Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas

Cesar Santos Bezerra cesar.santos@uft.edu.br
Universidade Federal do Tocantins, Arraias, To, Brasil

Eudes Antonio Costa eudes@uft.edu.br
Universidade Federal do Tocantins, Arraias, To, Brasil

Douglas Catulio dos Santos douglascatulio@ifba.edu.br
Instituto Federal da Bahia, Câmpus de Barreiras, Ba, Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos um estudo acerca dos números formados pela repetição da unidade em uma base $b > 1$ qualquer, chamado de *repunidade generalizada*. Destacamos alguns resultados relacionados à divisibilidade envolvendo as *repunidades generalizadas* e apresentamos dois resultados importantes: o primeiro (e mais importante) é um procedimento para determinar o mdc entre duas *repunidades generalizadas*, o qual é uma generalização para qualquer base b do resultado apresentado por Tarasov[16] na base decimal; e o segundo mostra que o produto de duas *repunidades generalizadas* jamais é um quadrado perfeito.

Palavras-chave

Divisibilidade, MDC, Repunidade generalizada.

1 Introdução

Os números *repunidades* (repetição da unidade) formam um subconjunto dos inteiros positivos ou naturais, denotado por $\mathcal{R}_\mathbf{n}$, que apresentam um padrão e algumas propriedades bem definidas as quais despertam o interesse de matemáticos no decorrer do tempo. O termo *repunidade*, em inglês *repunit*, foi usado primeiramente por Beiler[2] em seu trabalho *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains* em 1964, referindo-se aos números naturais R_n que são escritos de forma única, no sistema decimal (base 10), com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1, n vezes. Assim, para todo $n \geq 1$, $\mathcal{R}_\mathbf{n} = \{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots,\ R_n, \ldots\}$ representa o conjunto dos números *repunidades*. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1\ .$$

Diversos trabalhos acerca dos números *repunidades* no sistema decimal podem ser consultados, por exemplo [1, 2, 3, 5, 6, 15, 18].

Neste artigo apresentaremos algumas características dos números *repunidades* em outra base numérica $b \geq 2$, além da decimal. Snyder [15] propôs uma generalização para os números *repunidades* e exibiu condições de primalidade em qualquer base numérica $b \geq 2$, em que

$$(R_n)_b \ = \ (\underbrace{111 \cdots 11}_{n\ algarismos})_b \ = \ b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + b + 1 \ , \tag{1}$$

é um número *repunidade generalizado* ou *repunidade* em uma base b.

Na sequência do trabalho, procuramos explorar propriedades aritméticas dos números *repunidades generalizadas* em outra base numérica b, além da decimal. Aqui faremos uso constante de operações em bases não decimais. Para um leitor menos familiarizado recomendamos [8, 9, 10, 12]. Na Seção 2 formalizamos o conceito dos números *repunidades generalizados* e listamos alguns resultados clássicos. Já na Seção 3 apresentamos algumas propriedades aritméticas envolvendo as *repunidades generalizadas* e divisores próprios, enfatizamos que a Proposição 8 é uma generalização de um resultado clássico na base decimal. Enquanto na Seção 4 apresentamos o nosso principal resultado, um procedimento para determinar o mdc entre duas *repunidades generalizadas*, o Teorema 1 é uma generalização para qualquer base b do resultado apresentado em Tarasov[16] na base decimal, para o qual apresentarmos uma demonstração alternativa. Outro resultado interessante é que o produto de duas *repunidades generalizadas* nunca é um quadrado perfeito, o Teorema 2, é parte do estudo da Seção 5. Finalmente na Seção 6 aborda uma curiosa relação entre os números repunidades na base 9 e os triangulares na base 10.

2 Números repunidades na base b

De agora em diante consideramos os números naturais $b \geq 2$ e n na base decimal. Façamos e fixemos outro sistema de base numérica denotando por $(x_n)_b$ um número natural com n algarismos na base b, ou seja, $(x_n)_b = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1 a_0)_b$, com $n \geq 1$ e $a_{n-1} \neq 0$. Portanto, $(x_n)_b$ indica

$$(x_n)_b = a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \ .$$

Conforme Equação (1), o número $(R_n)_b = (\underbrace{111 \cdots 11}_{n\ algarismos})_b$ é um número *repunidade generalizado* ou uma *repunidade* em uma base b, ou ainda, uma *repunidade generalizada*.

