Modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst no ensino de funções que envolvem exponenciais

Rogério dos Reis Gonçalves rogerio.goncalves@unemat.br
Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, MT, Brazil

Oscar Antonio Gonzalez Chong oscar.chong@unemat.br
Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, MT, Brazil

Miguel Tadayuki Koga miguel.koga@unemat.br
Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, MT, Brazil

Raul Abreu de Assis raul.assis@unemat.br
Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, MT, Brazil

Resumo

A proposta metodológica deste trabalho está centrada nos professores de matemática que atuam, sobretudo, na Educação Básica, e tem como objetivo, organizar uma sequência de atividades voltadas ao estudo de modelos de crescimento populacional, a fim de contribuir no ensino e no aprendizado de funções que envolvem exponenciais e, por consequência, desenvolver a autonomia dos alunos. A situação-problema está embasada na análise de dois modelos populacionais (modelo malthusiano e logístico) aplicados aos dados da população do Município de Sinop-MT entre os anos de 1991 e 2015. À priori, serão apresentados dois modelos, mas outros poderão ser agregados, de acordo com a deliberação do professor e dos alunos. As atividades direcionadas estão apoiadas no uso do GeoGebra, *software* de matemática dinâmica, gratuito e colabora na dinamização do processo de aprendizagem. São muitos os desafios que os professores podem enfrentar ao incorporar novas metodologias e novas tecnologias no ensino, porém, acredita-se que a forma como este trabalho se apresenta, contribui a encorajá-los a aplicá-lo, despertando-os à iniciação às metodologias ativas de aprendizagem, e superar esses desafios.

Palavras-chave

Metodologias de ensino; Funções exponenciais; Modelos populacionais.

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propôe que a noção de variação, aproximação e dependência deve ser inserida desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e, consequentemente, espera-se que os estudantes cheguem no Ensino Médio com boa familiaridade em relação a esses conceitos. Nessa etapa de escolarização, o conceito de função exponencial, tema principal deste trabalho, é apresentado, muitas vezes, de forma mecânica, em que o professor expõe a definição por meio de uma regra e, em seguida, surgem os exercícios de fixação para averiguar se os estudantes sabem reproduzir o que foi exposto pelo professor.

A BNCC também define 10 competências específicas de Matemática que devem ser desenvolvidas nos alunos desde o Ensino Fundamental, dentre elas, há três que estão intimamente relacionadas com a proposta deste trabalho, justificando-o, a saber, (i) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo; (ii) Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados e (iii) Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles [1].

A segunda competência citada acima é indispensável para promover a inclusão digital na escola e, presumilvemente, ultrapassar o âmbito escolar. Por esse motivo, este trabalho recomenda ao leitor a referência [2], que trata do livro "Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento", em que os autores categorizam o uso de tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Matemática em quatro fases, discutem questões atuais na última e valorizam o uso do *software* GeoGebra e a utilização da Internet em sala de aula.

Os livros didáticos habitualmente apresentam problemas contextualizados que mostram a aplicação de funções exponenciais, no entanto, apenas apresentar onde se aplica certos conhecimentos pode não ser suficiente para que o estudante fique instigado a explorá-los. De acordo com a BNCC, uma das competências que o estudante de Ensino Médio precisa desenvolver é "usar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações do cotidiano"[1].

Por outro lado, alguns fatores inibem o professor a explorar metodologias ativas que contribuem para que essa competência seja desenvolvida nos estudantes. Refletindo sobre isso e concordando com [4], ao afirmar que não basta colocar os alunos na escola, devemos oferecer-lhes uma educação instigadora, estimulante, provocativa, dinâmica, ativa desde o começo e em todos os níveis de ensino, que foi elaborada uma proposta para que o professor possa inserir em sua prática docente. Ela é fundamentada na aplicação de uma estratégia didática que favorece sua realização, mediante a inserção de dois modelos populacionais, o modelo malthusiano (é um modelo exponencial, conhecido também por modelo de Malthus) e o modelo logístico (modelo de Verhulst), aplicados na evolução populacional do Município de Sinop-MT, a fim de mostrar a importância do estudo de função do tipo exponencial, além de incluir os estudantes como agentes pesquisadores.

