Sistemas de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem com coeficientes constantes

Amanda Figueiredo Gomides amanda.gomides@aluno.ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Geraldo César Gonçalves Ferreira geraldocesar@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Éder Marinho Martins eder@ufop.edu.br
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil

Resumo

Em situações da vida real, é normal encontrarmos problemas que dependem de elementos separados, relacionados de alguma forma. Traduzindo para a linguagem matemática, nos deparamos com equações diferenciais cuja ordem pode ser um valor que gere um grande número de cálculos, considerando que, de fato, existam meios para se obter uma solução direta. Para contornar esse problema, associamos conhecimentos dos estudos de equações diferenciais e de álgebra linear, para que possamos transformar equações diferenciais ordinárias de n-ésima ordem em sistemas de n equações diferenciais de 1ª ordem, facilitando, assim, a busca por soluções que satisfaçam o problema dado.

Palavras-chave

Sistemas lineares. Equações diferenciais ordinárias. Sistemas de equações diferenciais.

1 Introdução

Uma Equação Diferencial Ordinária homogênea de ordem n é dada da seguinte forma:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Existem diversas maneiras conhecidas para determinar, quando existem, soluções para equações diferenciais quando a ordem desta é 1 ou 2: fatores integrantes, método das equações exatas, entre outros. No entanto, quando trabalhamos com equações de graus mais altos, esses métodos não são mais tão eficazes, porque envolvem uma grande quantidade de cálculos e procedimentos que demandam tempo e esforço.

De fato, é intuitivo pensar que quanto menor a ordem de uma equação, mais simples é para encontrar soluções que a satisfaçam. Uma boa alternativa à problemática das EDOs - como chamaremos as equações diferenciais ordinárias daqui para frente - de ordem mais alta nos vem por meio de um conhecido conceito da álgebra linear:

transformamos uma EDO de ordem n em um sistema de n equações de ordem 1. Apesar de aumentar o número de equações a serem resolvidas, cada uma delas possui apenas derivadas de ordem 1, o que facilita o processo de encontrar soluções para a EDO. Embora, nesse artigo, nos restringimos a $n = 2$, será possível notar a praticidade do método.

A transformação de uma EDO de n-ésima ordem em um sistema de n equações de 1ª ordem ocorre quando utilizamos as substituições: em (1), faremos

$$x_1 = y,\, x_2 = y',\, x_3 = y'', ..., x_n = y^{(n-1)}.$$

Dessas substituições, obtemos

$$x_1' = y' = x_2,\, x_2' = y'' = x_3, ...,\, x_{n-1}' = y^{(n-1)} = x^{(n)},$$

isto é, encontramos associações entre todas as novas variáveis, e essas relações envolvem apenas derivadas primeiras.

De forma geral, podemos escrever a equação (1) como o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' = F_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \quad \vdots \\ x_n' = F_n(x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{2}$$

Essa aplicação, de conceitos referentes ao campo de estudos da Álgebra Linear, será recorrente e extremamente importante a partir desse ponto.

Veremos, na Sessão 4 desse artigo, que o processo descrito acima para EDOs homogêneas, é bem similar para EDOs não homogêneas

Esse artigo foi escrito com base nos estudos acerca das referências [1] e [2]. Nesse trabalho, visamos explorar o método da transformação de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes e de ordem n, em sistemas de equações diferenciais ordinárias de ordem 1 com coeficientes constantes, para a obtenção de suas soluções.

2 Sistemas de EDOs lineares, homogêneos, com coeficientes constantes

Vamos entender, primeiramente, como fazemos para encontrar a solução de um sistema de EDOs lineares homogêneos com coeficientes constantes. Para tal, reescreveremos o sistema (2) evidenciando suas componentes:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{3}$$

Podemos reescrever o sistema (3) por meio de uma equação matricial:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} & . \\ [A] & [x] & = & [x'] & \end{array} \tag{4}$$

A matriz A é constituída pelos coeficientes das equações do sistema (3). A sua multiplicação pelo vetor x nos dá o vetor x', isto é, $Ax = x'$. Se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ax = \lambda x$, diremos que λ é um *autovalor* de A, e x é um *autovetor* associado ao autovalor λ. Neste caso, $Ax - \lambda x = 0$, onde 0 é o vetor nulo. Por se tratar de uma equação matricial, observe que ainda podemos reorganizar os termos da seguinte forma:

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{5}$$

As soluções que buscamos para a equação $Ax = x'$ serão da forma $x = \xi e^{\lambda t}$.

Os seguintes Teoremas são resultados importantes para a obtenção de soluções. Não focaremos em suas demonstrações neste artigo, mas estas estão presentes no texto-base [1].

Teorema 1. ***([1], Teorema 7.4.1)*** *Se as funções vetoriais x_1 e x_2 são soluções de $x' = Ax$, então a combinação linear $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.*

Teorema 2. ***([1], Teorema 7.4.2)*** *Se as funções vetoriais $x_1, ..., x_n$ são soluções linearmente independentes de $Ax = x'$ em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $x = x(t)$ de $Ax = x'$ pode ser expressa como uma combinação linear de $x_1, ..., x_n$, da forma*

$$x(t) = c_1x_1(t) + ... + c_nx_n(t) \tag{6}$$

de exatamente um modo.