Exemplo 1. Veja que $(R_3)_2 = (111)_2 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, enquanto que $(R_3)_5 = (111)_5 = 5^2 + 5^1 + 5^0$. Já $(R_5)_3 = (11111)_3 = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$, da mesma forma que $(R_6)_7 = (111111)_7 = 7^5 + 7^4 + 7^3 + 7^2 + 7^1 + 7^0$.

Para simplificar a notação, vamos escrever R_n também para representar uma *repunidade generalizada* para uma base b fixada, a menos que se indique explicitamente o contrário. De modo geral temos que:

Proposição 1. *[15] Para todo natural $n \geq 1$ temos que $R_n = \dfrac{b^n - 1}{b - 1}$.*

Demonstração. Para quaisquer naturais $b \geq 2$ e $n \geq 1$, segue que a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) é:

$$b^{n-1} + \cdots + b + 1 = \frac{b^n - 1}{b - 1} \ .$$

$\square$

Exemplo 2. E assim para qualquer base $b \geq 2$ escolhida, temos que: $R_1 = (1)_b = \dfrac{b^1 - 1}{b - 1}$,$R_2 = (11)_b = \dfrac{b^2 - 1}{b - 1}$ e $R_3 = (111)_b = \dfrac{b^3 - 1}{b - 1}$, e sucessivamente.

2.1 Resultados auxiliares

Seja m um número natural numa base $b \geq 2$ qualquer. Diremos que dois números inteiros x e y são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros x e y são congruentes módulo m, e escrevemos $a \equiv b \mod m$. Segue facilmente o seguinte resultado, cuja demonstração na base decimal, pode ser consultada, por exemplo, em [8, 10, 12] .

Proposição 2. *Sejam $x,\ y,\ m \in \mathbb{Z}$ numa base b, com $m > 1$. Tem-se que $x \equiv y \mod m$ se, e somente se, $m|(x - y)$.*

Usando notação de congruência, e Proposição 2, mostra-se os dois próximos resultados ou consultar as referências indicadas.

Lema 1. *[7, 9, 10] Um número $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b$, escrito na base b, é divisível por $b - 1$ se, e somente se, a soma dos algarismos for divisível por $b - 1$, isto é*

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \mod (b - 1) \ .$$

Lema 2. *[7] Um número $a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_b$, escrito na base b, é divisível por $b + 1$ se, e somente se, a soma alternada dos algarismos for divisível por $b + 1$, isto é,*

$$(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \equiv 0 \mod (b + 1) \ .$$

3 Repunidades generalizadas e divisores

A seguinte caracterização para um número *repunidade* na base 10 é bem conhecida e é de fácil verificação, para todo n natural temos que o termo R_{n+1} é dado por

$R_{n+1} = 10 \cdot R_n + 1$, consultar em [1, 2, 3, 6, 5, 18].

De igual modo, para as repunidades generalizadas, para todo n natural temos:

$$\begin{cases} R_1 = & 1 \\ R_{n+1} = & (b \cdot R_n + 1)_b, \ n \geqslant 1 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Dessa maneira podemos também encontrar as *repunidades generalizadas* recursivamente pela Equação (2). E assim $R_2 = (11)_b = (b \times R_1 + 1)_b$, enquanto $R_3 = (111)_b = (b \times R_2 + 1)_b$.

Proposição 3. *Para quaisquer naturais $n > k \geq 1$ o número $b^n + b^{n-1} + \cdots + b^{n-k}$ é um múltiplo de R_k.*

Demonstração. Para qualquer $k \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} b^n + b^{n-1} + \cdots + b^{n-k} &= 1 \cdot b^n + 1 \cdot b^{n-1} + \cdots + 1 \cdot b^{n-k} + 0 \cdot b^{n-(k-1)} + \ldots + 0 \cdot b^1 + 0 \\ &= (\underbrace{11 \cdots 1}_{k\ vezes}) \cdot b^{n-1} = (R_k \cdot b^{n-k})_b \ . \end{aligned}$$