Apresentar uma situação-problema e, a partir dela, explorar os conceitos conformem vão surgindo é uma proposta já consagrada, mas, muitas vezes não são aplicadas, talvez desencorajadas pelo próprio professor ao supor que demandaria mais tempo ou por expô-lo ao desconforto.

2 Aplicação da Proposta

A fase inicial da aplicação da proposta dar-se-á pelo consentimento de um contrato didático entre o professor e os alunos, logo imediatamente o professor apresenta algumas etapas que nortearão a proposta, a fim de difundir o conhecimento dos alunos sobre o estudo de funções exponenciais. Essas etapas podem ser organizadas com a proposta respaldada na sequência didática que, segundo [5], é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos.

A adesão à aplicação da proposta deste trabalho poderá ser inibida em razão de o professor não se sentir confortável e/ou encorajado em assumir um compromisso rigoroso com a metodologia embasada na sequência didática. Por outro lado, ele apresenta uma sequência de etapas interligadas, compreensíveis e fácil cumprimento, que privilegiam o aprendizado dos alunos e corrobora com [3], a qual menciona que o professor deve buscar constantemente alternativas para os desafios que encontra na profissão. Nesta busca haverá erros e acertos, e cabe nestes momentos avaliar os procedimentos que não deram certo para buscar novos caminhos e metodologias.

As etapas descritas a seguir conduzem as ações docentes, mas não necessariamente apontam-nas com precisão. De qualquer modo, os procedimentos metodológicos discorridos neste trabalho estão amparados em 4 etapas.

`Etapa 1`: O professor disponibiliza os dados que farão parte das atividades dos alunos ou, se preferir, solicite a eles a realização da coleta de dados, isso dependerá do tempo que poderá ser despendido nesta tarefa. Neste trabalho foram utilizados os dados da população do município de Sinop-MT entre os anos de 1991 e 2015, conforme mostrados na Tabela 1.

Ressalta-se que esses dados foram disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), por meio de censos e estimativas. Essas estimativas podem não estar em conformidade com a realidade da dinâmica populacional do Município de Sinop, visto que em janeiro de 2022 o IBGE estimou que o número de habitantes é de aproximadamente 200 mil, número que excede as previsões feitas a partir das

Tabela 1: Dados populacionais do Município de Sinop-MT

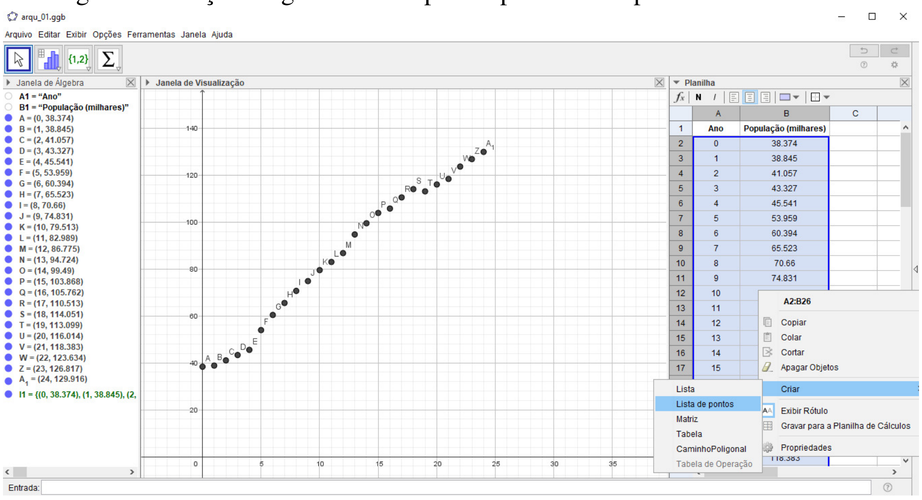
Ano (x)	População (y)	Ano (x)	População (y)	Ano (x)	População (y)
1991	38374	2000	74831	2009	114051
1992	38845	2001	79513	2010	113099
1993	41057	2002	82989	2011	116014
1994	43327	2003	86775	2012	118383
1995	45541	2004	94724	2013	123634
1996	53959	2005	99490	2014	126817
1997	60394	2006	103868	2015	129916
1998	65523	2007	105762		
1999	70660	2008	110513		

Fonte: Dados de censos e contagens populacionais do IBGE

informações disponíveis. Entretanto, isso não descaracteriza a proposta deste trabalho .

