeiros para a Olimpíada Iraniana de Geometria e os três últimos propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática.

Os problemas um e dois requereram da construção do Arco Capaz, do seno de ângulos notáveis na sua forma direta e recíproca e das propriedades de quadriláteros e triângulos isósceles. No segundo desafio foram dadas duas soluções.

O terceiro problema foi inspirado numa das relações métricas do triângulo retângulo. No $\triangle ABC$ foi provada uma condição necessária e suficiente para a existência de um ponto D no lado AB tal que CD é a média geométrica de AD e BD.

No quarto problema foi mostrada uma desigualdade satisfeita por um número finito de pontos sobre uma circunferência unitária. Após o uso de algumas transformações trigonométricas, o desafio foi interpretado como uma soma de áreas.

No quinto problema foi aprendido como calcular a distância entre dois pontos arbitrários de uma semicircunferência unitária e escolher os mesmos de tal forma que as distâncias sejam números racionais.

Espera-se que os problemas sirvam de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados e treinam estudantes para participar em olimpíadas.

Referências

[1] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, and Nikola Petrovic. *The IMO Compendium*. Springer-Verlag GmbH, May 2011. (Página(s) 25, 30, 32)

[2] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto*, 2(2-2021):46–69, jul 2021. (Página(s) 15)

[3] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, and Alessandro Firmiano de Jesus. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)*, 2:117–139, November 2021. (Página(s) 15)

[4] Juan López Linares, João Paulo Martins dos Santos, Alessandro Firmiano de Jesus, and Alexys Bruno-Alfonso. Desigualdade de ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. *Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)*, 2:15–37, 2022. (Página(s) 15)