Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

Resolução de problemas em programação linear via método simplex por tabelas

Wellerson Alex Brito da Silva wellerson.brito@dcx.ufpb.br
Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, PB, Brazil

José Laudelino de Menezes Neto laudelino@dcx.ufpb.br
Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, PB, Brazil

Resumo

Neste texto apresentamos um método de como resolver determinados tipos de problemas em Programação Linear, utilizando o Método Simplex via tabelas. Problemas de Programação Linear estão relacionados à otimização. Num contexto abstrato, Programação Linear se refere a maximizar, ou minimizar, uma função objetivo de n variáveis, restrito a condições lineares nestas variáveis. A aplicação prática aqui apresentada, mostra uma decisão sugerida pelo Método Simplex, a partir de dados de uma empresa: produto, material e estoque, para maximizar o lucro seguindo determinadas restrições.

Palavras-chave

Pesquisa Operacional, Programação linear, Otimização.

1 Introdução

A Programação Linear (PL) é utilizada para resolver problemas de otimização, muitos problemas que existem no mundo real podem ser formulados como problemas de PL, por exemplo, corte de material evitando desperdícios, melhoria nas rotas de transporte de cargas visando economia de combustível, qual produto uma empresa deve priorizar para maximizar os lucros etc. A PL é o processo de minimizar ou maximizar uma função objetivo Z atendendo a uma série de restrições dadas.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Maximizar ou minimizar a} & & & \\
\text{função objetivo } Z: & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
& & & \\
\text{Restrito a:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
& & \vdots & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. & & &
\end{array}
$$

O Método Simplex é um dos algoritmos mais conhecidos na resolução de tais problemas [8], sendo criado por George Dantzig em 1947. O sucesso do algoritmo levou a uma vasta gama de melhoramentos e generalizações que tem dominado a pesquisa de operações práticas desde então [4, 7, 9].

A PL é utilizada na solução de problemas como uma técnica de tomada de decisões. Por exemplo, um gerente de uma organização, constantemente se depara, com circunstâncias em que deve tomar decisões, que levam em consideração diversas alternativas conflitantes e concorrentes. Diante dessas situações o gerente pode utilizar a intuição gerencial ou realizar um processo de modelagem da situação [6]. A partir desta modelagem é onde se encaixa a PL, podendo auxiliar nesta tomada de decisão.

Em linhas gerais, a PL busca, entre as inúmeras tarefas ou atividades, descobrir a melhor distribuição dos recursos a fim de obter um valor ótimo do objetivo desejado. Os problemas de alocação de recursos distinguem-se pela existência de um objetivo explícito por meio de variáveis de decisão e pela existência de restrições para alocar os recursos devido às quantidades disponíveis e a forma de aplicá-los [1].

O Exemplo 1 ilustra estas situações apresentadas nos dois parágrafos anteriores.

Exemplo 1. *Uma fábrica de móveis dispõe em estoque de 250m de tábuas, 600m de pranchas e 500m de painéis de conglomerado. A fábrica oferece uma linha de móveis composta por um modelo de escrivaninha, uma mesa de reunião, um armário e uma prateleira. Cada tipo de móvel consome quantidades de matéria-prima que seguem as seguintes condições:*

- *a escrivaninha consome 1m de tábua e 3m de painéis;*
- *a mesa necessita de 1m de tábua, 1m de prancha e 2m de painéis;*
- *o armário consome 1m de tábua, 1m de prancha e 4m de painéis; e*
- *a prateleira necessita de 4m de tábua e 2m de prancha.*

A escrivaninha é vendida por R$100, a mesa por R$80, o armário por R$120 e a prateleira por R$20. O objetivo é maximizar o lucro dadas estas condições apresentadas [5].

Utilizando PL, com a aplicação do Método Simplex, obtemos a melhor alocação destes recursos para maximizar o lucro do problema apresentado no Exemplo 1.

Neste texto, temos por objetivo, apresentar a resolução de problemas semelhantes a este do Exemplo 1 via Método Simplex por tabelas. Destacamos que não iremos nos ater a teoria por trás, que garante a satisfatoriedade do Método Simplex, mostraremos apenas a sua resolução e aplicação do método, bem como apresentamos alguns empecilhos encontrados: problema ilimitado e o algoritmo entrar em loop.

2 Método Simplex

Dado um problema de Programação Linear (PL), que consiste em otimizar uma função objetivo Z, condicionada a um conjunto de restrições, o Método Simplex é uma técnica iterativa que possibilita otimizar a solução da função objetivo Z em cada iteração. O procedimento termina quando não é mais possível otimizar este valor, ou seja, ao chegarmos na solução ótima para o problema.