`Etapa 2`: Nesta etapa os alunos deverão inserir na planilha do Geogebra os dados obtidos a fim de construir o gráfico de dispersão. Para isso, o professor instruirá-los, se necessário, a realizar os seguintes passos: (i) abra a planilha do GeoGebra; (ii) insira os dados; (iii) selecione as duas colunas referentes ao ano e o número de habitantes, clique com o botão direito do mouse, vá em **Criar/ Lista de pontos**. Após a execução desses passos, o gráfico de dispersão aparecerá na **Janela de Visualização**, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1: Criação do gráfico de dispersão por meio da planilha do GeoGebra

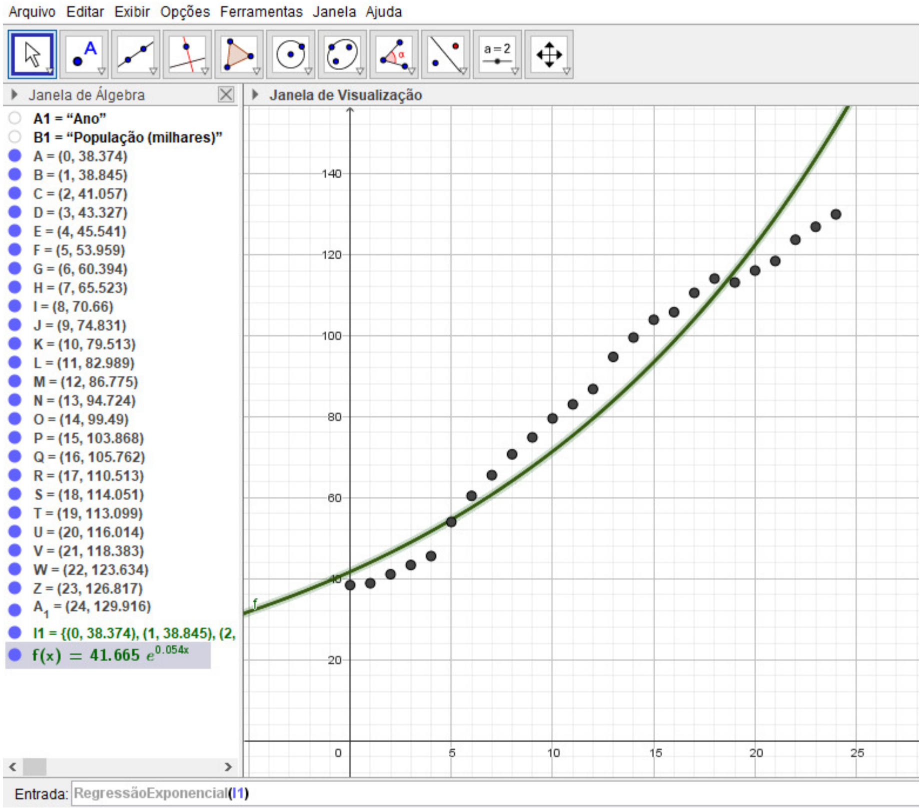


Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

`Etapa 3`: Encontrar o modelo malthusiano.

Com a criação do gráfico de dispersão, o próximo passo consiste em obter um modelo exponencial (modelo malthusiano) que melhor se ajusta a esses pontos. A execução desse passo dá-se pela digitação do comando **RegressãoExponencial(l1)** no campo de **Entrada** do GeoGebra, conforme mostrado na Figura 2, em que **l1** denota a **Lista de pontos** criada automaticamente pelo GeoGebra e encontra-se na **Janela de Álgebra**.

Figura 2: Modelo malthusiano



Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

Considerando três casas decimais, o modelo exponencial obtido é representado pela função

$$f(t) = 41665 \cdot e^{0,054t}$$

.

Nesta fase o professor poderá conversar com a turma sobre o tema ajuste de curvas e sua relevância na modelagem matemática. Esse momento é oportuno para que o professor aguce os alunos a refletir sobre o comportamento deste modelo, como, por exemplo:

Qual é a população inicial estimada?

