Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Sequência de Fibonacci

Mariana de Oliveira Lopes mariana.ol@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Prof. Dr. Edney Augusto Jesus de Oliveira edney@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Resumo

O presente trabalho busca estudar a Sequência de Fibonacci, e para tal apresentamos uma introdução acerca de recorrências, abordando essencialmente as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, uma vez que a Sequência de Fibonacci é definida por uma recorrência de segunda ordem. Logo após, focamos na Sequência de Fibonacci, na qual estudamos propriedades muito instigantes, em especial, a relação desta sequência com o Número de Ouro. Vimos que a razão proveniente deste número, a razão áurea, está presente em diversos elementos na natureza, como por exemplo, na disposição de pétalas e sementes de algumas flores. Trabalhamos também propriedades do retângulo de ouro, donde obtemos a espiral áurea, além de observar uma conexão entre o triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci. Por fim, observamos o número de ouro como uma fração contínua e apresentamos o conceito de números metálicos.

Palavras-chave

Fibonacci. Número de Ouro. Recorrências.

1 Introdução

Em algum momento no Ensino Médio são estudadas as Progressões Aritméticas e Geométricas, as quais são exemplos de sequências numéricas definidas por recorrências. E neste nível, tais tópicos são trabalhados de forma bem sucinta, em muitos casos, se atentando somente às fórmulas e resoluções de alguns exercícios. Sendo um assunto muito amplo, com diversas aplicações, se faz necessário aprofundar o estudo das recorrências neste trabalho e aqui o faremos dando ênfase em um exemplo famoso da história matemática: a Sequência de Fibonacci, pois estudaremos propriedades matemáticas bem curiosas, como também a fascinante relação entre essa sequência e o Número de Ouro.

A Sequência de Fibonacci, nossa principal protagonista, que será apresentada através do Problema dos Coelhos, um problema proposto por Leonardo Fibonacci, principal detentor pelo estudo desta sequência, é uma sequência de números inteiros com os dois termos iniciais iguais a 1, definida recursivamente por

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{1}$$

em que os $F_n s$ correspondem aos termos da Sequência de Fibonacci.

Neste trabalho, as principais referências utilizadas se tratam de dissertações de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), trabalhos finais de graduação e artigos de algumas revistas universitárias, tais como [9, Cap. 2], [11, Cap. 2], [5, Cap. 2], [7, Cap. 2], [10, Cap. 2], [3, Cap. 2], [6, Cap. 1, Cap. 3], [2, Cap. 1, Cap. 3], [1, Cap. 3] e [4].

Em um primeiro momento, trabalharemos com as sequências definidas por recorrências lineares de primeira e segunda ordem, as quais apresentaremos o formato da solução geral. Desse modo, conseguiremos resolver a recorrência de Fibonacci, que se trata de uma recorrência linear de segunda ordem, obtendo assim a fórmula fechada para F_n, também conhecida por fórmula de Binet.

Por fim, veremos também que o número de ouro (ou razão áurea) está diretamente relacionado à Sequência de Fibonacci, pois a sequência (a_n) definida por

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}, \quad n \geq 1,$$

converge para a razão áurea. Observamos que esta razão está presente em diversos elementos na natureza, sendo representada através da espiral áurea. Esta espiral é obtida através do Retângulo de Ouro, sendo as proporções deste retângulo consistentes com a razão áurea. Outras propriedades serão apresentadas, assim como a relação do Triângulo de Pascal com a Sequência de Fibonacci. Não menos importante, faremos uma pequena passagem pelas Frações Contínuas e a representação do Número de Ouro através dela.

2 Recorrências

Uma sequência (real) numérica é qualquer função cujo domínio é um subconjunto D de $\mathbb{N}$, $a : D \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a qual denotamos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, (ou simplesmente (a_n)).

