Revista de Matemática da UFOP
ISSN: 2237-8103

O Teorema de Sharkovsky em Corpos Reais Fechados

Jônatas Marinho Santos Júnior jonatas.marinhojr@gmail.com
Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil

Sumário

Resumo

O Teorema de Sharkovsky é um dos principais teoremas quando estudamos sistemas dinâmicos discretos. Ele diz respeito sobre a existência de pontos periódicos, a partir de um ponto periódico já existente. O que é notável é que usamos essencialmente uma ferramenta: o Teorema do Valor Intermediário. Neste trabalho, provamos o Teorema de Sharkovsky no caso $n = 3$ para funções semi-algébricas e contínuas $f : R \longrightarrow R$, onde R é um corpo real fechado, explorando o fato de que o Teorema do Valor Intermediário ainda é válido para esta classe de funções.

Palavras-chave

Sharkovsky, Continuidade, Semi-algébrica, Corpos reais fechados.

1 Introdução

Os Teoremas clássicos de análise (Teorema do Valor Intermediário, Teorema do Valor Médio, etc) dependem fortemente do ambiente onde as funções estão definidas, que é em intervalos dos números reais. O que faz o conjunto dos números reais tão especial é que ele é um corpo ordenado e completo. Neste artigo, pretendemos apresentar uma classe de corpos onde ainda são válidos estes teoremas.

Ora, note que os teoremas citados acima não são válidos para funções contínuas definidas no conjunto dos números racionais. Porém, há uma extensão do corpo dos números racionais, que está propriamente contida em $\mathbb{R}$, o corpo dos números algébricos reais: Os racionais podem ser vistos como números algébricos reais de grau 1, isto é, são a solução de um polinômio de grau 1 sobre os números inteiros. Um número algébrico real de grau n é um número real que é raiz de algum polinômio de grau n com coeficientes inteiros. A coleção de todos esses números forma um corpo, o corpo dos *números algébricos reais,* e possuem uma propriedade interessante: para funções que são "algébricas" por partes (isto é, os pontos de seu gráfico são as raizes de algum polinômio não nulo), definidas neste corpo, vale os teoremas clássicos de análise.

Relembremos que um passo crucial na prova do Teorema do Valor Intermediário (TVI) é a completude do corpo dos números reais. O que o fato acima nos diz é que podemos enfraquecer a propriedade topológica do corpo (completude), adicionando propriedades algébricas às aplicações contínuas e ao corpo, de modo a obter o TVI. Veremos que estas propriedades algébricas adicionadas são a do corpo ser *real fechado* e das funções serem *semi-algébricas*.

Em sistemas dinâmicos, temos o famoso teorema de Sharkovsky. Ele diz que dada uma certa ordem $\succ$ nos naturais, a *ordem de Sharkovsky*, e uma função contínua $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ que possui um ponto periódico de período n para f, então para qualquer natural m com $n \succ m$ existe um ponto periódico de período m para f.

Na prova do Teorema de Sharkovsky, usamos essencialmente o Teorema do Valor Intermediário e alguma noção de completude (vide [1]). Os resultados topológicos para funções semi-algébricas nos levam à seguinte

Pergunta: *O Teorema de Sharkovsky continua sendo válido para esta classe de funções?*

Este trabalho uma fornece uma resposta positiva para esta pergunta.

Para este fim, provamos o Teorema do Valor Intermediário e alguns corolários para funções semi-algébricas e contínuas, fornecendo todo o conhecimento preliminar necessário, e em seguida obtemos o Teorema de Sharkovsky para esta classe de funções.

2 Preliminares

2.1 Corpos reais fechados

Seja R um corpo ordenado e $P \subset R$ o conjunto dos elementos positivos (para a definição de P, consulte [2], p. 8). R é chamado de **real fechado** quando

(i) Todo elemento de P possui raíz quadrada,

(ii) Todo polinômio $f(x) \in R[x]$ de grau ímpar possui uma raíz em R.

Quando R é o corpo dos números reais, as propriedades acima são consequências do Teorema do Valor Intermediário. No caso em que estamos, R é um corpo ordenado qualquer e impomos que estas duas condições sejam satisfeitas.

Exemplo. O corpo $\mathbb{R}$ é claramente real fechado, pela discussão do início desta seção.

Exemplo. Seja $r \in \mathbb{R}$. Dizemos que r é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ ou simplesmente algébrico quando existe um polinômio não nulo $p \in \mathbb{Q}[x]$ para o qual $p(r) = 0$. Denotaremos por $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ o conjunto dos números reais algébricos. Com as operações de soma e produto herdadas de $\mathbb{R}$, pode-se provar que $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ é um corpo. Além do mais, com a ordem que ele herda de $\mathbb{R}$, ele é um corpo real fechado.

No último exemplo, não há nada especial sobre $\mathbb{R}$. Tome R um corpo real fechado. Como ele possui característica zero, $n \cdot 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0$, onde somamos 1 n vezes. Então $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ dada por $f(n) = n \cdot 1$ é um homomorfismo injetivo. Então $f(\mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Isto nos permite identificar $\mathbb{Q}$ com $\{a/b | a, b \in f(\mathbb{Z}), b \neq 0\}$. Então faz sentido considerar o conjunto dos elementos algébricos de R sobre $\mathbb{Q}$, R_{alg}. Esse corpo é real fechado, com as operações e ordem herdadas de R.

A seguir, enunciamos algumas equivalências à definição acima, que serão úteis mais à frente. Caso haja alguma dúvida na linguagem, consulte [5], capítulos 2 e 4.

Teorema 2.1. *Seja R um corpo ordenado. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) R é um corpo real fechado.

(ii) Existe uma única ordem de R cujo conjunto dos números não negativos é o conjunto dos quadrados e que todo polinômio de $R[x]$ de grau ímpar tem pelo menos uma raíz em R.

(iii) $R[x]/(x^2 + 1)$ é algebricamente fechado.

(iv) Não existe extensão algébrica $F \supset R$ onde F é um corpo ordenado.

Observação. A partir do teorema 2.1, podemos resgatar o Teorema do Valor Intermedirário, Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio para polinômios. Para a prova dessas afirmações, verifique [5], capítulo 5. Estes resultados são usados mais à frente, quando tratamos de conjuntos semi-algébricos.

É importante comentar o seguinte fato:

Teorema 2.2. *Todo corpo ordenado e completo é isomorfo ao corpo dos números reais.*

Ele nos diz que a completude é uma propriedade que apenas $\mathbb{R}$ possui. Deste modo, os exemplos acima, que não são corpos ordenados completos, não são isomorfos a $\mathbb{R}$, e a nossa noção de um corpo ser real fechado é de fato mais fraca que o corpo ser completo.

2.2 Conjuntos e funções semi-algébricas

Seja $A \subset R^n = R \times R \times \cdots \times R$, onde tomamos o produto cartesiano de R n vezes. Dizemos que A é *algébrico* quando existe uma família de polinômios $B \subset R[x_1, \ldots, x_n]$ de modo que $A = \{x \in R | p(x) = 0 \forall p \in B\}$. Isto é, A é a interseção do conjunto solução de equações polinomiais.

Exemplo. Em R^2, podemos tomar polinômios da forma $p(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, $a, b, c, d, e, f \in R$. O conjunto solução deste polinômio é chamado de cônica e visto a definição acima, são exemplos de conjuntos algébricos.

Por definição, a interseção de conjuntos algébricos são continua sendo um conjunto algébrico. Porém, no geral a união e o complementar de conjuntos algébricos não são conjuntos algébricos. Contudo, há uma extensão à definição de conjunto algébrico, para os quais estas operações são válidas, e vamos apresentá-la logo em seguida.

Definição 1. *Seja $A \subset R^n = R \times R \times \cdots \times R$, onde tomamos o produto cartesiano de R n vezes. Ele é dito ser **semi-algébrico** se for da forma*

$$\bigcup_{i=1}^{s} A_i,$$

onde $A_i = \{x \in R^n ; f_1(x) = f_2(x) = \cdots f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \ldots, g_m(x) > 0\}$ e $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$.

Isto é, conjuntos semi-algébricos são a união finita de interseções finitas de conjuntos algébricos com conjuntos da forma $\{f > 0\} = \{x \in R^n ; f(x) > 0\}$, $f \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Ainda mais, *conjuntos semi-algébricos podem ser vistos como a união finita de sistemas de equações e inequações polinomiais.*

Exemplo. Há conjuntos semi-algébricos das mais variadas formas. Conforme a definição, eles podem variar desde curvas até o interior/exterior de bolas, semiplanos, etc. Em geral, a união finita, interseção finita, e complementar de conjuntos semi-algébricos continuam semi-algébricos. Este é o conteúdo da próxima proposição. A prova pode ser consultada em [6], p. 19.

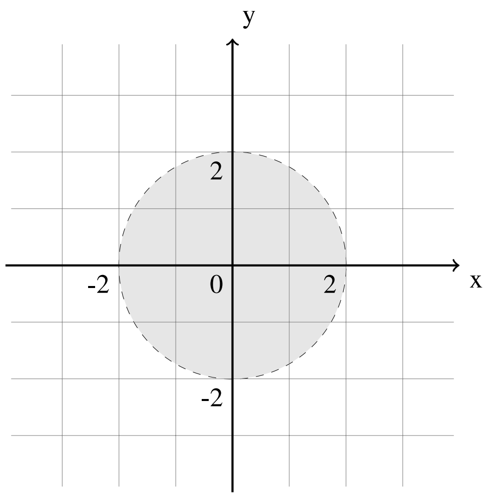

Figura 1: O conjunto semi-algébrico $4 - x^2 - y^2 > 0$.