Espera-se que os alunos percebam que a população inicial (ano de 1991) estimada pelo modelo malthusiano é de 41665 habitantes, e que, para isso, eles deverão considerar o tempo $t = 0$, ou seja, $41665 = f(0)$. No problema real, a população inicial é de 38374, o que acarreta em um erro relativo igual a $\left|\dfrac{38374 - 41665}{38374}\right| \cdot 100 = 8,58\%$.

O professor deverá levar os alunos a questionar sobre o motivo pelo qual, neste modelo, $f(0)$ representa a população inicial em vez de $f(1991)$. Ademais, é provável que durante o estudo de função exponencial o professor tenha empregado o conceito de taxa de crescimento relativa (fundamental para caracterizar essas funções), senão, é um momento oportuno para relembrá-la e introduzir com cuidado o conceito de erro relativo, visto que, além de possuir certa semelhança na fórmula, pode ser utilizado para que um pesquisador decida se determinado modelo matemático representa satisfatoriamente o problema real pesquisado.

Considerando o modelo encontrado, qual é o número de habitantes estimados nos anos de 2016 a 2019?

O banco de dados do IBGE disponibiliza a população nos anos de 2016 a 2019, conforme mostrado na Tabela 2. O professor poderá disponibilizá-los aos alunos e pedir para que eles encontrem a população estimada pelo modelo malthusiano e os respectivos erros relativos. Omitir alguns dados e utilizá-los posteriormente é uma estratégia válida, visto que eles poderão servir com o propósito de auxiliar na validação do modelo que está sob processo de análise, que nesta etapa é o modelo malthusiano.

Tabela 2: Erro relativo apresentado pelo modelo malthusiano confrontado com os dados do IBGE nos anos de 2016 a 2019

Ano	Dados do IBGE	Modelo malthusiano	Erro relativo $(\%)$
2016	132595	160057	20,7
2017	135408	168910	24,7
2018	138144	178252	29,0
2019	140802	188112	33,6

Fonte: Elaborada pelos autores

Os alunos poderão discutir os valores dos erros relativos encontrados. Espera-se que eles concluam que esses erros estão aumentando e podem ser considerados altos, inferindo pelo menos em uma análise superficial que o modelo malthusiano não representa de forma satisfatória o problema analisado.

Qual é a população estimada em 2030 pelo modelo malthusiano?

Os alunos verificarão que a população estimada é de $340094 = f(39)$ habitantes, o que parece ser irreal. Questioná-los a refletirem sobre as características do modelo malthusiano que, geralmente, em situações-problema desta natureza não representa um bom modelo, é de suma importância, pois os inserem na condição de pesquisadores, e isso favorece a aquisição de conhecimento.

O modelo malthusiano $f(t) = 41665 \cdot e^{0,054t}$ é do tipo exponencial, dessa forma, *como obter a taxa de crescimento anual?*

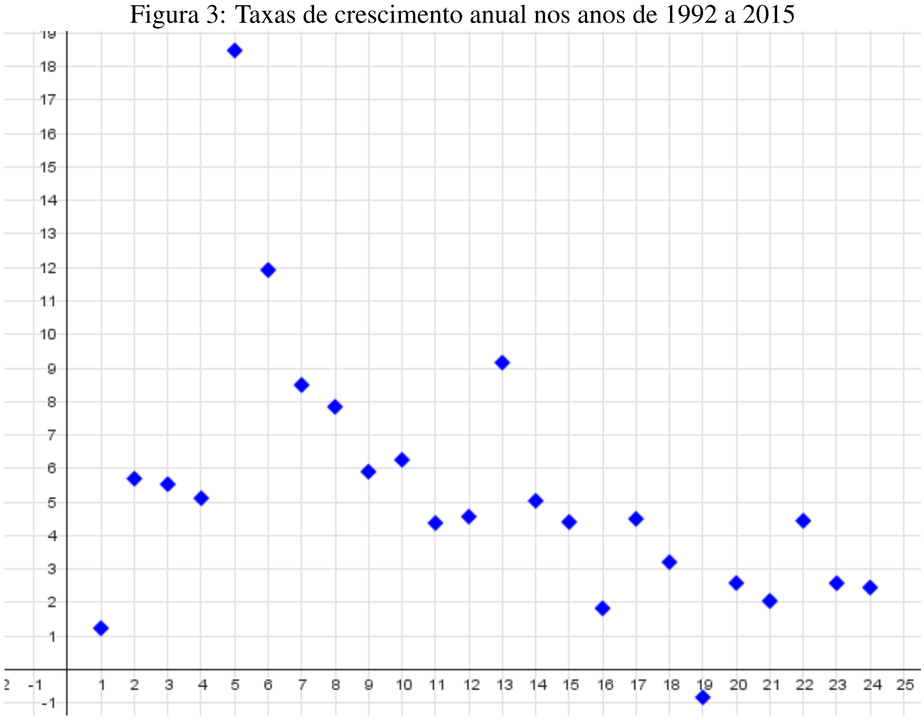
Esse questionamento tem o propósito de discutir ou relembrar o conceito de mudança de base, isto é, qualquer função do tipo exponencial poderá ser reescrita por outra função do tipo exponencial em uma base diferente. Por exemplo, a expressão $e^{0,054} \cong 1,055$, logo, a função do tipo exponencial $f(t) = 41665 \cdot e^{0,054t}$ poderá ser reescrita como $g(t) = 41665 \cdot 1,055^t$, evidenciando que o modelo malthusiano considera a taxa de crescimento anual constante e aproximadamente igual a $5,5\%$.