O modelo deve atender ao seguinte objetivo de maximizar ou minimizar o valor da função objetivo Z sujeito às restrições impostas.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Maximizar a função objetivo } Z: & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
 & & & \\
\text{Restrito as condições:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & \vdots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0. & & &
\end{array}
$$

Limitamos o estudo apenas ao caso onde todas as restrições devem conter somente desigualdades do tipo menor ou igual e as variáveis x_i são positivas ou nulas. Além disso, os termos independentes b_i não podem ser negativos, e vamos nos ater somente com a condição de maximizar a função objetivo.

Nossa principal referência para descrição deste método de resolução do Método Simplex via tabelas é o livro [3].

A inicialização do Método Simplex para resolver o problema, inicia-se com a adição de m variáveis de folga

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$$

de forma a transformar todos os menores ou iguais, nas m linhas de restrições, apenas em igualdades, ou seja, o problema fica na forma:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Maximizar a função objetivo } Z: & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\\
\text{Restrito as condições:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} & = & b_2 \\
 & & \vdots & \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} & = & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n, & & & \\
x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0. & & &
\end{array}
$$

Representamos este último problema através da Tabela 1. As iterações e contas a serem feitas quando o problema chegar neste formato de Tabela 1, serão exibidos a partir de um problema prático, resolvido na próxima Seção 3.

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	$x_{(n+m)-1}$	x_{n+m}	s
L_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0	0	b_1
L_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_{m-1}	$a_{(m-1)1}$	$a_{(m-1)2}$	$\ldots$	$a_{(m-1)n}$	0	0	$\ldots$	1	0	b_{m-1}
L_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	0	1	b_m
Z	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0	0	$\ldots$	0	0	0

Tabela 1: Problema no formato de tabela.

3 Resolvendo o Exemplo 1

A fim de explicar de modo concreto o funcionamento do Método Simplex via resolução por tabelas, resolvemos o Exemplo 1. Relacionamos cada objeto produzido pela fábrica de móveis a uma variável:

- x_1 corresponde à escrivaninha;
- x_2 corresponde à mesa;
- x_3 corresponde ao armário; e
- x_4 à prateleira.

Sabendo que a empresa está restrita a 250m de tábuas e que a escrivaninha utiliza 1m deste produto, a mesa 1m, o armário 1m, e a prateleira 4m, temos a seguinte desigualdade

$$x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 250.$$

Fazendo o mesmo procedimento para os materiais de prancha e painéis, obtemos, respectivamente,

$$x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 600 \qquad \text{e} \qquad 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500.$$

Sendo o objetivo maximizar o lucro, sabendo que a escrivaninha é vendida por R$100, a mesa por R$80, o armário por R$120 e a prateleira por R$20, então temos por objetivo maximizar a função Z dada por

$$Z = 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4.$$

Somos levados ao seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Maximizar a função objetivo } Z\text{:} & 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4 & & \\ & & & \\ \text{Restrito as condições:} & x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 & \leq & 250 \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 600 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & & & \end{array}$$

Neste caso, para resolução via Método Simplex, adicionamos três variáveis de folga, x_5, x_6 e x_7, transformando o problema no novo problema abaixo

$$\begin{array}{rrcl} \text{Maximizar a função objetivo } Z\text{:} & 100x_1 + 80x_2 + 120x_3 + 20x_4 & & \\ & & & \\ \text{Restrito as condições:} & x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 & = & 250 \\ & x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 & = & 600 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_7 & = & 500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0. & & & \end{array}$$

Conforme apresentado na Tabela 1, associamos este problema a Tabela 2 e iniciamos os procedimentos de iterações para resolver o problema.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	1	1	1	4	1	0	0	250
L_2	0	1	1	2	0	1	0	600
L_3	3	2	4	0	0	0	1	500
Z	100	80	120	20	0	0	0	0

Tabela 2: Problema do Exemplo 1 em formato de tabela.