Esses dois teoremas nos dizem, na prática, que ao encontrarmos duas soluções $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ linearmente independentes, então temos um conjunto fundamental de soluções, e a partir delas encontramos todas as soluções do sistema. A equação (6) é chamada solução geral.

Para facilitar a compreensão das ideias, vamos aplicar em um exemplo:

Exemplo 1. *Encontre a solução geral da equação* $y'' + 5y' - 5y = 0$

Fazendo $x_1 = y$ e $x_2 = y' = x_1'$, obtemos a equação reescrita em função de x_1 e x_2:

$$x_2' + 5x_2 - 5x_1 = 0.$$

Obtemos assim o seguinte sistema e sua escrita matricial:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 5x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Para que $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0$, obtemos os autovalores $\lambda_1 = \dfrac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}$, e os autovetores correspondentes $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$.

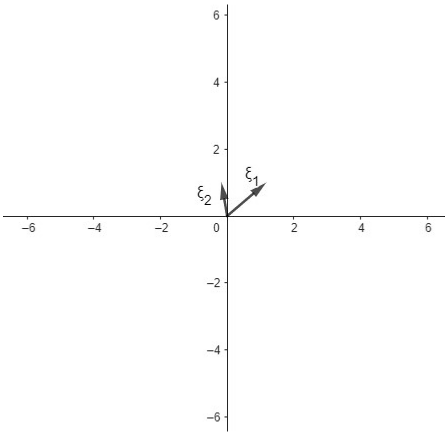
Solução geral:

$$x = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{5}+5}{10} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-5+3\sqrt{5}}{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-5-3\sqrt{5}}{2}}. \tag{7}$$

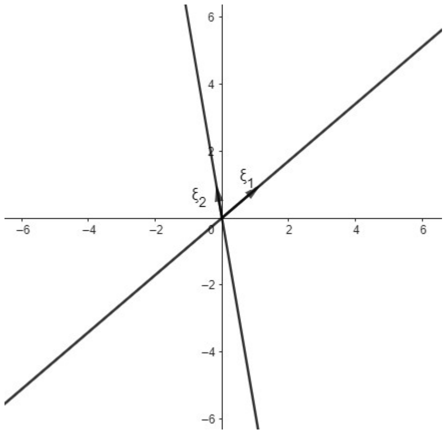
3 Retrato de Fase

O retrato de fase é a representação gráfica das trajetórias de uma EDO no plano. Cada trajetória representa uma condição inicial diferente para a EDO. Uma vantagem de escrever a solução de uma EDO usando os autovalores e autovetores, como fizemos na seção anterior, é que a construção do retrato de fase é bastante intuitiva. Para encontrá-lo, de forma bastante resumida, seguimos esta ordem:

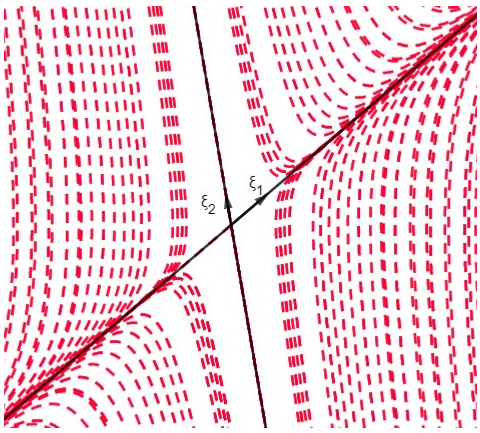
Para encontrar todas as curvas, é necessário o auxílio de recursos computacionais.



(a) Traçamos os autovetores ξ_1 e ξ_2. Eles gerarão os novos eixos.



(b) Traçamos as retas direcionadas pelos vetores. Essas retas formarão um novo sistema de coordenadas.



(c) Por fim, analisamos a variação dos valores de c_1 e c_2 na solução geral encontrada em 7 e como esses valores afetam a velocidade de crescimento das exponenciais envolvidas. Para cada valor, uma nova curva é gerada.

No entanto, as relações entre autovalores e autovetores nos permitem fazer um esboço, ainda que fora de escala, sendo possível ter uma noção de como a EDO se comporta no plano.

4 Sistemas de EDOs lineares, não homogêneos, com coeficientes constantes

O processo de transformação de uma EDO não homogênea em um sistema de EDO's lineares de ordem n é bem parecido com o procedimento feito para EDO's homogêneas. Alguns passos são adicionados, mas todos envolvem conceitos relacionados aos que já foram usados até então.