Nota-se que a função g pode ser comparada à fórmula do montante em juros compostos, a saber, $M = C \cdot (1+i)^t$, em que M representa o montante, C representa o capital inicial, i denota a taxa de juros (neste exemplo, i pode ser associada à taxa anual) e t é o tempo, em anos. Sendo assim, fica mais evidente que no modelo exponencial, a taxa de crescimento anual é aproximadamente igual a $5,5\%$.

Utilize os dados do IBGE apresentados na Tabela 1 para encontrar as taxas de crescimento anual $(\%)$ *nos anos de 1992 a 2015. Represente-nas por meio de um gráfico.*

Visto que os alunos já inseriram esses dados na planilha do GeoGebra, basta utilizá-la para obter a taxa em cada ano. O gráfico obtido está representado na Figura 3.

Figura 3: Taxas de crescimento anual nos anos de 1992 a 2015



Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

Verifica-se que as taxas de crescimento anual variam ano a ano, o que é natural. No entanto, eles apresentam um comportamento de decrescimento, que também é muito comum em problemas de crescimento populacional, muitas vezes acarretado pela capacidade suporte que determinada população possui, correlacionada à redução da taxa de crescimento. Essa discussão deve ser colocada pelo professor, pois apresenta algumas sutilezas inerentes de um pesquisador e contribui para que os alunos desenvolvam o potencial de discernimento na argumentação.

Confronte a tendência das taxas anuais de crescimento obtidas pelos dados do IBGE com a encontrada no modelo malthusiano e conclua que este modelo apresenta estimativas bem acima da realidade do crescimento populacional no Município de Sinop-MT.

Os alunos têm a informação de que no modelo malthusiano a taxa de crescimento anual é fixa e aproximadamente igual a $5,5\%$, enquanto que os dados reais apontam uma tendência de decrescimento nas taxas anuais ou pelo menos taxas anuais inferioriores a $5,5\%$. Se considerarmos que esses resultados são significativos, o modelo malthusiano não atende essas características e, dessa forma, seria necessário um modelo que leve em consideração a diminuição nas taxas a fim de apresentar um melhor comportamento do problema.

Após direcionar os alunos a esses questionamentos, o professor poderá orientá-los a pesquisar sobre a existência desse "novo" modelo e começar a explorá-lo. É nesta fase que o professor inicia a mediação no estudo do modelo logístico.

`Etapa 4`: Encontrar o modelo logístico.

A fim de obter o modelo logístico, os alunos poderão utilizar a **Lista de pontos l1** já criada na Etapa 02 e, na **Janela de Álgebra**, digitar **RegressãoLogística(l1)**, em seguida, aperte a tecla Enter. O modelo logístico aparecerá na **Janela de Visualização**, conforme mostrado na Figura 4.