A *Lei de formação* de uma sequência é uma expressão matemática utilizada para calcular qualquer termo em função exclusivamente de n. Porém, em sua maioria, as sequências não possuem lei de formação útil, como por exemplo, a sequência dos decimais do número π. Já a *Regra de Recorrência* (ou simplesmente *Recorrência*) é utilizada para calcular termos através de seus imediatamente antecessores. Sendo assim, podemos dizer que uma relação de recorrência é uma regra que permite determinar um termo qualquer de uma sequência em função de seus termos imediatamente anteriores e possivelmente de n, ou seja,

$$a_n = f(a_{n-1},\, a_{n-2},\, \ldots,\, n).$$

Como exemplo de sequências bem conhecidas, temos as *Progressões Aritméticas* (PA) e *Progressões Geométricas* (PG). Uma PA é uma sequência em que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é igual a uma constante r fixada denominada razão, ou seja, em termos matemáticos, temos $r = a_n - a_{n-1}$. Deste modo, podemos dizer que ela é definida recursivamente por $a_n = a_{n-1} + r$, com $r > 1$. Além disso, é bem conhecido que o termo geral (ou lei de formação) de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. Já uma PG é uma sequência numérica na qual o quociente de um termo qualquer por seu antecessor é sempre igual a uma constante q fixada denominada razão, ou seja, para todo n, temos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, sendo definida recursivamente por $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Note que é conhecida a lei de formação de uma PG: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Pode-se perceber que uma mesma relação de recorrência pode ser usada para duas ou mais sequências diferentes. Por exemplo, a sequência dos números pares positivos $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ e a sequências dos números ímpares positivos $(1, 3, 5, 7, \ldots)$, em que ambas podem ser expressadas por $a_{n+1} = a_n + 2$, pois basta tomarmos o termo anterior e somarmos 2 para obtermos o próximo. Portanto, para evitar esta ambiguidade, deve-se informar o primeiro termo ou os primeiros termos. Diante disso, na sequência dos números pares positivos temos $a_1 = 2$ e na sequência dos números ímpares temos $a_1 = 1$.

Podemos classificar as recorrências de várias maneiras, das quais, apresentaremos aqui algumas delas. A primeira delas está relacionada com a quantidade de elementos precedentes aos quais são necessários para se obter o próximo, ou seja, quanto à sua *ordem*. Deste modo, dizemos que a recorrência é de ordem k se a relação f que a define depender somente dos k termos imediatamente antecessores. Logo, podemos dizer que uma recorrência é de *primeira ordem* quando cada termo depende apenas do termo exatamente anterior a ele, ou seja, $a_{n+1} = f(a_n, n)$. Do mesmo modo, uma recorrência é de *segunda ordem* se cada termo depender de dois termos exatamente anteriores a ele, ou seja, se a_{n+1} estiver somente em função de a_n e a_{n-1}, isto é, $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n)$. Deste modo, podemos observar que as PA e PG são recorrências de primeira ordem, enquanto que a Sequência de Fibonacci é uma recorrência de segunda ordem.

As duas próximas classificações a serem apresentadas são inspiradas no conceito de linearidade proveniente da Álgebra Linear. Uma relação de recorrência é dita *linear* quando a função que relaciona um termo aos seus anteriores é de primeiro grau nas variáveis $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$, caso contrário, a recorrência é dita *não-linear*. Por fim, uma relação de recorrência é dita *homogênea* se não houver nenhum termo independente dos termos da sequência, do contrário, a equação diz-se *não-homogênea*. A seguir, veremos como resolver algumas classes de recorrência, o que por sua vez quer dizer que vamos encontrar uma fórmula fechada ou termo geral, que nos permitirá calcular qualquer termo da recorrência sem precisar conhecer seus termos imediatamente anteriores. As classes de recorrências que abordaremos aqui são as recorrências lineares de primeira ordem com coeficientes constantes homogêneas e não-homogêneas e as recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes homogêneas.

Considerando a recorrência homogênea linear de primeira ordem com coeficiente constante β, $a_n = \beta a_{n-1}$, com $\beta \neq 0$, obtemos através de um processo indutivo que o formato da solução geral é dado por $a_n = a_1 \cdot \beta^{n-1}$. Observe aqui a semelhança entre a expressão para a_n que acabamos de encontrar com a fórmula fechada para PG - tal semelhança não é uma mera coincidência, pois PGs são recorrências lineares de primeira ordem homogêneas.

Agora, analisando o caso não-homogêneo de recorrências lineares de primeira ordem, ou seja, recorrências do tipo $a_{n+1} = a_n + g(n)$, determinamos que o formato da solução geral, também obtido por um processo indutivo, é dado por $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)$. É importante observar que para determinarmos o termo geral da sequência solução a_n, precisamos ser capazes de determinarmos efetivamente uma fórmula fechada para este somatório. Note que no caso de uma PA, a parte não homogênea $g(k)$ é constante e igual a sua razão r, e deste modo obtemos que $\sum_{k=1}^{n-1} g(k) = \sum_{k=1}^{n-1} r = (n-1)r$ e consequentemente $a_n = a_1 + (n-1)r$, o que novamente, não é uma coincidência, e sim fruto do fato de PAs serem recorrências lineares não homogêneas com coeficientes constantes de primeira ordem. Em alguns casos, como soma de termos de progressões aritméticas ou geométricas, somos capazes de obter uma fórmula para o somatório, mas na maioria dos casos trata-se de um problema bastante complicado de se resolver.