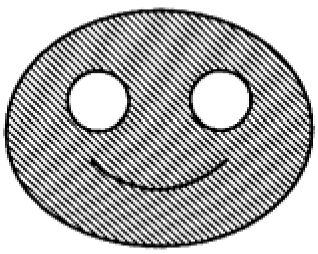

Figura 2: Rosto feliz (retirada de [2]).

O rosto feliz é descrito por $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2/25 + y^2/9 < 1, x^2 + 4x + y^2 - 2y > -4, x^2 - 4x + y^2 - 2y > -4, (x^2 + y^2 - 2y \neq 8$ ou $y > -1)\}$.

Proposição 2.1. *Seja ω a coleção dos subconjuntos semi-algébricos de R^n. Então ω é fechado pela união finita, interseção finita e complementar.*

Quando $n = 1$, temos o seguinte teorema, cuja prova pode ser consultada em [6], p. 25. Nós usamos o conceito de interlavo proveniente dos intervalos em $\mathbb{R}$: por exemplo, um intervalo aberto é definido como $a, b \in R$, $(a,b) = \{x \in R; a < x < b\}$.

Teorema 2.3 (Classificação de conjuntos semi-algébricos de uma dimensão.)**.** *Os conjuntos semi-algébricos de R são exatamente as uniões finitas de pontos e intervalos abertos (limitados ou ilimitados).*

Em particular, todo conjunto semi-algébrico limitado possui supremo e ínfimo. Recordemos que isto era verdade para todo subconjunto limitado de R, isto é, R é um corpo ordenado completo, e isto nos permitia fazer análise neste corpo. Note então que substituimos uma propriedade topológica por uma algébrica, mantendo essa propriedade dos supremos em conjuntos semi-algébricos limitados! Por isso, restringimos a nossa atenção para tais conjuntos, e vamos ver que podemos desenvolver uma teoria semelhante ao que tinhamos em análise real.

Agora, vamos à definição de funções semi-algébricas.

Definição 2. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, com $A \subset R^n$ e $B \subset R^m$ conjuntos semi-algébricos em seus respectivos espaços. Dizemos que f é* ***semi-algébrica*** *se o seu gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) \in R^{n+m} \ ; x \in A\}$ é um conjunto semi-algébrico de R^{n+m}.*

Em outras palavras, uma função é semi-algébrica quando conseguimos escrever seu gráfico como o conjunto solução de um ou mais sistemas de equações e inequações polinomiais.

Exemplo. Funções polinomiais são exemplos de funções semi-algébricas. De fato, seja $A = R^n$ e $B = R$. seja $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio. Então $G(f) = \{(x, f(x)) | x \in R^n\}$. Note que $F : R^{n+1} \longrightarrow R$ dada por $F(x, y) = y - f(x)$, $x \in R^n$ e $y \in R$, é um polinômio para o qual $F(x, y) = 0 \iff y - f(x) = 0 \iff y = f(x) \iff (x, y) \in G(f)$. Logo, $G(f) = \{F = 0\}$, que é um conjunto algébrico e em particular, semi-algébrico. Quando $n = 1$, temos que funções polinomiais, isto é, funções da forma $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in R$, são exemplos de funções semi-algébricas.

Exemplo. Seja $A = R^n$ e $B = R$. Dado um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, com $a_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$, temos que a função dada por $g(x) = \sqrt{f(x)}$ (lembre-se, $f(x)$ é um elemento não negativo de R e portanto possui raiz quadrada não negativa) também é semi-algébrica. De fato, basta tomar o polinômio $F(x, y) = y^2 - f(x)$, onde $x \in R^n$, $y \in R$. Temos então que $G(f) = \{F = 0\} \cap \{y \geq 0\}$, o qual é semi-algébrico.

A seguir, listamos algumas propriedades das funções semi-algébricas. O primeiro e mais importante é o que se segue, que diz respeito sobre projeções. Esta ferramenta nos permitirá sair de um espaço de uma dada dimensão (o gráfico, que aparece na definição) para espaços de outra dimensão (o domínio e contradomínio), e é usada na prova das proposições que se seguem.

Proposição 2.2. *Seja S um conjunto semi-algébrico de R^n e $\pi : R^{n+1} \longrightarrow R^n$ a projeção sobre as n primeiras coordenadas. Então $\pi(S)$ é um conjunto semi-algébrico de R^n.*

Observação. A projeção $\pi_s : R^{n+s} \longrightarrow R^n$ sobre n coordenadas também é uma aplicação semi-algébrica. Basta projetar coordenada a coordenada e usar s vezes o teorema acima.

Proposição 2.3. *Seja $A \subset R^n$ e $B \subset R^m$ conjuntos semi-algébricos.*

(i) A composição $g \circ f$ das aplicações semi-algébricas $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ é semi-algébrica ($C \subset R^k$ semi-algébrico).

(ii) O conjunto das funções semi-algébricas $f : A \longrightarrow R$, com as operações usuais de soma e multiplicação induzidas pelo corpo, forma um anel.

Proposição 2.4. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função semi-algébrica. Se $S \subset A$ é semi-algébrico, então a imagem $f(S)$ é semi-algébrica. Se $T \subset B$ é semi-algébrico, então a imagem inversa $f^{-1}(T)$ é semi-algébrica.*

Observação. A proposição acima nos diz que funções semi-algébricas preservam (pela imagem direta e inversa) a propriedade de um conjunto ser semi-algébrico. Esta é uma razão forte para estudarmos esta classe de funções, tendo em vista a já destacada importância dos conjuntos semi-algébricos em nosso contexto.

2.3 Topologia e conjuntos semi-algébricos

A partir daqui, munimos R da topologia da ordem. Isto é, denotando $(a, b) = \{x \in R | a < x < b\}$ onde $a, b \in R$ um intervalo aberto com extremidades a e b, a topologia em questão é gerada pela base dos intervalos abertos com extremidades em R. Abaixo, permitimos que a, b não esteja em R, desde que faça sentido.

Exemplo. Em $\mathbb{R}_{\text{alg}}$, tome os números algébricos 0 e 1. Então podemos formar o intervalo $(0, 1) = \{r \in \mathbb{R}_{\text{alg}}; 0 < r < 1\}$. Por outro lado, dados números reais transcendentes π e 2π, podemos formar um intervalo em $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ da seguinte forma: $(\pi, 2\pi) = \{x \in \mathbb{R}_{\text{alg}}; \pi < x < 2\pi\}$.

2.3.1 Conexidade

No caso $R = \mathbb{R}$, os conjuntos conexos são os intervalos. No caso de R ser um corpo real fechado qualquer, isto deixa de ser verdade. De fato, tome $R =$ conjunto dos números algébricos sobre $\mathbb{Q}$, então $(3, \pi) \cup (\pi, 4) = (3, 4)$, uma vez que π é transcedental. Contudo, temos a seguinte definição de conexidade, adaptada para conjuntos semi-algébricos:

Definição 3. *Um conjunto semi-algébrico $A \subset R^n$ é semi-algebricamente conexo se para todo par de conjuntos semi-algébricos e fechados em A, F_1, F_2, disjuntos e $F_1 \cup F_2 = A$, devemos ter $F_1 = A$ ou $F_2 = A$. Caso contrário, dado A semi-algébrico, se existem semi-algébricos fechados F_1, F_2 em A que são disjuntos e não vazios tais que $A = F_1 \cup F_2$, chamamos chamamos esta união de cisão de A.*

Com esta definição, temos a

Proposição 2.5. *Todo intervalo da forma $[a, b]$, com $a, b \in R$ é semi-algebricamente conexo.*

Para a prova da proposição acima, consulte [6], p. 41.

3 Teorema do Valor Intermediário e seus corolários

Esta seção é dedicada a provar o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas e semi-algébricas em corpos reais fechados. Também provamos alguns corolários que serão úteis na prova do

Teorema de Sharkovsky.

Teorema 3.1 (Teorema do Valor Intermediário, TVI). *Seja $f : I \longrightarrow R$ uma função contínua semi-algébrica, onde $I = [a, b]$. Então dado $r \in R$ para o qual $f(b) > r > f(a)$, existe $b > c > a$ tal que $f(c) = r$.*

Prova. De fato, como o conjunto das funções semi-algébricas é um anel (Proposição 2.3), temos que $f(x) - r$ também é semi-algébrica; logo, por definição, é semi-algébrico o gráfico $\{(x, f(x) - r) | x \in I\}$. O mesmo é verdade para a interseção dos conjuntos semi-algébricos $A_0 = \{(x, f(x) - r) | x \in I\} \cap I \times (-\infty, 0)$.

Deste modo, considerando a projeção $\pi_1 : R \times R \longrightarrow R$ dada por $\pi_1(x, y) = x$, temos que o conjunto $A = \pi_1(A_0) = \{x \in I\,; r > f(x)\}$ é semi-algébrico (Proposição 2.2). Além do mais, pela continuidade de f, A é aberto em I. Pela mesma razão, $B = \{x \in I\,; f(x) > r\}$ é semi-algébrico e aberto. Agora, note que $A, B \neq \emptyset$, pois $f(a) \in A$ e $f(b) \in B$. Além disso, $A \cap B = \emptyset$.