E temos o resultado. □

Proposição 4. *Para qualquer n natural tem-se que $b^n + 1$ divide R_{2n}.*

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned} R_{2n} &= \frac{b^{2n} - 1}{b - 1} = \frac{(b^n - 1)(b^n + 1)}{b - 1} \\ &= \frac{b^n - 1}{b - 1}(b^n + 1) \ = \ R_n \cdot (b^n + 1) \ . \end{aligned}$$

□

Proposição 5. *Para qualquer n natural tem-se que $b^{2n} + b^n + 1$ divide R_{3n}.*

Demonstração. Segue diretamente do seguinte fato

$$\begin{aligned} R_{3n} &= \frac{b^{3n} - 1}{b - 1} = \frac{(b^n - 1)(b^{2n} + b^n + 1)}{b - 1} \\ &= \frac{b^n - 1}{b - 1}(b^{2n} + b^n + 1) \ = \ R_n \cdot (b^{2n} + b^n + 1) \ . \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. Considere $b = 4$ e assim $R_6 = (111111)_4$, , pelo Lema 1 temos que $(3)_4$ divide $(12)_4 = 6$, pois $(3 \cdot 2 = 12)_4$. Veja ainda que $(111111 = 111 \cdot 1001)_4$, ou seja, R_3 divide R_6.

Na verdade temos o seguinte resultado:

Proposição 6. *Para todo n natural, se n é múltiplo de $b-1$, na base b, então R_n é múltiplo de R_{b-1}.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 1. □

Exemplo 4. Considere $b = 4$, como $R_{10} = (1111111111)_4$ e segue do Lema 2 que pelo Lema 2 divide $8 = (22)_4$ pois $(11 \cdot 2 = 22)_4$. E mais $(1111111111 = 11111 \cdot 100001)_4$, ou seja, R_5 divide R_{10}.

E vale o seguinte resultado:

Proposição 7. *Para todo n natural, se n é múltiplo de $b+1$, na base b, então R_n é múltiplo de $b+1$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 2. □

Um resultado mais geral é:

Proposição 8. *[14] Para quaisquer n e m naturais, se n é múltiplo de m então R_n é múltiplo de R_m.*

Demonstração. Como o número n é múltiplo de m, ou seja, $n = mq$ para algum natural q. Segue da Proposição 1 que

$$\begin{aligned} R_{mq} &= \frac{b^{mq}-1}{b-1} \\ &= \frac{b^{mq}-1}{b^m-1} \times \frac{b^m-1}{b-1}, \end{aligned}$$

□

Em Ribenboim[14] apresenta este mesmo argumento da Proposição 8 para a base decimal. Para além disso, especificamente na base 10, temos:

Corolário 1. *[3, 5] Para todo natural n:*

(a) Se n é um número par então R_n é múltiplo de R_2.

(b) Se n é múltiplo de 3 então R_n também o é.

Demonstração. Basta substituir b por 10. □

Proposição 9. *[4, 8] A repunidade generalizada R_3 divide o número $(10101)_b$.*

Demonstração. Temos que $R_3 = b^2+b+1$, de modo semelhante temos que $(10101)_b = b^4+b^2+1$. Veja ainda que $(10101)_b = b^4+b^2+1 = (b^2+b+1)(b^2-b+1)$, portanto $R_3 \mid (10101)_b$ para toda base numérica $b \geq 2$. □

4 Maior divisor comum

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho, um modo pra determinar o *maior divisor comum (mdc)* entre duas repunidades em qualquer base b fixada.

Usamos a notação (a, b) para indicar o *mdc* entre os números a e b, e assim a é relativamente primo a b, ou coprimos, se $(a, b) = 1$.

Como $R_2 = (11)_b$ e, pela a Equação (2), $R_3 = (111)_b = (b \times R_2 + 1)_b$. Usando o algoritmo de Euclides segue que $(R_3, R_2) = (R_2, 1) = 1$. De um modo geral temos que

Proposição 10. *[6] Dois números repunidades generalizados consecutivos são coprimos.*