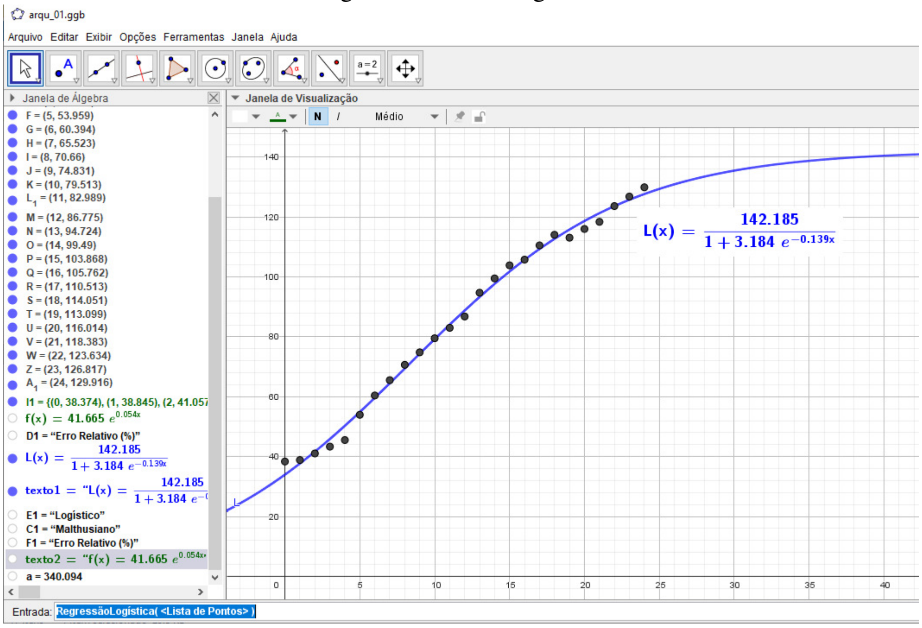
Nota-se no gráfico da Figura 4 que a partir de um determinado momento, à medida que o tempo cresce, a taxa de variação diminui ligeiramente. Esse comportamento do modelo logístico corresponde às pretensões almejadas nesta etapa da atividade/aluno-pesquisador. Por conseguinte, o professor poderá provocá-los com alguns questionamentos.

Qual é a população máxima estimada pelo modelo logístico?

Nesta etapa o professor instigará os alunos a examinarem/conjecturarem a população máxima mediante a função logística

$$L(x) = \frac{142185}{1 + 3184 \cdot e^{0,054t}}$$

Figura 4: Modelo logístico



Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

.

É natural presumir que eles auferirão 142185 habitantes, dado que esse número encontrado na função logística possui correlação com o comportamento do gráfico do modelo, acerca de uma reta horizontal imaginária, denominada assíntota horizontal.

Outra possibilidade que deve ser colocada pelo professor é propor que aumentem os valores de t na função L e observem os resultados. Isso pode ser feito com o uso de uma calculadora ou, preferencialmente, no campo **Entrada** do GeoGebra. Eles observarão que, realmente, os valores que L assume se aproximam de 142185, mas não o ultrapassa.

$$L(30) = 135488; \quad L(40) = 140453; \quad L(50) = 141759; \quad L(60) = 142076;$$

$$L(70) = 142158; \quad L(80) = 142178; \quad L(90) = 142183; \quad L(100) = 142185;$$

$$L(200) = 142185; \quad L(300) = 142185; \quad \cdots$$

Considerando o modelo logístico, qual é o número estimado de habitantes nos anos de 2016 a 2019?

Visto que os dados do IBGE já foram utilizados na etapa anterior, o uso da planilha do GeoGebra auxiliará nesta tarefa. Os resultados encontrados estão apresentados na Tabela 3

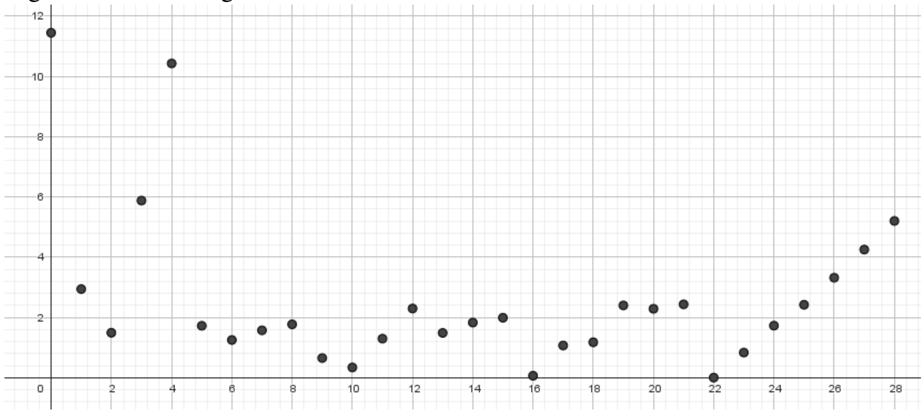
Tabela 3: Erro relativo apresentado pelo modelo logístico confrontado com os dados do IBGE nos anos de 2016 a 2019