Deste modo, se não existisse um c tal como no enunciado então $A \cup B = [a, b]$, o que contradiz o fato de $[a, b]$ ser semi-algebricamente conexo (proposição 2.5).

Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = r$, e o teorema está provado.

□

Como aplicação, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Seja $f : I \longrightarrow R$ uma função semi-algébrica contínua com $I = [a, b]$ e L um intervalo fechado para o qual $f(L) \supset L$. Então f possui um ponto fixo em L.*

Prova. Seja $L = [c, d]$. Como $f(L) \supset L$, tome $r, s \in L$ de modo que $f(r) = c$ e $f(s) = d$. Considerando $g : L \longrightarrow R$ dada por $g(x) = f(x) - x$ e usando que $c \leq r, s \leq d$, obtemos as desigualdades $g(r) = c - r \leq 0$ e $g(s) = d - s \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c entre r e s (e portanto em L) para o qual $g(c) = 0$, isto é, $f(c) = c$ e f possui ponto fixo em L.

□

Algumas consequências do TVI são as principais ferramentas para a prova do teorema de Sharkovsky. Aqui, seguimos os passos de [4], p.596-697, para os lemas a seguir.

Lema 3.1. *Sejam J e L subintervalos fechados e semi-algébricos de I tais que $f(J) \supset L$. Então existe um intervalo fechado e semi-algébrico $K \subset J$ de modo que $f(K) = L$.*

Prova. Seja $L = [c, d]$ e tome $p, q \in J$ de modo que $f(p) = c$, $f(q) = d$. Suponha sem perdas que $q > p$. Agora, tome $A = f^{-1}(c) \cap [p, q]$. Este conjunto é limitado, fechado e semi-algébrico (por continuidade e pela proposição 2.4). Deste modo, é a união finita e disjunta de intervalos e pontos, ou seja, $A = (\bigcup_{i=1}^{r} \{p_i\}) \cup (\bigcup_{j=1}^{s} (a_j, b_j))$, onde $p_i, a_j, b_j \in I$, $p_i \notin (a_j, b_j)$ para todo j e $(a_j, b_j) \cap (a_l, b_l)$ para todo $l \neq j$ (teorema 2.3). É claro que pode aparecer intervalos da forma $[x, y]$; na nossa escrita acima, colocados as possíveis extremidades dos intervalos junto aos p_i. Note que os intervalos são limitados pois estão contidos em $[p, q]$.

Ordenando $p_r > \cdots > p_2 > p_1$, se $a_j \geq p_1$ para todo j então A possui o menor elemento p_1. Afirmo que isto sempre ocorre. De fato, ordenando $a_s > \cdots > a_2 > a_1$, se $p_1 > a_i$ para algum i então devemos ter, para n suficientemente grande, $x_n = a_1 + \dfrac{1}{n} \in (a_1, b_1)$ e vale $f(a_1 + \dfrac{1}{n}) = c$. Se $f(a_1) \neq c$, temos que por continuidade, dado $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{|f(a_1) - c|}{2} > \dfrac{1}{N}$ devemos ter para um certo $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{N} > |f(a_1) - f(a_1 + \dfrac{1}{n})| = |f(a_1) - c|$. Isto nos dá uma contradição. Logo, $f(a_1) = c$ e vale $a_1 \in A$. Como os intervalos são disjuntos, devemos ter $a_1 = p_i$ para algum i. Mais daí $a_1 = p_i \geq p_1$, o que implica $i = 1$ e $a_1 = p_1$. Então p_1 é o mínimo.

Analogamente, prova-se que A possui máximo; isto é, fica provado que faz sentido considerar máximos e mínimos em A. Tome então $u = \max\{p \leq x \leq q\, ; f(x) = c\}$ e $v = \min\{u \leq x \leq q\, ; f(x) = d\}$. Afirmo que $f([u, v]) = [c, d] = L$.

Ora, como $f(u) = c$ e $f(v) = d$, pelo teorema do valor intermediário vale $f([u, v]) \supset [c, d]$. Por outro lado, se acontecesse $[c, d] \not\supset f([u, v])$ então existiria $x \in [u, v]$ com $f(x) > d$ ou $f(x) < c$. Se $f(x) < c$ então por TVI existe $u' \in (x, v)$ tal que $f(u') = c$, $x > u$; mas isto contradiz a escolha de u, e daí $f(x) \geq c$. Agora, caso $f(x) > d$, mais uma vez por TVI existiria $v' \in (u, x)$ tal que $f(v') = d$, $v' < v$, e isto contradiz a escolha de v, e portanto $f(x) \leq v$.

Logo, $[c, d] \supset f([u, v])$, e fica provado que $f([u, v]) = [c, d]$.

□

Para o próximo teorema, introduzimos a noção de *ciclo*. Dada $f : I \longrightarrow I$ e $I_1, I_2 \ldots, I_n \subset I$ intervalos fechados, dizemos que $I_1, I_2 \ldots, I_n$ formam uma **cadeia** e denotamos por $I_1 I_2 \cdots I_n$ ou $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_n$ caso $f(I_i) \supset I_{i+1}$ para $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Quando isto ocorre, dizemos que a cadeia tem *tamanho* n. Caso $I_n = I_1$, chamamos a cadeia de **ciclo** *de tamanho* $n-1$.

Lema 3.2. *Seja $f : I \longrightarrow I$ uma função contínua e semi-algébrica. Se $J_0 J_1 J_2 \cdots J_{n-1} J_0$ é um ciclo de tamanho n então existe um ponto $y \in J_0$ para o qual $f^i(y) \in J_i$ para todo i e $f^n(y) = y$.*

Prova. Defina $J_0 = Q_n$. De $f(J_{n-1}) \supset J_0$, tiramos do teorema 3.1 que existe um intervalo fechado $Q_{n-1} \subset J_{n-1}$ de modo que $f(Q_{n-1}) = J_0 = Q_n$. Agora, defina indutivamente $Q_{n-i} \subset J_{n-i}$ como sendo um intervalo fechado de modo que $f(Q_{n-i}) = Q_{n-i+1}$.

Deste modo, $f(Q_0) = Q_1, f^2(Q_0) = f(Q_1) = Q_2$, e por indução $f^i(Q_0) = Q_i$. Em particular, $f^n(Q_0) = Q_n = J_0 \supset Q_0$, e pelo teorema 3.2 existe um ponto fixo de f^n em $Q_0 \subset J_0$. chamando-o de $y \in Q_0$ temos então $f^n(y) = y$ e pela definição dos Q_i, $f(y) \in Q_1 \subset J_1$, o que por indução implica $f^i(y) \in Q_i \subset J_i$. E isto prova o lema.

□

Seja f uma função contínua e $J_0 J_1 J_2 \cdots J_{n-1} J_0$ um ciclo de f. Dizemos que um ponto $p \in J_0$ *segue o ciclo* quando $f^i(p) \in J_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$ e $f^n(p) = p$.

O ciclo será dito *elementar* quando todo $y \in J_0$ que segue o ciclo e $f^n(y) = y$ tem período n. Veremos uma condição suficiente para que um ciclo seja elementar quando falarmos sobre o Teorema de Sharkovsky, na próxima seção.

4 O Teorema de Sharkovsky

Antes de começar, introduzimos algumas notações a fim de simplificar os nossos argumentos.

Seja X um conjunto e $f : X \longrightarrow X$ uma função qualquer. Dado $x \in X$, chamamos o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) | x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de *órbita* de x por f. Dizemos que x é um ponto periódico de f caso exista $n \in \mathbb{N}$ para o qual $f^n(x) = x$. Caso n for o menor natural com esta propriedade (o qual existe, pelo princípio da boa ordem), chamamos n de *período* de x (em relação a f). Quando $n = 1$, chamamos x de *ponto fixo* de f, isto é, quando acontece $f(x) = x$.

4.1 Caso $n = 3$

Começaremos provando o teorema de Sharkovsky para o caso mais, simples, $n = 3$, a fim de exibir que a sua prova para funções semi-algébricas em corpos reais fechados é a mesma que a sua prova usual em $\mathbb{R}$. Após isto, seguiremos para a prova do caso geral.

Teorema 4.1 (Sharkovsky)**.** *Seja $f : R \longrightarrow R$ uma função contínua e semi-algébrica. Se f possui um ponto periódico de período 3 então f possui pontos periódicos de qualquer período.*

Prova. Tome $a \in R$ um ponto periódico de período 3 de f e denote $b = f(a)$, $c = f^2(a)$. Vale então $f(a) = b$, $f(b) = c$ e $f(c) = a$. Temos dois casos: note que b, c também são pontos periódicos de período 3 e então trocando a notação, podemos supor sem perda de generalidade que $a < b < c$ ou $a < c < b$. De fato: sendo $\{a_1, a_2, a_3\}$ uma órbita de um ponto periódico de período 3, com $a_1 < a_2 < a_3$, vale $f(a_1) = a_2$ ou a_3. Supondo $f(a_1) = a_2$ temos que $f(a_2) = a_3$, o que implica $a_1 < f(a_1) < f^2(a_1)$. Caso contrário, $a_1 < f^2(a_1) < f(a_1)$. Pondo $a_1 = a$, o obtemos o que foi afirmado.