Iteração 1. Escolhemos na linha Z, com exceção da coluna s, a coluna que tem o maior valor positivo, neste caso, selecionamos a coluna x_3 que possui valor 120. Em seguida, devemos escolher, dentre as linhas L_1, L_2 e L_3, a linha da coluna x_3, tal que a divisão dos valores da coluna s pelo seu respectivo na coluna x_3, seja o menor valor, assim, temos

$$\frac{250}{1} = 250 \text{ (linha } L_1), \quad \frac{600}{1} = 600 \text{ (linha } L_2) \quad \text{e} \quad \frac{500}{4} = 125 \text{ (linha } L_3).$$

Neste caso, como o menor valor surgiu da divisão do valor na linha L_3 da coluna s pelo respectivo valor da coluna x_3, então devemos fazer operações entre as linhas L_1, L_2, L_3 e Z de forma a zerar os valores que estão acima e abaixo da linha L_3 na coluna x_3. Este procedimento se assemelha ao que é feito no escalonamento de matrizes, quando da resolução de sistemas lineares [2]. Para tanto, fazemos as seguintes operações:

- linha L_1 passa a ser $L_1 - \frac{L_3}{4}$;
- linha L_2 passa a ser $L_2 - \frac{L_3}{4}$; e
- linha Z passa a ser $Z - 30L_3$.

Após estas operações, encerra-se a Iteração 1 e a Tabela 2 se torna a Tabela 3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	$1/4$	$1/2$	0	4	1	0	$-1/4$	125
L_2	$-3/4$	$1/2$	0	2	0	1	$-1/4$	475
L_3	3	2	4	0	0	0	1	500
Z	10	20	0	20	0	0	-30	-15000

Tabela 3: Problema do Exemplo 1 em formato de tabela após a primeira iteração.

Iteração 2. Repetimos o procedimento da Iteração 1, porém, na linha Z, o maior valor 20 ocorre duas vezes, nas colunas x_2 e x_4. Neste caso de empate entre as colunas, escolhemos a que tem o menor índice j das variáveis x_j. Então, escolhemos a coluna x_2. Agora, fazemos as divisões dos valores na coluna s com o seu respectivo na coluna x_2:

$$\frac{125}{1/2} = 250 \text{ (linha } L_1), \quad \frac{475}{1/2} = 950 \text{ (linha } L_2) \quad \text{e} \quad \frac{500}{2} = 250 \text{ (linha } L_3).$$

Nesta etapa, obtemos um empate com dois valores 250, que ocorrem nas linhas L_1 e L_3. Também neste caso de empate entre linhas, escolhemos a linha L_j possuindo o menor índice j, no caso, a linha L_1. Sendo assim, anulamos os valores abaixo e acima da linha L_1, na coluna x_2, fazendo as seguintes operações nas linhas:

- linha L_2 passa a ser $L_2 - L_1$;

- linha L_3 passa a ser $L_3 - 4L_1$; e
- linha Z passa a ser $Z - 40L_1$.

Estas operações encerram a Iteração 2 e a Tabela 3 se torna a Tabela 4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	$1/4$	$1/2$	0	4	1	0	$-1/4$	125
L_2	-1	0	0	-2	-1	1	0	350
L_3	2	0	4	-8	-4	0	2	0
Z	0	0	0	-140	-40	0	-20	-20000

Tabela 4: Problema do Exemplo 1 em formato de tabela após a segunda iteração.

Iteração 3. Observamos que na linha Z, onde devemos escolher o maior valor, possui apenas valores negativos ou nulos, este é o caso quando o algorítmo chegou no valor ótimo para a função Z. Este valor ótimo é o que está na interseção da linha Z e coluna s, devendo trocar o sinal para obter o valor final de Z. Para saber as configurações deste valor ótimo, zeramos todas as colunas onde aparecem valores negativos na linha Z, obtendo a Tabela 5.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	s
L_1	$1/4$	$1/2$	0	0	0	0	0	125
L_2	-1	0	0	0	0	1	0	350
L_3	2	0	4	0	0	0	0	0
Z	0	0	0	0	0	0	0	-20000

Tabela 5: Problema do Exemplo 1 em formato de tabela na terceira iteração.

Esta Tabela 5 nos dá as seguintes informações.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 125 && (1) \\ -x_1 + x_6 &= 350 && (2) \\ 2x_1 + 4x_3 &= 0 && (3) \\ Z &= 20000 \end{aligned}$$

Sabendo que todos os x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ são valores não negativos, $x_i \geq 0$, a equação (3) nos retorna que $x_1 = x_3 = 0$, de fato

$$2x_1 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_3 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_3 = 0.$$

Assim, das equações (1) e (2)

$$x_2 = 250 \text{ e } x_6 = 350.$$

Além disso, pelo fato das colunas correspondentes serem todas nulas na Tabela 5, isto significa $x_4 = 0, x_5 = 0$ e $x_7 = 0$.