No caso de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0, \quad q \neq 0 \tag{2}$$

Supondo que exista um número r (real ou não) tal que $a_n = r^n$ seja solução de (2) obtemos a equação $r^2 + pr + q = 0$, chamada de *equação característica*. Considerando a recorrência de Fibonnaci dada em (1), obtemos que a sua equação característica é

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Como as raízes acima são reais e distintas, enunciamos o teorema a seguir que nos fornece a solução geral para a recorrência (2) para o caso das raízes da sua equação característica forem reais e distintas. Os demais casos podem ser consultados em [8, Seção 4.5].

Teorema 1. *[4, Corolário 2.1]. Dada uma recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ cujas raízes r_1 e r_2 de sua equação característica são reais e distintas, temos que a sua solução geral é*

$$a_n = C_1 {r_1}^n + C_2 {r_2}^n,$$

em que C_1 e C_2 são constantes reais.

Deste modo, temos que a a solução geral para a recorrência de Fibonacci, após a dedução de C_1 e C_2, é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{4}$$

A expressão para o termo geral da recorrência de Fibonacci dada em (4) é chamada *Fórmula de Binet*.

3 Fibonacci e curiosidades sobre a Sequências de Fibonnaci

Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, foi um importante matemático italiano do século XII. Era filho de Guglielmo Bonacci, um rico mercador encarregado dos negócios das cidades de Veneza, Gênova e Pisa. Fibonacci recebeu a maior parte de sua educação no norte da África, onde seu pai desempenhava uma função alfandegária. Além disso, viajou para diversos países como Egito, Sicília, Grécia e Síria. Durante suas viagens, Fibonacci conheceu os métodos matemáticos orientais e árabes, os quais despertou ainda mais seu interesse pela aritmética. Em torno de 1200, Fibonacci regressou à Itália e em 1202 publicou o livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo). Foi neste livro que Fibonacci apresentou o Problema dos Coelhos e abrangeu o estudo sobre a "Sequência de Fibonacci", nomeada assim em homenagem ao próprio. [5] O problema proposto por ele foi o seguinte:

"Considerando um casal de coelhos (macho e fêmea), nascidos no início do ano, quantos coelhos podem ser gerados a partir deste primeiro par se todos os meses cada casal dá a luz a um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês, contanto que não haja mortes durante o ano?"

Para resolvê-lo, precisa-se observar o que acontece a cada mês. Sendo assim, no primeiro mês, temos um casal de coelhos. No segundo mês, ainda temos um casal, pois a fertilidade ainda não ocorreu. No terceiro mês, temos dois casais, pois o primeiro casal gerou outro casal. No quarto mês, temos mais um novo casal gerado pelo primeiro casal, totalizando três casais. Observando que não teremos casais do segundo par pois este ainda não está em idade fértil. No quinto mês, temos os três casais mais dois casais nascidos, um do casal original e outro da primeira cria, totalizando 5 casais.

Pode-se observar que a quantidade F_{n+2} de casais de coelhos em no mês $n + 2$ é igual a quantidade F_{n+1} de casais de coelhos que haviam no mês anterior, o mês $n+1$, mais a quantidade de casais recém nascidos, o qual é igual a quantidade F_n de casais férteis dois meses antes no mês n, ou seja, é obtida a seguinte relação: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Logo, ao longo de um ano, que correspondem a 12 meses, teremos 144 casais de coelhos, presumindo que não haja nenhuma morte. Vale lembrar que anteriormente já definimos a relação de recorrência proveniente da sequência de Fibonacci.

Por volta de 480 a.C. o escultor grego Phideas percebeu que inúmeras coisas na natureza seguiam uma mesma proporção, chamada de *Proporção* ou *Razão Áurea* ou *número de Deus* ou *número de Ouro*. Foi em homenagem a Phideas que a Proporção Áurea hoje é representada pela letra grega ϕ (lê-se fi), sendo seu valor $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803399$.