Uma EDO não homogênea de ordem n é dada da seguinte forma:

$$y^{(n)} = F(t, y, y', ..., y^{(n-1)}, g(t)). \tag{8}$$

Faremos as mesmas substituições de variáveis feitas para o caso homogêneo, de modo que possamos escrever a equação (8) como o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(x_1, x_2, ..., x_n, g_1(t)) \\ x_2' = F_2(x_1, x_2, ..., x_n, g_2(t)) \\ \quad \vdots \\ x_n' = F_n(x_1, x_2, ..., x_n, g_n(t)). \end{cases} \tag{9}$$

Supondo que o sistema (9) seja linear, podemos reescrevê-lo de modo a evidenciar suas componentes, encontramos:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + g_1 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + g_2 \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + g_n. \end{cases} \tag{10}$$

Agora, escrevendo o sistema (10) em notação matricial, obtemos a equação:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Deste modo, estaremos trabalhando com um sistema da forma $x' = Ax + g(t)$, cuja solução será, baseando-se novamente nos Teoremas 1 e 2, da forma

$$x(t) = c_1x_1(t) + ... + c_nx_n(t) + v(t). \tag{12}$$

Existem alguns métodos que podem ser usados para encontrar $v(t)$. Nesse trabalho, falaremos sobre o método da diagonalização. Para tanto, A deverá ser uma matriz diagonalizável.

Após encontrar os autovetores de A, denominados $\xi_1, ..., \xi_n$, formamos a matriz T, cujas colunas são esses autovetores. Se definirmos uma variável y de modo que $x = Ty$, podemos substituir em $x' = Ax + g(t)$, obtendo

$$Ty' = ATy + g(t). \tag{13}$$

Multiplicando por T^{-1}, temos:

$$y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}g(t) = Dy + h(t), \tag{14}$$

onde $h(t) = T^{-1}g(t)$ e D é a matriz diagonal dos autovalores de A, ordenados seguindo a ordem dos autovetores em T.

Observe que a equação $y' = Dy + h(t)$ representa um sistema de equações cujas variáveis não dependem umas das outras. Podemos denotar por $y_i' = \lambda_i y_i + h_i$. Isso faz com que cada equação possa ser resolvida separadamente, por métodos conhecidos para solução de equações lineares de primeira ordem, sendo h_i uma combinação linear de $g_1, ..., g_n$.

Exemplo 2. *Encontre a solução geral do sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = Ax + g(t).$$

Esse é o Exemplo 1 da Sessão 7.9, resolvido no livro da referência [1].

Para que $det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$, obtemos os autovalores $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$, e os autovalores correspondentes $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Portanto, a solução da equação homogênea associada é

$$x = c_1\xi_1 e^{\lambda_1} + c_2\xi_2 e^{\lambda_2} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{15}$$

Normalizando a matriz T para posteriormente facilitar os cálculos, obtemos

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Fazendo $x = Ty$ obtemos a partir da equação original:

$$y' = Dy + T^{-1}g(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Obtemos, portanto, o sistema

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + \sqrt{2}e^{-t} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}t \\ y_2' = -y_2 + \sqrt{2}e^{-t} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}t \end{cases}. \tag{18}$$

Resolvendo cada equação do sistema acima, a partir de algum dos métodos já conhecidos de solução de EDOs de 1ª ordem, encontramos

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\left[\left(\dfrac{t}{3}\right) - \dfrac{1}{9}\right] + c_1e^{-3t} \\ y_2 = \sqrt{2}te^{-t} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2e^{-3t} \end{cases}. \tag{19}$$

Portanto voltando às variáveis originais, a solução é da forma

$$\begin{aligned} x = Ty &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{c_1}{\sqrt{2}}e^{-3t} + \left[\dfrac{c_2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2}\right]e^{-t} + t - \dfrac{4}{3} + te^{-t} \\ -\dfrac{c_1}{\sqrt{2}}e^{-3t} + \left[\dfrac{c_2}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\right]e^{-t} + 2t - \dfrac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{c_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, $\omega = \dfrac{c_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \dfrac{c_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$ é a solução geral do sistema homogêneo associado à equação original, e $\gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ é solução particular do sistema não homogêneo.

5 Conclusão

Este artigo traz um resumo sobre a obtenção e resolução de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Nos exemplos dados, nos limitamos a casos em que os autovalores são reais e distintos. É possível realizar esse mesmo trabalho com autovalores complexos, autovalores repetidos, EDO's cujos coeficientes não são constantes, entre outros. Com esses conceitos, é possível analisar o comportamento qualitativo de sistemas não lineares, o que será foco de estudo por parte dos autores.

6 Agradecimentos

A primeira autora, Amanda Figueiredo Gomides, agradece a todos que contribuíram para a realização desse trabalho, sobretudo ao PICME e CNPq, pela oportunidade e fomento da pesquisa, à Universidade Federal de Ouro Preto, por proporcionar o acesso à educação pública e de qualidade e a participação de projetos como o PIVIC, e aos outros autores, os professores orientadores Geraldo e Éder, sempre pacientes, solícitos e motivadores.

Referências

[1] William E. Boyce e Richard C. Diprima. *Equações diferenciais ordináras e problemas de valores de contorno*, volume 9. LTC, 2010.

[2] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, volume 2. Elsevier, 2004.