Primeiro, assuma que $a < b < c$ e tome os intervalos $I_0 = [a, b], I_1 = [b, c]$. Como $f(a) = b$ e $f(b) = c$, do Teorema do Valor Intermediário temos que dado $x \in I_1$, existe $y \in I_0$ para o qual $f(y) = x$. Isto é, $f(I_0) \supset I_1$. Da mesma forma, notando que $f(b) = c$ e $f(c) = f^3(a) = a$, temos que $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$. Note que em particular $f(I_1) \supset I_1$ e daí f tem um ponto fixo em I_1 pelo teorema 3.2. Além do mais, $f^2(a) = c$ e $f^2(b) = a$, e devemos ter $f^2(I_0) \supset I_0$. Isto é, f^2 tem um ponto fixo, o qual é ponto periódico de período 2 de f em I_0.

Agora, para $k \geq 4$, podemos formar o ciclo $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_0$, onde o intervalo I_1 aparece $k - 1$ vezes. Pelo teorema 3.2, existe $p \in [a, b]$ de modo que $f^i(p) \in I_1$ para $0 < i < k$ e $f^k(p) = p$. Afirmo que p tem período k com respeito a f. Primeiro, note que $p \neq b$, pois b tem período 3 e p, período $k \geq 4$. Agora, se $f^i(p) = p$ para $0 < i < k$, teríamos que $p \in I_1$ pela conclusão do lema 5; mas $p \in I_0$ e

$I_1 \cap I_0 = \{b\}$, onde já observamos que $b \neq p$.

Logo, tal i não existe e o menor inteiro positivo que fixa p por f é k. Isto é, seu período é k, tal como queríamos provar.

Agora, assuma que $a < c < b$ e defina $I_0 = [a, c]$, $I_1 = [c, b]$. Por TVI, note que $f(I_0) \supset [f(c), f(a)] = [a, b] = I_0 \cup I_1$ e que $f(I_1) \supset [a, c] = I_0$. Deste modo, similar ao que foi feito no caso anterior, temos que $f(I_0) \supset I_0$ e daí f possui um ponto fixo em I_0, e $f^2(I_1) \supset f(I_0) \supset I_0 \cup I_1 \supset I_1$, e f^2 possui um ponto fixo em I_1; isto é, f possui um ponto periódico de período 2.

Agora, para $k \geq 4$, forme o ciclo $I_1 \to I_0 \to I_0 \to \cdots \to I_0 \to I_1$, onde I_0 aparece $k-1$ vezes e daí existe um ponto periódico de período k em I_1, por uma prova análoga ao caso anterior.

Isto é, em todos os casos, encontramos pontos periódicos de qualquer período, e estamos feitos.

□

4.2 Caso geral

O caso geral do teorema de Sharkovsky requer mais argumentos que o caso anterior e para entendê-lo precisamos relembrar a ordem de Sharkovsky, definida a seguir.

Definição 4. *Considere a seguinte ordenação dos números naturais:*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots 2m+1 \succ \cdots \succ$$

$$2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \cdots 2 \cdot (2m+1) \succ \cdots \succ$$

$$\vdots$$

$$2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \cdots 2^n \cdot (2m+1) \succ \cdots \succ$$

$$\vdots$$

$$\cdots \succ 2^n \succ 2^{n-1} \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1;$$

isto é, dados $m = 2^a m_0$ e $n = 2^b n_0$ dois naturais distintos com $mdc(m_0, 2) = mdc(n_0, 2) = 1$, temos

$$m \succ n : \begin{cases} \text{quando } a < b, \\ \text{ou } a = b \text{ e } m_0 < n_0. \end{cases}$$

A esta ordem damos o nome de ***ordem de Sharkovsky.***

Finalmente, estamos preparados para enunciar e provar o caso geral do teorema de Sharkovsky. A prova a seguir segue as mesmas linhas de [1], adaptadas ao caso semi-algébrico.

Teorema 4.2. *Seja $f : R \longrightarrow R$ uma função contínua e semi-algébrica. Se f tem um ponto periódico de período m e $m \succ n$ então f possui um ponto periódico de período n.*

Note que 3 é o maior elemento de $\mathbb{N}$ segundo a ordem de Sharkovsky. Então o que foi provado na subseção anterior é um caso particular deste teorema mais geral.

Para provar o teorema acima, mostraremos que existem ciclos de intervalos de tamanho n com extremos na órbita do ponto periódico de período m para todo $m \succ n$. O Teorema 3.2 nos fornecerá um ponto y para o qual $f^n(y) = y$. Em seguida, mostraremos que n é o período de y. A construção destes ciclos a partir de um pré-existente justificará a ordem de Sharkovsky.

Para organizar as ideias, seja f uma função que satisfaz as hipóteses do teorema e seja x um ponto periódico de período m. Seja $\mathcal{O} = \{x_1, \dots, x_m\}$ a órbita do ponto p, onde nomeamos os elementos da órbita de modo crescente, isto é, de modo que $x_i > x_j$ sempre que $i > j$. Como prometido, exibiremos agora uma condição suficiente para garantir que um ciclo seja elementar.

Lema 4.1. *Seja f uma função contínua e $J_0 \to J_1 \to J_2 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ um ciclo com extremidades em $\mathcal{O}$ (isto é, $\partial J_i \subset \mathcal{O}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$). Então todo ponto periódico p que segue o ciclo tem período n quando $p \notin \mathcal{O}$ e $int(J_0) \cap J_i = \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.*

Prova. Como $p \notin \mathcal{O}$ devemos ter $p \in int(J_0)$. Como $int(J_0) \cap J_i = \emptyset$, não pode ocorrer $f^i(p) = p$ para $1 \leq i < n-1$ pois por um lado $p \in int(J_0)$ e por outro $f^i(p) \in J_i$. Pela definição de período, o período de p é n.

□

Como corolário, todo ciclo que cumpre as hipóteses do lema acima é elementar.

A seguir, provamos o teorema no caso particular em que m é ímpar. Antes disso, precisamos de algumas notações e definições. Dado $c \in R$, note que pela tricotomia, para qualquer $v \in R$ vale $v < c$, $v = c$ ou $v > c$. Em vista disso, definimos:

Definição 5. *Seja $c \in R$. Dizemos que um ponto $v \in R \backslash \{c\}$ está do lado esquerdo de c caso $v < c$, e que está do lado direito de c caso $c < v$. Dizemos que v* ***troca de lado*** *em relação a c quando $f(y)$ está no lado oposto de y, isto é, quando $v < c < f(v)$ ou $f(v) < c < v$.*

Para $c \in R$, note que se m é ímpar então algum ponto de $\mathcal{O}$ não troca de lado em relação a c. De fato, do contrário, sendo $\mathcal{O}_1 = \{x \in \mathcal{O} | x < c\}$ e $\mathcal{O}_2 = \{x \in \mathcal{O} | c < x\}$, então f mandaria bijetivamente $\mathcal{O}_1$ em $\mathcal{O}_2$, donde a quantidade de elementos de $\mathcal{O}$ seria igual a duas vezes a quantidade de elementos de $\mathcal{O}_1$, o que é um absurdo pois m é ímpar. Isto é, se todos os pontos de $\mathcal{O}$ trocam de lado então m é par.

Teorema 4.3. *Seja $f : R \longrightarrow R$ uma função contínua e semi-algébrica. Se f tem um ponto periódico de período m* ***ímpar*** *e $m \succ n$ então f possui um ponto periódico de período n.*

Prova. Seja $\mathcal{O} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ a órbita de p por f, onde $x_1 < \cdots < x_m$, e considere os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m-1$. Note que f age em $\mathcal{O}$ por permutação: De fato, $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Então está bem definida e é sobrejeção $f|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$. Como o domínio e o contradomínio possuem a mesma quantidade de elementos, $f|_{\mathcal{O}}$ é bijeção. Além do mais, $f(x_i) \neq x_i$ para $i = 1, \ldots, m$. Do contrário, tem-se $x_i = f(x_i)$, para algum $i = 1, 2, \ldots, m$. Deste modo, temos $f^{k+1}(p) = f^k(p)$, por indução. Em particular, $f^{m-1}(p) = f^m(p) = p$, absurdo: m é o período de p por f. Então $f(x_i) \neq x_i$ para todo i. Como x_m é o maior elemento de $\mathcal{O}$, segue da nossa observação anterior que $f(x_m) < x_m$, e pelo fato de ser bijeção segue que o conjunto $\{i \in \{1, \ldots m\} | f(x_i) > x_i\}$ é não-vazio. Tome x_k como sendo o maior elemento com k neste último conjunto. Note que $1 \leq k < n$ e ponha $I_1 = [x_k, x_{k+1}]$. Pela escolha de k, temos $x_k < f(x_k)$, $x_{k+1} > f(x_{k+1})$. Daí, como $x_{i+1} > x_i$ para todo $i = 1, \ldots, m-1$, $f(x_k) \geq x_{k+1} > x_k \geq f(x_{k+1})$. Por TVI, $f(I_1) \supset I_1$.

Seja $c \in int(I_1)$ o ponto fixo garantido pelo teorema 3.2. No que se segue, trocar de lado sempre será em relação a este ponto c. Ponha y_0, y_1 como sendo os x_k, x_{k+1} que satisfaz $f(y_1) \neq y_0$. Se isto for verdade para ambos os casos, simplesmente ponha $y_0 = x_k$ e $y_1 = x_{k+1}$. Definimos a sequência $(y_s)_s$ da seguinte forma: Suponha que y_s está definido. Seja L_s o intervalo fechado de extremos y_s e c. Caso todos os elementos de $\mathcal{O} \cap L_s$ trocarem de lado, defina y_{s+1} como sendo o elemento de $f(L_s) \cap \mathcal{O}$, mais distante de c. Isto é, olhamos para as imagens de $\mathcal{O} \cap L_s$ por f e vemos quais delas está mais distante de $c : y_{s+1} \in f(L_s) \cap \mathcal{O}$ é tal que $|y_{s+1} - c| \geq |f(x) - c|$ para todo $x \in \mathcal{O} \cap L_s$.