Portanto, a resolução deste problema via Método Simplex nos diz que para obter o lucro máximo de R$20000 ($Z = 20000$), a fábrica de móveis deve produzir apenas 250 mesas ($x_2 = 250$). Neste caso, não se deve produzir escrivaninhas ($x_1 = 0$), nem armários ($x_3 = 0$), nem prateleiras ($x_4 = 0$). Apesar de $x_6 = 350$, nada influencia no problema, pois x_5, x_6 e x_7 são variáveis de folga, ou seja, variáveis auxiliares utilizadas na resolução, sem significado concreto.

3.1 Problema ilimitado

A solução ótima é encontrada quando o critério de parada é satisfeito, ou seja, quando todos os elementos da linha Z são menores ou iguais a zero, isso significa que a otimização foi alcançada. O valor Z atual é a solução ótima do problema, como o caso visto na Tabela 4.

Existe também o caso da solução ilimitada que ocorre se toda coluna da variável x_i escolhida em uma determinada iteração, tiver suas entradas com valores negativos ou nulos, um exemplo é mostrado na Tabela 6. Não há valor ótimo concreto para a função objetivo, mas à medida que os valores das variáveis são aumentados, o valor Z também aumenta sem violar qualquer restrição, podendo aumentar indefinidamente. Este caso também é um critério de finalização do Método Simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s
L_1	2	-11	-8	4	6	125
L_2	1	13	0	-5	0	350
Z	2	-2	98	10	57	-100

Tabela 6: Tabela que exibe o critério de parada para o Problema ilimitado.

A escolha a ser feita, na iteração, na Tabela 6, seria a coluna x_3, por ter o maior valor positivo na linha Z. Entretanto, os valores das linhas na coluna x_3 são menores ou iguais a zero, -8 na linha L_1, e 0 na linha L_2, isto indica que o problema é ilimitado.

3.2 Loop

O loop é um caso onde o problema entra em um ciclo que se repete indefinidamente. Quando isto ocorre, temos como critério de parada, a comparação entre todas as tabelas geradas em cada iteração, se ocorrer de duas tabelas em iterações distintas serem idênticas, significa que o algoritmo entrou em loop e deve ser finalizado.

O problema dado pela Tabela 7 [3] entra em loop na sexta iteração, pois a tabela resultante será idêntica a Tabela 7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s
L_1	-2	-9	1	9	1	0	0
L_2	$1/3$	1	$-1/3$	-2	0	1	0
Z	2	3	-1	-12	0	0	0

Tabela 7: Problema que entra em loop na sexta iteração.

4 Conclusão

Apresentamos o funcionamento do Método Simplex na resolução de um problema prático, com algumas limitações nas restrições, e também discutimos situações que podem surgir quando da execução do método: problema ilimitado e loop. Deixamos como sugestões aos interessados, o caso de não ser necessário a limitação dos termos independentes $b_i \geq 0$ e lidar apenas com as desigualdades do tipo menor ou igual, pode-se considerar os termos b_i de qualquer valor e qualquer tipo de desigualdade, ou igualdade nas restrições; e investigar as formas de burlar quando o algoritmo entra em loop [3]. Existe um aprimoramento do Método Simplex utilizando matrizes, onde menos iterações são necessárias para se chegar ao valor ótimo da função objetivo [3].

Referências

[1] E. L. ANDRADE. *Introdução à pesquisa operacional : métodos e modelos para análise de decisões.* LTC, 2009.

[2] BOLDRINI and et al. *Álgebra Linear.* HARBRA, 1986.

[3] V. CHVÁTAL. *Linear Programming.* W. H. Freeman and Company, 1999.

[4] G. B. DANTZIG and M. N. THAPA. *Linear Programming 2: Theory and Extensions.* Springer, 2003.

[5] M. C. GOLDBARG and et al. *Programação linear e fluxos em redes.* Elsevier, 2015.

[6] G. LACHTERMACHER. *Pesquisa operacional na tomada de decisões.* Campus, 2009.

[7] J. C. NASH. The (dantzig) simplex method for linear programming. *Computing in Science & Engineering*, 2:29–31, 2000.

[8] N. PLOSKAS and N. SAMARAS. Efficient gpu-based implementations of simplex type algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, 250:552–570, 2015.

[9] R. S. M. SOUSA. *Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados. Tese doutorado Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação*. ICMC-USP, 2005.