A Sequência de Fibonacci está diretamente ligada a este número uma vez que ele é a raiz positiva da recorrência de Fibonacci obtida em (3). Outra forma que o número de ouro aparece proveniente da Sequência de Fibonacci é quando tomamos o limite da divisão do n-ésimo termo pelo termo exatamente anterior, o que em outras palavras significa dizer que a sequência $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, $n \geq 1$ converge para ϕ. Inicialmente note que

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Deste modo temos que a_n definida acima é uma recorrência de primeira ordem não linear cujo primeiro termo é $a_1 = 1$. É fácil a verificação de que

$$\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$$

para todo n. Além disso, indutivamente temos que

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{|a_{n-1} - a_n|}{a_n \cdot a_{n-1}} \leqslant \left(\frac{4}{9}\right) |a_n - a_{n-1}| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Assim, utilizando a desigualade triângular obtemos

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2+k} = \frac{9}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{p-1}\right).$$

Por fim, dado $\epsilon > 0$, tome N de modo que $\epsilon = \dfrac{9}{5}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{N-1}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{p-1}\right)$. Daí, note que se $n > N$, temos

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Logo, (a_n) é uma sequência de Cauchy e portanto convergente. Se $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ temos

$L > 0$ e

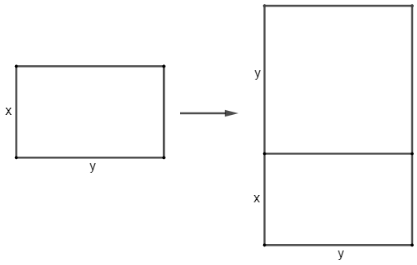
$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

cuja única solução positiva é ϕ.

O número áureo também está presente no *Retângulo de Ouro*, cuja razão entre o seu lado maior e o seu lado menor é igual a ϕ. Uma interessante propriedade de um retângulo de ouro é que se anexarmos um quadrado ao lado maior, conforme ilustrado na Figura 1, obtemos um novo retângulo de ouro. De fato, a razão entre o lado maior e o menor neste novo retângulo é

$$\frac{x+y}{y} = 1 + \frac{x}{y} = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi.$$

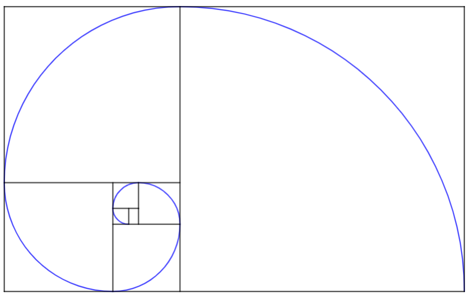
Figura 1: Retângulos de Ouro



Fonte: A autora

O processo acima pode ser repetido indefinidamente e a cada passo um novo retângulo de ouro é adicionado. Agora se para cada um dos quadrados que aparecerem neste processo incluirmos um arco de circunferência, conforme ilustrado na Figura 2, obtemos uma curva denominada *espiral áurea*.

Figura 2: Espiral Áurea



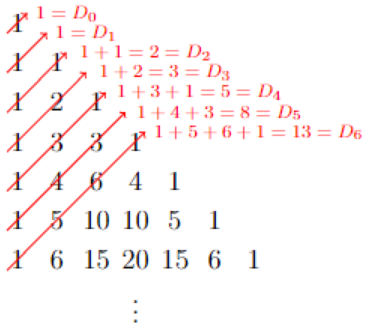
Fonte: A autora

Essa espiral está presente em vários elementos na natureza, como por exemplo: a organização dos ossos (tanto de humanos como de outros animais), na formação de veias e nervos nos corpos de mamíferos, na disposição das pétalas e sementes de flores, nos galhos das árvores, na geometria dos cristais, na galáxia, nas proporções de compostos químicos e até nas moléculas de DNA. Além disso, a razão áurea também foi utilizada por vários artistas e arquitetos na antiguidade. Podemos citar ainda a obra *A Última Ceia* do pintor Salvador Dalí, que tem as dimensões proporcionais ao número de Ouro.