Demonstração. Para todo $n \geq 1$ natural, pela Equação (2) temos que $R_{n+1} = b \cdot R_n + 1$, segue do algoritmo de Euclides que

$$(R_{n+1}, R_n) = (b \cdot R_n + 1, R_n) = (R_n, 1) = 1 \ .$$

□

Exemplo 5. Veja que $R_{100} = b^{99} + b^{98} + b^{97} + \cdots + b^3 + b^2 + b + 1$ e $R_{60} = b^{59} + b^{58} + b^{57} + \cdots + b^3 + b^2 + b + 1$. Pelo processo de divisão sucessivas, algoritmo de Euclides, podemos determinar o (R_{100}, R_{60}). Como:

$$\begin{aligned} R_{100} &= R_{60} \times b^{40} + R_{40} \ , \\ R_{60} &= R_{40} \times b^{20} + R_{20} \ , \\ R_{40} &= R_{20} \times b^{20} + R_{20} = R_{20} \times (b^{20} + 1) \ . \end{aligned}$$

Das igualdades anteriores resulta que

$$(R_{100}, R_{60}) = (R_{60}, R_{40}) = (R_{40}, R_{20}) = R_{20} \ .$$

O Teorema 1 (e o Corolário 2) é uma generalização para qualquer base $b \geq 2$ do resultado apresentado em Tarasov [16, Theorem 3, p. 3] na base decimal, além de apresentar uma demonstração alternativa.

Teorema 1. *Para quaisquer naturais $m > n$ tem-se que $(R_m, R_n) = R_{(m,n)}$.*

Demonstração. Pela Proposição 1 temos $R_m = \dfrac{b^m - 1}{b - 1}$ e $R_n = \dfrac{b^n - 1}{b - 1}$. Como $m > n$, pela divisão euclidiana temos que $m = n \cdot q + r$, e existem q, r naturais com

$0 \leq r < n$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{b^m - 1}{b-1} &= \frac{b^{nq+r} - 1}{b-1} \\
&= \frac{b^{nq+r} - b^r + b^r - 1}{b-1} \\
&= \frac{b^r(b^{nq} - 1) + b^r - 1}{b-1} \\
&= \frac{b^r(b^{nq} - 1)}{b-1} + \frac{b^r - 1}{b-1}\ .
\end{aligned}$$

Agora pela Proposição 8 segue que $b^n - 1 \mid b^{nq} - 1$, e assim $\dfrac{b^n - 1}{b-1} \mid \dfrac{b^{nq} - 1}{b-1}$. Disto temos que,

$$\begin{aligned}
(R_m, R_n) =& \left(\frac{b^m - 1}{b-1}, \frac{b^n - 1}{b-1}\right) \\
=& \left(\frac{b^n - 1}{b-1}, \frac{b^r - 1}{b-1}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Na Equação (3) temos duas possibilidades: r é um divisor do n e neste caso $(R_n, R_k) = R_r$, ou r não é um divisor do n e repetimos o processo e determinamos $0 < r_1 < r$; e teremos novamente duas possibilidades r_1 é um divisor do r e neste caso $(R_m, R_n) = (R_n, R_r) = (R_r, R_{r_1}) = R_{r_1}$, ou r_1 não é um divisor do r e repetimos o processo e determinamos r_2 tal que $0 < r_2 < r_1 < r$. Como esse processo é finito, visto que a quantidade de números naturais no intervalo $[0, n]$ é finito; e assim o processo finaliza após um número finito k de etapas, com uma das duas possibilidades:

$$(R_m, R_n) = (R_n, R_r) = \cdots = (R_{r_{k-1}}, R_{r_k}) = \begin{cases} R_{r_k}, & \text{se } 1 < r_k \text{ divide } r_{k-1} \\ 1, & \text{se } r_k = 1 \end{cases}.$$

Veja que $(m, n) = (n, r) = \cdots = (r_{k-1}, r_k) = r_k$, com $r_k \geq 1$, em qualquer dos dois casos, obtemos que $(R_n, R_k) = R_{(n,k)}$. $\square$

Segue imediatamente do Teorema 1 que:

Corolário 2. *Para quaisquer inteiros positivos m, n, $(R_m, R_n) = 1$ se, e somente se, $(m, n) = 1$.*

5 Quadrados Perfeitos

Em uma base $b \geq 2$ fixada, um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe um número n tal que $(m)_b = (n^2)_b$.