Ano	Dados do IBGE	Modelo logístico	Erro relativo (%)
2016	132595	129380	2,4
2017	135408	130909	3,3
2018	138144	132269	4,3
2019	140802	133475	5,2

Fonte: Elaborada pelos autores

Nota-se que nos anos de 2016 a 2019, os erros relativos encontrados no modelo logístico (Tabela 3) são bem menores quando comparados com o modelo malthusiano (Tabela 2), porém, verifica-se que eles aumentam gradativamente. Este aumento está ocorrendo devido ao gráfico se apresentar abaixo dos valores externados pelo IBGE, situação oposta a verificada no modelo malthusiano. Essa análise poderá ser discutida em sala de aula e, além disso, o professor poderá solicitar que os alunos considerem não apenas as informações extraídas da Tabela 3, estendendo-as em todo o período de 1991 a 2019 por meio da construção de um gráfico dos erros relativos (Figura 5), isso também contribui a habituarem com as ferramentas do GeoGebra.

Figura 5: Modelo logístico X dados do IBGE: Erro relativo entre os anos 1991 e 2019



Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

Realizando uma análise minuciosa nos últimos 7 pontos (eles representam os anos de 2013 a 2019), os alunos poderiam deduzir que os erros relativos possuem uma tendência de crescimento linear. Se admitirem essa tendência, que se aparenta plausível na fase de escolarização dos sujeitos da pesquisa, eles concluirão que o modelo logístico, assim como o malthusiano, não possuem as características de representar o problema analisado, pelo menos no que concerne a projeções que extrapolam os dados utilizados. Por outro lado, considerando os anos de 1991 a 2015, exceto nos anos de 1991, 1994 e 1995, o modelo logístico possui qualidades suficientes para representar a situação proposta de forma satisfatória.

Após a explanação dos possíveis debates que poderão ocorrer em sala de aula, o professor poderá estimular os alunos a mostrarem em um mesmo sistema de eixos ortogonais (plano cartesiano) os gráficos dos dois modelos já obtidos e incluir os referentes aos anos de 2016 a 2019, sem incorporá-los nos modelos, apenas com o propósito de visualizar o comportamento dos dois modelos e discernirem que é necessário examinar novos modelos a fim de encontrar um que represente satisfatoriamente a população do Município de Sinop-MT, mesmo quando a estimativa é feita considerando a extrapolação dos dados.

Construir os gráficos dos modelos malthusiano e logístico em um mesmo plano cartesiano, considerando os anos de 1991 a 2019.

Nesta fase, a execução desta atividade não é custosa por parte dos alunos, mas é essencial para que tenham a percepção de que as observações sobre os modelos (ver Figura 6), feitas anteriormente, são pertinentes ao mostrado na Figura 3. Isto posto, o estudo de novos modelos seria necessário, mas as circunstâncias relacionadas ao tempo e outros fatores poderão ser levadas em consideração, impossibilitando-o. Portanto, uma nova proposta de continuidade da pesquisa poderá advir.