A Sequência de Fibonacci também está presente na quantidade de pétalas de algumas flores. Por exemplo, o lírio branco possui 1 pétala, a Coroa-de-Cristo possui 2 pétalas, o trílio possui 3 pétalas, a flor roxa possui 5 pétalas, algumas margaridas têm 8 pétalas e o girassol com 13 pétalas, ou seja, a quantidade de pétalas representam números de Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci possui várias propriedades bastante interessantes, e dentre elas, destacaremos aqui uma propriedade que relaciona o *Triângulo de Pascal* aos elementos da sequência. observe que a soma dos números nas diagonais secundárias é sempre um número de Fibonacci, conforme indicado na Figura 3. Sendo assim, podemos dizer que a soma D_n de uma diagonal secundária no triângulo de Pascal é igual à soma de suas duas diagonais secundárias imediatamente anteriores, ou seja, segue o mesmo padrão da Sequência de Fibonacci, isto é, $D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$.

Figura 3: O Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci



Fonte: A autora.

Outra forma de visualizarmos o número de outro é através do conceito de *Frações Contínuas*. Vimos que o número de ouro é raiz positiva da equação quadrática $x^2 - x - 1$, a qual pode ser reescrita por

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Daí, substituindo o valor do próprio x na equação, especificamente no denominador do lado direito, obtemos

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}.$$

Podemos repetir este processo indefinidamente, chegando na seguinte representação:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Apresentaremos agora uma classe especial de números obtidos através de equações quadráticas similares à que origina o número de Ouro.

A família dos *Números Metálicos* é formada pelas raízes positivas de equações quadráticas da forma $x^2 - px - q = 0$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Logo, a equação $x = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ dá origem a um único número metálico, o qual denotamos por $\sigma_{p,q}$, ou seja, o número de Ouro é o número metálico $\sigma_{1,1}$. Alguns números metálicos possuem nomes especiais, relacionados à metais. Além do famoso número de Ouro, há o número de Prata, de Bronze, de Cobre, de Níquel e de Platina, conforme exposto na Tabela 1.

Tabela 1: Números Metálicos

p	q	**Símbolo**	**Nome**	**Valor**
1	1	ϕ	Número de Ouro	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
2	1	$\sigma_{2,1}$	Número de Prata	$1+\sqrt{2}$
3	1	$\sigma_{3,1}$	Número de Bronze	$\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
1	2	$\sigma_{1,2}$	Número de Cobre	2
1	3	$\sigma_{1,3}$	Número de Níquel	$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$
2	2	$\sigma_{2,2}$	Número de Platina	$3+\sqrt{13}$

Fonte: [3, Cap. 2 - Seção 2.2]

4 Conclusão

Um dos objetivos deste trabalho é chamar a atenção para a necessidade de um estudo mais efetivo dos conceitos e propriedades matemáticas acerca de sequências de numéricas e das recorrências, o que é feito explorando os diversos aspectos e curiosidades da Sequência de Fibonacci, em especial, sua relação com o número de Ouro.

A Sequência de Fibonacci é exemplo que trás consigo curiosidades interessantes relacionadas à natureza, arte e arquitetura colocando-a como um atrativo aos estudantes, e a partir dela, podem ser abordados tópicos matemáticos em seu estudo, como por exemplo, sequências numéricas, recorrências e combinatória, dentre outros.

Referências

[1] Aldivam do Carmo Albuquerque. Resolução de problemas de contagem usando recorrências linerares. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís/MA, 2019.

[2] Leonardo Moura Amorim. Relações de recorrência. Dissertação de mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.

[3] José Júnior Veloso Araújo. As frações contínuas e os números metálicos. Trabalho de conclusão de curso de pós-graduação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB, 2015.

[4] Fabiano José Castro. Matemática discreta. Dissertação de mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB, 2016.

[5] Bruno Martinez Farias. Sequência de fibonacci e o número Áureo. Monografia de graduação, Universidade Estadual de Campinas, 2018.

[6] Bruno Chioderoli Gregio. Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2017.

[7] Dennis de Oliveira Ayres Junior and Fábio Alexandre Matos. Pascal, fibonacci e geometria. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São João Del Rei, 2016.

[8] Augusto César Morgado and Paulo Cezar Pinto Carvalho. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro/RJ, 2013.

[9] Livia do Cás Pereira and Marcio Violante Ferreira. Sequência de fibonacci. Monografia de graduação, UNIFRA, 2008.

[10] Fábio Honorato Santos. Funções de fibonacci. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL, 2018.

[11] Reginaldo Leôncio Silva. A sequência de fibonacci e o número de ouro. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2015.