Para evitar perigo de confusão, denote x_k por α e x_{k+1} por β. Então $I_1 = [\alpha, \beta]$.

Utilizaremos estes y_s para formar os extremos dos intervalos dos ciclos. Antes disso, mostramos que a sequência acima é finita e que todos os termos são distintos entre si.

Tome a sequência $(y_s)_s$ definida como acima. Afirmo que os pontos de $\mathcal{O} \cap L_s$ sempre trocam de lado e estão do mesmo lado. De fato, que trocam de lado, segue da construção indutiva. Provamos por indução que estão todos no mesmo lado. Para $s = 0$, caso $y_0 = x_k$ temos $L_0 = [x_k, c]$, donde $L_0 \cap \mathcal{O} = \{x_k\}$. Pela escolha de x_k, temos que $x_k < f(x_k)$, donde $f(x_k) \geq x_k > c$. Isto é, todos os pontos em $L_0 \cap \mathcal{O}$ trocam de lado. Agora, suponha que y_s e y_{s+1} estão definidas e assuma a hipótese de indução. Deste modo, todos os pontos de $L_s \cap \mathcal{O}$ estão do mesmo lado e trocam de lado, pela hipótese de indução e juntamente pela construção indutiva dos y_s, donde $f(L_s) \cap \mathcal{O}$ estão do mesmo lado. Como y_{s+1} é o mais distante de c e está em $f(L_s) \cap \mathcal{O}$, temos que $L_{s+1} \cap \mathcal{O}$ estão do mesmo lado. E a afirmação está provada.

Deste modo, dados y_s, y_{s+1} consecutivos, verifica-se $y_s < c < y_{s+1}$ ou $y_{s+1} < c < y_s$. Isto é, estão em lados opostos. Em particular, os termos $y_0, y_2, \ldots, y_{2s}, \ldots$ e $y_1, y_3, \ldots, y_{2s-1}, \ldots$ estão em lados opostos. Segue que $y_i \neq y_j$ caso i e j tenham paridades distintas. Verificaremos agora que $y_i \neq y_j$ quando i e j possuem a mesma paridade.

Afirmo que y_{i+2} está mais longe de c do que y_i, isto é, que $|y_{i+2} - c| > |y_i - c|$. Em particular, como estão no mesmo lado, isto implica que $y_{i+2} < y_i < c$ ou $c < y_i < y_{i+2}$. A prova é como se segue: Para $i = 0$, como $y_2 = f(y_1) \neq y_0$ e y_2 troca de lado, então $y_2 < y_0 < c$, caso $y_0 = x_k$, ou $c < y_0 < y_2$ caso $y_0 = x_{k+1}$. Agora, suponha $i \geq 1$. Pela definição dos y_s, vale que $f(L_i) \cap \mathcal{O} \subset L_{i+1} \cap \mathcal{O}$. Daí, $f^2(L_i) \cap \mathcal{O} \subset L_{i+2} \cap \mathcal{O}$. Como f é bijeção em $\mathcal{O}$, f^2 também é (a composição de bijeções é uma bijeção). Então a inclusão acima nos diz que $L_{i+2} \cap \mathcal{O}$ tem pelo menos a quantidade de elementos de $L_i \cap \mathcal{O}$. Como estão do mesmo lado, isto quer dizer que $y_{i+2} \leq y_i < c$ ou $c < y_i \leq y_{i+2}$. Suponha, sem perda de generalidade, que vale a primeira desigualdade. Afirmo que $y_{i+2} < y_i$. Caso valesse a igualdade, então $y_i = y_{i+2}$ implicaria que $L_i = L_{i+2}$. Mas como $f(L_{i+1} \cap \mathcal{O}) \subset L_{s+2} \cap \mathcal{O}$, teríamos $f(L_{i+1} \cap \mathcal{O}) \subset L_s \cap \mathcal{O}$, donde $f((L_i \cap \mathcal{O}) \cup (L_{i+1} \cap \mathcal{O})) \subset (L_i \cap \mathcal{O}) \cup (L_{i+1} \cap \mathcal{O})$, e f determinaria uma bijeção nesta união. Mas esta união não pode ser o conjunto todo, pois nem todos os elementos de $\mathcal{O}$ trocam de lado (por construção, todos os elementos da união trocam de lado). Isto é um absurdo: f age em $\mathcal{O}$ por um único cíclo; se a bijeção acima existisse, então decomporíamos a ação de f em ciclos distintos nesta união, o que nos daria duas formas de escrever f em ciclos disjuntos. Como a decomposição de uma permutação em ciclos disjuntos é única, chegamos em um absurdo. Logo, $y_i \neq y_{i+2}$. E acabou.

Desta forma, todos os elementos da sequência são distintos e em cada subsequência dos pares e dos ímpares, ela é crescente ou decrescente. Em particular, como $\mathcal{O}$ é finito, a sequência deve terminar em um y_k, para $k < m$: de fato, começamos nossa sequência em zero, de sorte em $y_0, y_1, \ldots, y_s$ temos $s + 1$ termos da sequência. Em particular, por nossas observações, $k + 1 \leq m \implies k < m$.

Agora, formaremos uma classe intermediária de intervalos que servirá de apoio para a construção dos intervalos que vão compor o ciclo, todos com extremidades em $\{y_0, \ldots, y_k\} \subset \mathcal{O}$.

Para $i < k$, defina J_i como o menor intervalo que contém $I_i \cap \mathcal{O}$ e as extremidades de I_1. Ora, caso $y_i < c$, $J_i = [y_i, y_1]$ caso $y_0 < y_1$ ou $[y_i, y_0]$ caso $y_1 < y_0$. De maneira simétrica, caso $c < y_i$, $J_i = [y_0, y_i]$ caso $y_0 < y_1$ e $[y_1, y_i]$ caso $y_1 < y_0$. Para $i = k$, defina J_k como sendo o menor intervalo com extremos em $\mathcal{O}$ que contém $L_k \cap \mathcal{O}$. Nestas condições, vale o seguinte:

(1) $J_1 \to J_1$;

(2) $J_i \to J_{i+1}$;

(3) $J_k \to J_{k-1}$.

De fato, (1) é verdade pois $J_1 = [\alpha, \beta] = I_1$ e já provamos que $f(I_1) \supset I_1$. (2) É válido pela escolha dos y_i : Seja $z_i \in L_i \cap \mathcal{O}$ o ponto para o qual $f(z_i) = y_{i+1}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $y_0 < y_1$. Caso $i = 2s$, Então $z_{2s} < y_0 < y_1$ e daí $J_i = [y_{2s}, y_1] \supset [z_{2s}, y_1]$, onde $J_{i+1} = [y_0, y_{2s+1}] = [y_0, y_{i+1}]$. Por TVI, $f(J_i) \supset f([z_{2s}, y_1]) \supset [y_0, y_{i+1}] = J_{i+1}$, que é o que queríamos. O caso em que i é ímpar é lidado de maneira semelhante. (3) Também é verdade: Como a nossa construção parou em y_k, isto significa que algum ponto de $L_k \cap \mathcal{O}$ troca de lado (lembre-se que como m é ímpar, este ponto sempre existe: vide a observação que segue a definição 5). Seja z tal ponto. Além disso, como notado anteriormente, $L_{k-2} \cap \mathcal{O} \subset L_k \cap \mathcal{O}$. Então $z_{k-2} \in L_k \cap \mathcal{O}$. Desta forma, segue mais uma vez por TVI que $f(J_k) \supset J_{k-1}$ (pois os extremos e I_1 e y_{k-1} vão estar compreendidos entre $f(z)$ e $f(z_{k-2}) = y_{k-1}$).

Note que podemos fazer ciclos com estes intervalos, mas não garantiremos que os pontos periódicos obtidos terão a ordem que queremos. Por isso, refinamos nossos intervalos trocando os y_i por z_i.