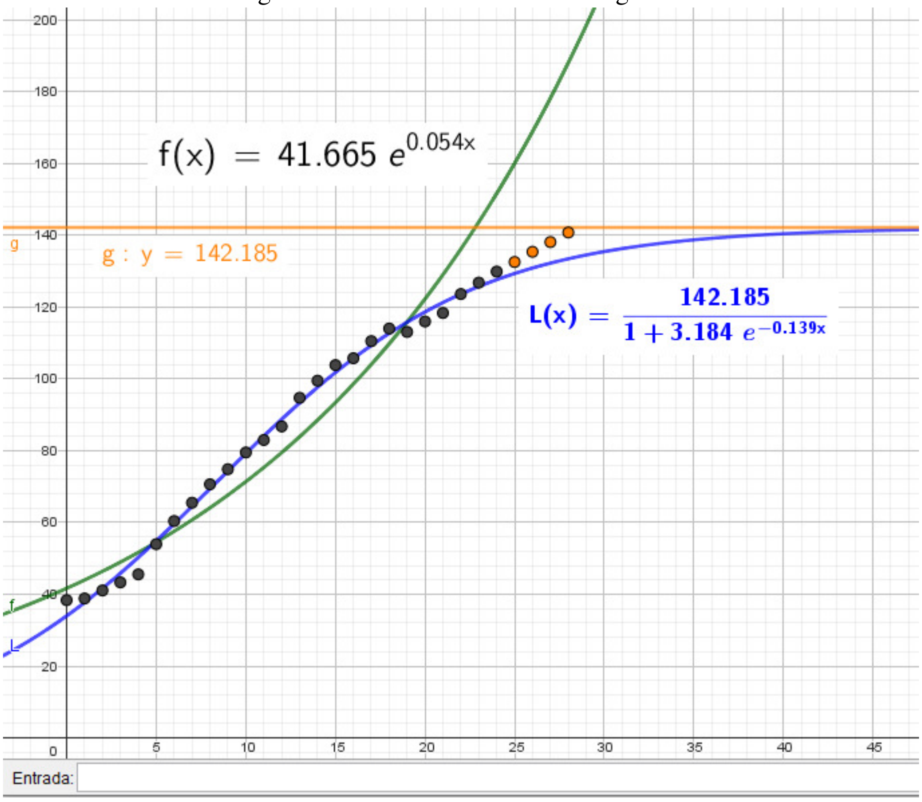
3 Conclusão

Em qualquer ambiente educacional, o ensino é pautado no modo como o conhecimento é produzido e é guiado pelo uso de algumas ferramentas, como as tradicionais ou inovadoras. Esse ambiente pode ser estabelecido pela instituição de ensino e, neste caso, presumivelmente, são oferecidos treinamentos ao corpo docente para que se atualize acerca das metodologias deliberadas. Do contrário, o professor determina as próprias normas de conduta ao escolher a metodologia de ensino para ministrar suas aulas. Neste caso, essa autonomia pode não ser assistida pela instituição e, por consequência, há uma maior possibilidade do professor não estar preparado a incluir metodologias de ensino voltadas à aprendizagem ativa.

Refletindo sobre o exposto, o presente trabalho fornece uma proposta de ensino não tradicional, aplicada à complementação do estudo de funções que envolvem exponenciais, com o suporte de um software educacional, e que oriente, essencialmente, aos professores que queiram inovar na educação, mas que se sentem inibidos a implementar práticas pedagógicas que podem levá-los ao desconforto de extrapolar seus hábitos arraigados.

Posto isto, o leitor pode questionar a relevância desta proposta quanto à sua originalidade, visto que há inúmeros trabalhos que desenvolvem propostas metodológicas

Figura 6: Modelos malthusiano e logístico



Fonte: Construída pelos autores no software GeoGebra

de ensino de matemática ou relatos de experiência pautados em estratégias de ensino, tal como, sequência didática, modelagem matemática e resolução de problemas. No entanto, a presente proposta não se compromete com a aplicação rigorosa de uma determinada metodologia, mas tendo em conta a experiência dos autores em trabalhar com formação de professores de matemática, ela é indispensável para que o professor não resista às mudanças e os desafios e adote novas pedagogias.

Referências

[1] BRASIL. Ministério da educação, base nacional comum curricular. 2018.

[2] Marcelo de Carvalho Borba, Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, and George Gadanidis. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento*. Autêntica, 2016.

[3] Dominique Guimarães de Souza and Jean Carlos Miranda e Glaucia Ribeiro Gonzaga e Fabiano dos Santos Souza. Desafios da prática docente. 2017.

[4] José Manuel Moran. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*. Papirus Editora, 2007.

[5] Antoni Zabala. *A Prática Educativa: como ensinar*. Porto Alegre, Papirus, Artmet, 1998.