Proposição 11. *Para todo $n \geq 1$ a diferença $R_{2n+1} - R_{2n}$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Para qualquer b, segue da Proposição 1 que

$$\begin{aligned} R_{2n+1} - R_{2n} &\overset{\text{Prop.1}}{=} \frac{b^{2n+1}-1}{b-1} - \frac{b^{2n}-1}{b-1} \\ &= \frac{b^{2n+1}-b^{2n}}{b-1} = \frac{b^{2n}\cdot(b-1)}{(b-1)} = b^{2n} \\ &= (b^n + 0b^{n-1} + \cdots + 0b^1 + 0)^2 = (1\underbrace{00\cdots 0}_{n\ vezes})_b^2 . \end{aligned}$$

Disto concluímos que $(R_{2n+1} - R_{2n})_b = (10^n)_b^2$ é um quadrado perfeito. □

Corolário 3. *A raiz quadrada $R_{2n+1} - R_{2n}$ é 10^n.*

Além disso a diferença entre dois termos sucessivos é uma potência de b, precisamente temos:

Proposição 12. *Para qualquer $n \geq 1$ tem -se $R_{n+1} - R_n = 10^n$.*

Demonstração. Para qualquer $b > 1$ temos

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \frac{b^{n+1}-1}{b-1} - \frac{b^n-1}{b-1} \\ &= \frac{b^{n+1}-1-b^n+1}{b-1} \\ &= \frac{b^{n+1}-b^n}{b-1} = \frac{b^n(b-1)}{b-1} \\ &= b^n = (10^n)_b . \end{aligned}$$

□

Segue diretamente da Proposição 12 que

Corolário 4. *A raiz enésima de $(R_{n+1} - R_n)_b$ é $(10)_b$.*

Exemplo 6. Na base decimal, veja que $R_3 + 10 = 111 + 10 = 121 = 11^2 = (R_2)^2$.

Este fato é (facilmente) verificado em qualquer base $b > 2$, isto é,

Proposição 13. *Para qualquer $b > 2$ temos que $R_3 + b = R_2^2$.*

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned} R_3 + b &= \frac{b^3-1}{b-1} + b = (b^2+b+1) + b \\ &= b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2 . \end{aligned}$$

Como $R_2 = \dfrac{b^2-1}{b-1} = b + 1$, segue o resultado. □

Teorema 2. *Sejam $m > n > 1$ naturais então o produto de duas repunidades generalizadas $R_m \cdot R_n$ não é quadrado perfeito.*

Demonstração. Por hipótese temos que $m > n$, seja $(m, n) = d \geq 1$, segue do Teorema 1 que $(R_m, R_n) = R_d$. Vamos separar em dois casos. Se $d = 1$ então R_m e R_n são coprimos, logo não existe um divisor comum, o que acarreta que $R_m \cdot R_n$ não um é quadrado perfeito. Se $d > 1$ então R_d é o maior divisor comum de R_m e R_n, e mais $R_m = R_d \cdot q_1$ e $R_n = R_d \cdot q_2$ com $q_1 \neq q_2$ e $(q_1, q_2) = 1$ visto que $m \neq n$. Veja que

$$R_m \cdot R_n = (R_d)^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \ ,$$

o que acarreta que $R_m \cdot R_n$ também não é quadrado perfeito. □

6 Outros fatos curiosos

Nesta seção apresentamos a resolução do Problema 1b, Seção: Repunits, do trabalho Andreescu e Gelca [1], em que aponta uma relação entre os números repunidades na base 9 e os números triangulares na base 10. O estudo/pesquisa para resolução deste problema, e da Proposição 9, nos motivaram no desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso do primeiro autor.

Lembramos que um número natural T é triangular na base decimal se for da forma $T = \dfrac{a \cdot (a+1)}{2}$, sendo a um natural.

Proposição 14. *[1] Para $n \geq 1$, toda repunidade na base 9 é um número triangular na base 10.*

Demonstração. Para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} (R_n)_9 &= \frac{9^n - 1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2n} - 1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(3n)^2 - 1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2} \\ &= \frac{\frac{3^n - 1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2}}{2} . \end{aligned}$$