Para $i < k$, seja I_i o menor intervalo com extremidades em $\mathcal{O}$ que contém z_i definido anteriormente e ambos y_0, y_1 (as extremidades de I_1; note que para $i = 1$, iste I_1 coincide com o I_1 já definido). Mais uma vez, supondo sem perda de generalidade que $y_i < c$ temos $I_i = [z_i, y_0]$ caso $y_1 < y_0$ e $I_i = [z_i, y_1]$ caso contrário. Para $i = k$, ponha I_k como sendo o menor intervalo com extremidades z e z_{k-2}. Pela escolha dos z_i e observando a prova de (1), (2) e (3), é imediato ver que $I_i \subset J_i$ e $I_1 \to J_1 \supset I_1$, $I_i \to J_{i+1} \supset I_{i+1}$ e $I_k \to J_{k-1} \supset I_{k-1}$. Além disso, como $J_{k-1} \to I_1$ (por construção!) e y_i está mais distante de c que y_{i-2}, temos as inclusões $J_{k-1} \supset J_{k-3} \supset \cdots$, donde

(4) $I_1 \to I_1$,

(5) $I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k \to I_1$, e

(6) $I_k \to I_{k-1}, I_{k-3} \ldots$

Com relação a estes intervalos, temos que $I_i \cap int(I_k)$ para todo $i < k$. Para que o argumento fique claro, suponha, sem perda de generalidade, que $y_0 < y_1$. Primeiro, note que z está no mesmo lado que y_{k-2}. Afirmo que está mais distante de c do que y_{k-2} está de c. Do contrário $z \in L_{k-2} \cap \mathcal{O}$ (de fato, se $k = 2s$ então $y_{k-2} < z < y_1 \implies z \in L_{k-2} \cap \mathcal{O}$ e caso $k = 2s-1$, $y_0 < z < y_{k-2} \implies z \in L_{k-2} \cap \mathcal{O}$) e então z trocaria de lado, o que não acontece. Suponha primeiro que $k = 2s$, isto é, que k é par. Disso temos que $z < y_{k-2} \leq z_{k-2} \leq y_0 < y_1$, donde o interior de $I_k = [z, z_{k-2}]$ é disjunto de $I_{k-2} = [z_{k-2}, y_1]$. Ainda temos $z < z_{k-2} \leq y_0 < y_1 \leq z_{k-1} \leq y_{k-1}$, donde $I_{k-1} \cap int(I_k) = \emptyset$. Finalmente, dado quaisquer $i < k$, temos que $I_i \subset J_i \subset J_{k-2}$ caso i seja par e $I_i \subset J_i \subset J_{k-1}$ caso i seja ímpar, donde ainda teremos $I_i \cap int(I_k) = \emptyset$. O caso em que k é ímpar é lidado de maneira semelhante.

Deste modo, conseguimos montar os ciclos

(7) $I_1 \to I_1$,

(8) $I_k \to I_1 \to I_1 \to \cdots \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_k$, onde I_1 aparece j vezes, e

(9) $I_k \to I_{k-(l-1)} \to I_{k-(l-2)} \to I_{k-1} \cdots \to I_k$, $l \leq k$ par.

Podemos aplicar o teorema 3.2 para obter pontos periódicos. Para verificar que o período tem o mesmo tamanho do ciclo, basta verificar que cada ciclo é elementar. Ora, este é o caso pelo lema 4.2 e pela observação que fizemos antes, nos segunintes casos:

- De (7), obtemos um ponto fixo pelo teorema 3.2 (o qual já temos!).
- De (8), obtemos pontos periódicos de período $j + k$, para $j > 2$: De fato, note que I_1 aparece pelo menos três vezes. O ciclo não produziria um ponto periódico de período $j + k$ caso este ponto

estivesse em $\mathcal{O}$. Para isso, seja $x \in I_k$ tal ponto periódico. Então teríamos $f(x) \in I_1, f^2(x) \in I_1$ e $f^3(x) \in I_1$. Mas como I_1 possui apenas dois pontos de $\mathcal{O}$, deveríamos ter $f(x) = f^2(x)$ ou $f(x) = f^3(x)$, donde $f(x) = x$ ou $f^2(x) = x$ (lembre-se que f é uma permutação em $\mathcal{O}$!), o que não pode acontecer. Logo, $x \notin \mathcal{O}$ e o ciclo gera um ponto periódico de período $j + k$.

- Ainda de (8), para $j = 1$ obtemos um ciclo de tamanho $k < m$, e portanto obtemos um ponto periódico de período k.
- O último caso de (8) é quando $j = 2$. Caso $k = m - 1$ (o caso maximal) obteríamos um ponto periódico de período m, o que não faz diferença pois já o temos. Para $k < m - 1$, obtemos pontos periódicos de período $k + 2$.
- De (9), obtemos pontos periódicos de período par para todo par menor que k.

Por fim, note que m é ímpar então $m \succ n$ quando $m < n$ ou $n < m$ e n é par. Como $k < m$, vemos que do argumento acima obtemos pontos periódicos de período n para qualquer $m \succ n$, o que encerra a prova deste caso.

□

Na prova acima, o único passo onde usamos que m é ímpar foi para garantir que pelo menos um ponto de $\mathcal{O}$ não troca de lado. Deste modo, acabamos de provar o teorema para o caso de f ter um ponto periódico de período m de modo que $\mathcal{O}$ não troca de lado. De fato: obtemos os pontos periódicos de período menor que m na ordem de Sharkovsky e alguns a mais, o que é suficiente para o teorema. Caso todos os pontos de $\mathcal{O}$ trocam de lado, então m é par.

Antes de ir para este caso, provamos um lema. Ainda usamos as notações da prova do teorema anterior: temos $f : R \longrightarrow R$ uma função contínua e semi-algébrica, p um ponto periódico de período m e $\mathcal{O}$ a órbita de p por f. Ainda temos aquele I_1 que definimos e $c \in I_1$ o ponto fixo; deste modo, usamos o conceito de trocar de lado em relação a c. Agora, seja $e = \min \mathcal{O}$ e $d = \max \mathcal{O}$. Defina $\mathcal{O}_e = L_e \cap \mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_d = L_d \cap \mathcal{O}$. Note que $\mathcal{O}_e \cup \mathcal{O}_d = \mathcal{O}$ e esta união é disjunta.

Lema 4.2. *Suponha que todos os pontos de $\mathcal{O}$ trocam de lado. Então f estabelece uma bijeção entre $\mathcal{O}_e$ e $\mathcal{O}_d$. Em particular, f^2 fixa ambos $\mathcal{O}_e$ e $\mathcal{O}_d$ e age como um ciclo neles. Dado $m/2 \succ k$ e um ciclo elementar de tamanho k com relação a f^2 onde os intervalos do ciclo tenham extremos em O_d então obtemos um ciclo elementar de tamanho $2k$ em relação a f, onde os intervalos têm extremidades em $\mathcal{O}$.*

Prova. Que é bijeção, basta notar que $f(\mathcal{O}_e) = \mathcal{O}_d$ e vice-versa. f^2 é ciclo em cada $\mathcal{O}_e$ e $\mathcal{O}_d$, pois f é ciclo em $\mathcal{O}$.

Seja agora $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{k-1} \to J_0$ (*) um ciclo elementar por f^2 onde cada J_i tem extremos em $\mathcal{O}_d$. Seja J_i' o menor intervalo de extremos em $\mathcal{O}$ que contém $f(J_i \cap \mathcal{O})$. Como os J_i têm extremos em $\mathcal{O}$, devemos ter $J_i' \supset f(J_i \cap \mathcal{O}) \implies f(J_i') \supset f^2(J_i) \supset J_{i+1}$. Além disso, pela escolha minimal de J_i', devemos ter $f(J_i) \supset J_i'$. Agora, como cada J_i está à direita de c, cada J_i' está à esquerda de c. Deste modo, obtemos um ciclo

$$J_0 \to J_0' \to J_1 \to J_1' \to \cdots \to J_{k-1} \to J_{k-1}' \to J_0. \text{ (**)}$$

Este ciclo é elementar. Ora, seja q um ponto que acompanha o ciclo acima. Temos $f^{2i}(q) \in J_i$ para cada $i = 0, \ldots, k$, donde f também acompanha o ciclo (*). Suponha por absurdo que o período de p por f seja menor que $2k$. Note que seu período tem que ser da forma $2v$, $v < k$, pois p está do lado esquerdo de c e $f^i(p)$ fica alternando entre o lado esquerdo e direito de c. Mas isto nos daria que q é um ponto periódico de período v de f^2, $v < k$, o que contradiz o fato de (*) ser elementar. Logo, o período de p é $2k$ e o ciclo (**) é elementar.

□

Por fim, vamos aos últimos casos. Provaremo-nos por indução (seguindo a ordem de Sharkovsky).

Teorema 4.4. *Caso $\mathcal{O}$ tenha m elementos então existe um ciclo elementar de tamanho l onde cada intervalo tem extremidades em $\mathcal{O}$ para cada l com $m \succ l$.*

Prova. Para $m = 1$ não há nada o que fazer, pois o conjunto dos naturais l com $1 \succ l$ é vazio.

Suponha que vale para todo m com $m' \succ m$. Caso m' seja ímpar, não há o que provar. Suponha então que m' é par, com $m' = 2^n q$ e q ímpar maior que 1. Se algum ponto de $\mathcal{O}$ não trocar de lado, não há o que provar. Caso troque, f^2 age como um ciclo em $\mathcal{O}_e$ e o período de p por f^2 é $2^{n-1}q$. Por hipótese de indução, existe um ciclo elementar de tamanho k com relação a f^2 com extremidades em $\mathcal{O}_e$ para cada k com $m'/2 = 2^{n-1}q \succ k$. Pelo lema 4.2, existe um ciclo elementar de tamanho $2k$ com extremidades em $\mathcal{O}$ com relação a f. Variando k com $m'/2 \succ k$, obtemos todos os ciclos de tamanho l com $m' \succ l$ e $l = 2k$, o que prova este caso.

□

Como cada ciclo elementar de tamanho l nos dá um ponto periódico de período l, o Teorema de Sharkovsky no caso semi-algébrico está provado nos casos acima.

Note que falta o caso $m = 2^n$. Vamos prová-lo por indução em n, conforme [3], p. 65. Para $n = 1$, não há o que fazer: a discussão de antes mostra que f possui um ponto fixo. Suponha agora que o Teorema de Sharkovsky vale para potências de 2 menores que 2^n, e tome f contínua e semi-algébrica que possui um ponto periódico p de período 2^n. Tome $k < n$ e considere $g = f^{2^{k-1}}$. Temos que $g^{2^{n-k+1}}(p) = f^{2^{n-k+1+k-1}}(p) = p$ e é fácil ver que 2^{n-k+1} é o período de p por g. Pela hipótese de indução, g possui pontos periódicos de período 2^i, $0 \leq i < n-k+1$. Em particular, possui um ponto periódico de período 2, q. Desta forma, $q = g^2(q) = f^{2^k}(q)$, e 2^k é o período de q por f. Como k foi tomado arbitrariamente, fica provado por indução este caso, e finalmente concluímos a prova do Teorema de Sharkovsky.

5 Contra-exemplos

O Teorema de Sharkovsky é o melhor que podemos obter, no geral. Isto é, dado $m \in \mathbb{N}$ e $m \succ n$, existe uma função semi-algébrica e contínua que possui um ponto periódico de período de período m, mas não possui ponto periódico de período n. Também estudaremos nesta seção a necessidade de uma função ser semi-algébrica no Teorema de Sharkovsky.

5.1 Teorema da Realização de Sharkovsky

Vale a recíproca do Teorema de Sharkovsky: dados naturais m, n com $m \succ n$, existe uma função contínua que possui um ponto periódico de período n mas que não possui período m. A seguir, exibimos tal função para o caso em que $m = 3$ e $n = 5$. O exemplo foi retirado de [3], p.66-67. Considere a seguinte função:

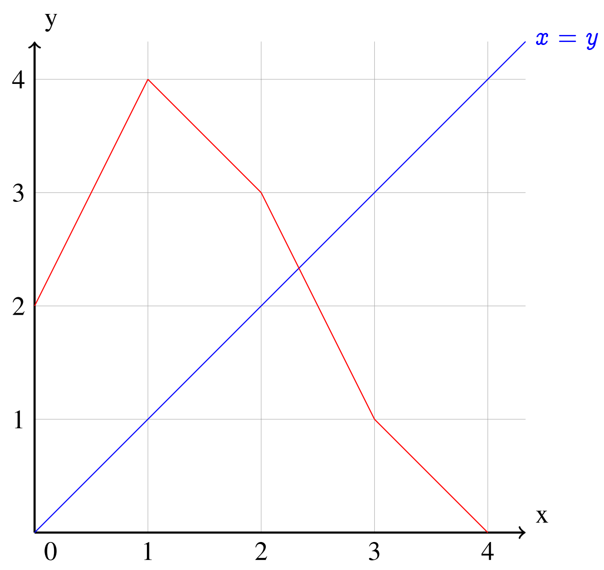

Figura 3: Gráfico de f.

Ela é claramente contínua e semi-algébrica, pois o é em cada intervalo $[i, i+1]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Note que $f(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $f(1) = 4$, $f(4) = 0$, o que mostra que 0 tem período 5. Procuremos por pontos periódicos de período 3. Note que isto equivale a procurar pontos fixos de f^3 que não são pontos fixos de f. Ora, note que $f^3([0,1]) = [1,4]$, $f^3([1,2]) = [2,4]$, $f^3([3,4]) = [0,3]$, e portanto não possui pontos fixos nestes intervalos. Contudo, $f^3([2,3]) = [0,4] \supset [2,3]$ e pelo teorema 3.2 f^3 possui pelo menos um ponto fixo em $[2,3]$. Afirmo que este ponto é único e portanto também é ponto fixo e f (note que o único ponto fixo de f está em $[2,3]$). Ora, note que $f : [2,3] \longrightarrow [1,3]$ é decrescente, assim como $f : [1,3] \longrightarrow [1,4]$ e $f : [1,4] \longrightarrow [0,4]$. Logo, a composição delas que nos dá $f^3 : [2,3] \longrightarrow [0,4]$

é decrescente. Em particular, o ponto fixo de f é único, e portanto tem que coincidir com o ponto fixo de f previamente conhecido.

5.2 Continuidade e semi-algébrico: Condições necessárias

Em $\mathbb{R}$, existem funções contínuas que não são semi-algébricas (funções transcedentais). Isto é, a versão do teorema que provamos, quando enunciada em $\mathbb{R}$, é mais fraca, ou melhor, pode ser melhorada. Contudo, não podemos esperar algo melhor que este teorema no caso geral: Isto é, há corpos reais fechados onde a condição da função ser semi-algébrica é fundamental: nem o teorema do ponto fixo é válido caso a retiremos. Isto acontece porque corpos reais fechados que não são isomorfos a $\mathbb{R}$ possuem "buracos" (isto é, não são completos). O exemplo abaixo nos mostra um caso onde isso ocorre (função contínua cumprindo as condições do teorema 3.2 menos a condição de ser semi-algébrica).

Seja $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ o conjunto dos números algébricos reais. Este corpo é real fechado, conforme comentado na seção de corpos reais fechados. Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_{\text{alg}}$, $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ é denso em $\mathbb{R}$. Além disso, como $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ é enumerável, conjunto dos números transcendentes, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{R}_{\text{alg}}$, é denso em $\mathbb{R}$ também. Por conveniência, dado $A \subset \mathbb{R}$, denotamos $A_{\text{alg}} = \{a \in A | a \text{ é algébrico}\}$.

Tome l um número transcendente qualquer, com $0 < l < 1$.

1. Pela densidade dos números algébricos, existe uma sequência crescente $(s_n)_n$ com $s_1 = -1$, s_n algébrico para $n \geq 2$, e $\lim s_n = l$.

2. Mais uma vez por densidade, existe uma sequência crescente de números algébricos $(t_n)_n$ tais que $t_1 > -1$ e $s_{n+1} < t_n < l$. Note que pelo teorema do confronto, $\lim t_n = l$.

De 1. e de 2., definimos uma função $f : [-1, l]_{\text{alg}} \longrightarrow [-1, l]_{\text{alg}}$ da seguinte forma: em cada $[s_n, s_{n+1}]_{\text{alg}}$, é o segmento de reta que liga (s_n, t_n) a (s_{n+1}, t_{n+1}). Mais explicitamente, temos que $f(x) = \dfrac{t_{n+1} - t_n}{s_{n+1} - s_n}(x - s_n) + t_n$ para $x \in [s_n, s_{n+1}]_{\text{alg}}$. A função está bem definida: em cada intervalo, a função é uma função afim, e para cada $x \in [-1, l]_{\text{alg}}$ existe um único $n \in \mathbb{N}$ para o qual $x \in [s_n, s_{n+1}]_{\text{alg}}$. Além do mais, é contínua: em cada $[s_n, s_{n+1}]_{\text{alg}}$ ela um polinômio, donde contínua, e os limites laterais em cada s_n coincidem.

Podemos extender f para $[-1, 2]_{\text{alg}}$ definindo-a em $[l, 2]_{\text{alg}}$ de maneira similar:

3. Por densidade, existe uma sequência decrescente de números algébricos $(s'_n)_n$ com $s'_1 = 2$, $\lim s'_n = l$.

4. Mais uma vez por densidade, existe uma sequência decrescente de números algébricos $(t'_n)_n$ tais que $t'_1 < 2$ e $t'_n < s'_{n+1}$. Note que pelo teorema do confronto, $\lim t'_n = l$.

Imitando a definição de antes, definimos $f(x) = \dfrac{t'_n - t'_{n+1}}{s'_n - s'_{n+1}}(x - s'_{n+1}) + t'_{n+1}$ para $x \in [s'_{n+1}, s'_n]_{\text{alg}}$. Ela está bem definida, pois dado $x \in [l, 2]_{\text{alg}}$ algébrico existe um único $n \in \mathbb{N}$ para o qual $x \in [s'_{n+1}, s'_n]_{\text{alg}}$

e em cada intervalo deste tipo ela é uma função afim com coeficientes em $\mathbb{R}_{\text{alg}}$. Como antes, f é contínua em $[l, 2]_{\text{alg}}$. Logo, é contínua em $[-1, 2]_{\text{alg}}$.

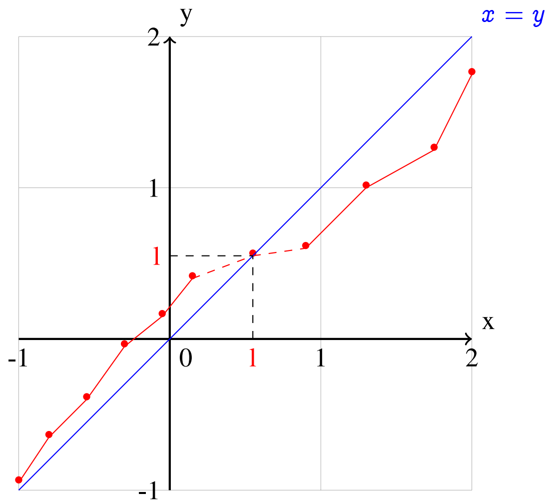

Figura 4: Gráfico de f.

Note que f não é semi-algébrica: como $\lim s_n = \lim t_n = l$ o qual é transcendente, precisaríamos de uma quantidade infinita de equações e inequações polinomiais (no nosso caso, equações lineares) para descrever seu gráfico.

Além disso, a função f também não possui ponto fixo. De fato, para $x < l$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_n < x < s_{n+1}$. Logo, $f(x) > t_n > s_{n+1} \geq x$, donde x não pode ser ponto fixo. Ademais, para $x > l$, existe um único $n \in \mathbb{N}$ para o qual $s'_{n+1} < x < s'_n$. Desta forma, $f(x) \leq t'_n < s'_{n+1} \leq x$. Logo, x não pode ser ponto fixo, o que encerra a exposição do exemplo.