Façamos $a = \dfrac{3^n - 1}{2}$ e $b = \dfrac{3^n + 1}{2}$; agora vamos mostrar que a e b são naturais consecutivos, vejamos:

$$a = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{(3-1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1)}{3 - 1} = (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1) \ ,$$

e
$$b = \frac{3^n+1}{2} = \frac{3^n-1}{2} + \frac{2}{2} = (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1) + 1 \, .$$
Portanto $b = a + 1$, assim
$$(R_n)_9 = \frac{\frac{3^n-1}{2} \cdot \frac{3^n+1}{2}}{2} = \frac{a(a+1)}{2} \, ,$$
com $a = (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3 + 1) \in \mathbb{N}$. Portanto qualquer repunidade na base 9 é um número triangular. $\square$

7 Considerações

Na base decimal os números repunidades e divisibilidade são assuntos frequentes diversas competições ou Olimpíadas de Matemática, bem como sistema posicional de numeração. Neste trabalho apresentamos nosso estudo envolvendo os 3 (três) temas ou assuntos de forma entrelaçada. Para um leitor interessado sugiro uma consulta aos Banco de Questões ou Provas aplicada da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)[13], ou ainda as referências[1, 3, 5, 6, 19].

Acerca das *repunidades generalizadas* não encontramos nenhum texto em português, parte da motivação deste. Aqui vamos comentar 3(três) trabalhos clássicos, para motivação de outros trabalhos acadêmicos: em Snyder[15, 1982] usando polinômios ciclotômicos, teoria dos números algébricos, mostra que $(R_n)_b$ possui um divisor primo. E Jaroma[11, 2007] mostra que esse resultado segue da teoria relativa às sequências de Lucas. Enquanto em Trojovskỳ e Tobiáš[17, 2012] apresenta os divisores primos das das *repunidades generalizadas*.

Acreditamos que este texto apresenta conceitos, propriedades e exemplos importantes no estudo de repunidades, divisibilidades e sistemas de numeração para estudantes em preparação para competições matemáticas, bem como, para entusiastas e diletantes desta ciência.

Referências

[1] Titu Andreescu and Razvan Gelca. *Mathematical olympiad challenges*. Springer Science & Business Media, 2008.

[2] Albert H Beiler. *Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains*. Courier Corporation, 1964.

[3] Fernando Soares de Carvalho and Eudes Antonio Costa. Escrever o número 111... 111 como produto de dois números. *Revista do Professor de Matemática*, -(87):15–19, 2015.

[4] Eudes Antonio Costa and Grieg Antonio Costa. Existem números primos na forma 101... 101. *Revista do Professor de Matemática*, -(103):21–22, 2021.

[5] Eudes Antonio Costa and Douglas Catulio Santos. Algumas propriedades sobre os números monodígitos e repunidades. *Revista de Matemática*, 2:47–58, 2022.

[6] Eudes Antonio Costa and Douglas Catulio dos Santos. Números repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. *Professor de Matemática Online*, 8(4):495–503, 2020.

[7] Eudes Antonio Costa and Ronaldo Antônio Santos. Números de ball generalizados. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 7(1):61–85, 2022.

[8] Hygino Hugueros Domingues. Fundamentos de aritmética. *Florianópolis: editora da UFSC*, 2017.

[9] Serguei Vasil'evich Fomín and Carlos Vega. *Sistemas de numeración*. MIR, 1975.

[10] Abramo Hefez. *Aritmética, Coleção PROFMAT, 1a edição*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[11] John H Jaroma. Factoring generalized repunits. *Bulletin of the Irish Mathematical Society*, –(59), 2007.

[12] Ivan Niven, Herbert S Zuckerman, and Hugh L Montgomery. *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley & Sons, 1991.

[13] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP. *Banco de Questões*. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em 10 de Dez de 2022.

[14] Paulo Ribenboim. *The little book of bigger primes*. Springer Science & Business Media, 2004.

[15] William M. Snyder. Factoring repunits. *The American Mathematical Monthly*, 89(7):462–466, 1982.

[16] Boris V Tarasov. The concrete theory of numbers: initial numbers and wonderful properties of numbers repunit. *arXiv:0704.0875 [math.GM]*, 2007.

[17] Pavel Trojovskỳ and Jiri Tobiáš. Some divisibility properties of generalized repunits. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 81(3):433–438, 2012.

[18] Samuel Yates. The mystique of repunits. *Mathematics Magazine*, 51(1):22–28, 1978.

[19] Paul Zeitz. *Art Craft Problem Solving*. John Wiley New York publisher, 1999.