Reforçando o que foi comentado no início da seção, definindo f em $\mathbb{R}$ da mesma forma que fizemos antes para os números algébricos, obtemos uma função f contínua que não é semi-algébrica (em $\mathbb{R}$) e que possui um (único) ponto fixo l, pois $f(l) = \lim\limits_{x \to l} f(x) = \lim f(s_n) = \lim t_n = l$. O que nos permitiu remover este ponto fixo no caso do corpo dos números algébricos, foi que eles formam um corpo real fechado mas que não é completo.

Podemos generalizar o que provamos acima: Dada uma função contínua $f : R \longrightarrow R$ que possui um ponto de período m, ela pode não ter um ponto fixo. Exibiremos uma construção para $m = 3$.

Tome $-1, 1, 2$ e considere uma função, afim por partes (e portanto contínua), tal que $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$. É claro que $-1, 1$ e 2 são pontos periódicos de período 3. Contudo, podemos construir f de modo que seu suposto ponto fixo seja transcendente: na parte tracejada, a função é afim por (infinitas) partes, e l é transcendental. Veja o gráfico na próxima página.

Agora, tome $m \geq 2$ e escolha os números $1, 2, \ldots, m$. Construa uma função afim por partes de modo que $f(k) = k + 1$, para $k \leq m - 1$ e $f(m) = 1$. Onde ela teria um ponto fixo, se ele for transcendente,

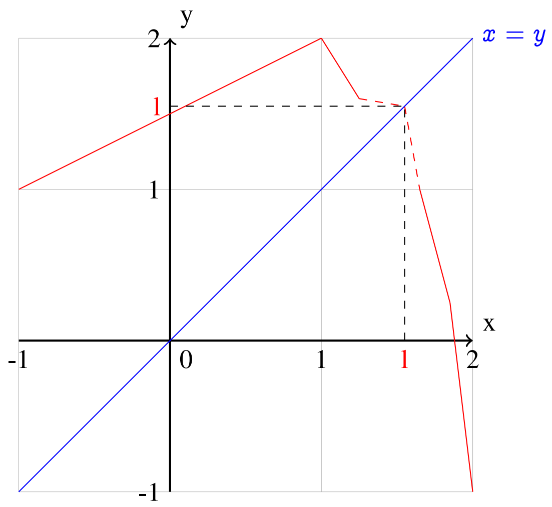

Figura 5: Função contínua em $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ de período 3 mas sem pontos fixos.

deixe como está. Caso for algébrico, tome um transcendente perto dele e faça a construção acima, de modo a obter este transcendente como ponto fixo.

Isto é, no caso geral, não podemos retirar a hipótese da função ser semi-algébrica. Uma vez que tiramos a completude da reta, devemos impor alguma condição sobre o corpo e a função a fim de ser válido o Teorema de Sharkovsky.

5.3 Completude de um corpo em termos de pontos fixos

Vamos mudar um pouco o nosso foco. Vimos que a condição de ser semi-algébrica é suficiente para valer o Teorema do Valor Intermediário, o teorema que garante pontos fixos, e consequentemente o teorema de Sharkovsky. Pergunta: existe um corpo real fechado que não seja isomorfo a $\mathbb{R}$ de modo que para toda função contínua $f : I \longrightarrow R$ vale o Teorema do Valor Intermediário? A resposta é não. Caso isto aconteça, temos necessariamente que $R = \mathbb{R}$, a menos de isomorfismos.

Antes, vamos lembrar a definição de um corpo ser completo. Seja F um corpo ordenado. Dizemos que $A \subset F$ é limitado superiormente quando existe $c \in F$ para o qual $a \leq c$ para todo $a \in A$. O elemento c é chamado de *cota superior de* A. Uma cota superior s é chamada de *supremo* do conjunto limitado superiormente A quando dada qualquer outra cota superior c de A ocorre $s \leq c$. Isto é, *o supremo é a menor das cotas inferiores.* Dizemos que o corpo ordenado F é completo quando todo subconjunto limitado superiormente possui supremo.

Voltamos à nossa questão.

Lema 5.1. *Seja R um corpo real fechado, ou apenas ordenado, que não é completo. Então existe uma função contínua $f : R \longrightarrow R$ para a qual não vale o Teorema do Valor Intermediário.*

Prova. Como o corpo ordenado não é completo, existe um subconjunto $A \subset R$ limitado superiormente mas que não possui supremo. Agora, defina $f : R \longrightarrow R$ definida por partes via a relação: $f(x) = 1$ caso x seja cota superior de A e $f(x) = -1$ caso contrário. Note que esta função não possui a propriedade do Valor Intermediário: de fato, qualquer valor entre -1 e 1 não é atingido, pois a imagem da função é composta de apenas dois elementos, 1 e -1.

Nos resta provar que f é contínua. Isto é, dado $a \in R$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que $x \in (a-\delta, a+\delta) \implies f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$. Tomando $\epsilon < 1$, vale $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) = \{f(a)\}$ e daí queremos $\delta > 0$ para o qual $x \in (a-\delta, a+\delta)$ implica $f(x) = f(a)$.

Primeiro, suponha que a não seja cota superior. Como A não possui supremo, existe $b > a$ para o qual b não é cota superior. Claramente, nenhum elemento de $(-\infty, b)$ é cota superior de A, donde $f((-\infty, b)) = f(a) = -1$. Em particular, tomando $\delta = \dfrac{b-a}{2}$, o resultado segue.

Agora, suponha que a seja cota superior. Mais uma vez, como A não possui supremo, existe $d < a$ que é cota superior, donde $f((d, \infty)) = 1$. Tomando $\delta = \dfrac{a-d}{2}$, o resultado segue novamente.

Concluindo, f é contínua mas não possui a propriedade do Valor Intermediário, tal como queríamos provar.

□

Em termos de contrapositiva, acabamos de provar que o Teorema do Valor Intermediário ser válido para toda função contínua implica que R é completo, o que nos dá um critério de completude para R.

Com este resultado, conseguimos outro critério de completude, em termos de pontos fixos.

Teorema 5.1. *Seja R um corpo real fechado (ou apenas ordenado). Caso toda função contínua $f : I \longrightarrow I$ possua ponto fixo, onde I um intervalo limitado e fechado com extremidades em R, então R é um corpo ordenado completo.*

Prova. Raciocinamos em termos de contrapositiva. Suponha que R não seja completo. Então existe $A \subset R$ limitado superiormente sem supremo. De maneira similar ao que fizemos antes, escolha $k_1, k_2 \in R$, $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$. Definimos $f : R \longrightarrow R$ pondo $f(x) = k_1$ caso x não seja cota superior de A e $f(x) = k_2$ caso contrário. Note que f é contínua (uma prova similar a de antes funciona para este caso). Tome $g : R \longrightarrow R$ dada por $g(x) = f(x) + x$, que é contínua pois é a soma de funções contínuas.

Afirmo que existe um intervalo limitado e fechado I com extremidades em R para o qual $g(I) \subset I$, para alguma escolha de k_1 e k_2. De fato, tome $c \in R$ que não é cota superior de A e $d \in R$ uma cota superior de A. Forme o intervalo $I = [c, d] = \{x \in R | c \leq x \leq d\}$. Agora, escolha $d_1 < d$ cota superior de A (que pode ser escolhida pois A não possui supremo) e $c < c_1$ que não é cota superior de A (mais uma vez, ele existe pois A não possui supremo) e ponha $k_1 = \dfrac{d-d_1}{2} > 0$ e $k_2 = \dfrac{c-c_1}{2} < 0$. Deste modo, dado $x \in [c, d]$ que não é cota superior, $f(x) = x + k_1 \geq c$ e $g(x) = x + k_1 < d \iff x < d - k_1 = \dfrac{d+d_1}{2}$, onde essa desigualdade vale pois x não é cota superior e $d_1 < \dfrac{d+d_1}{2}$ é cota superior. Similarmente, para

$x \in [c, d]$ cota superior de A, $g(x) \in [c, d]$.

Então faz sentido considerar $g : I \longrightarrow I$ (estamos fazendo um abuso de notação aqui). Deste modo, $g(x) = x \iff f(x) = 0$, onde a última igualdade não se verifica, pois a imagem de f é composta de dois elementos, $k_1, k_2 \neq 0$. Isto é, g não possui pontos fixos. E este é o exemplo que procurávamos.

□

Como um último comentário, recordamos que existe um único corpo ordenado e completo, a menos de isomorfismos, que é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Então acabamos de provar que, dado um corpo ordenado R para o qual toda função contínua $f : I \longrightarrow I$ possui ponto fixo, onde I é intervalo limitado e fechado com extremidades em R, devemos ter que R é completo, isto é, que R é isomorfo a $\mathbb{R}$.

6 Conclusão

Conforme ensejado, vimos que o teorema de Sharkovsky continua sendo válido para funções contínuas e semi-algébricas definidas em corpos reais fechados. Enfatizo que este resultado é inédito nestes corpos, com exceção de $\mathbb{R}$. Vimos também que, quando não estamos em $\mathbb{R}$, não podemos retirar a hipótese da função ser semi-algébrica, pois o teorema deixará de ser válido, e mais: pela última seção, só podemos esperar que o resultado seja válido para funções contínuas apenas no corpo real fechado $\mathbb{R}$.

7 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador da graduação Dr. Davi dos Santos Lima, que me auxiliou durante o processo de escrita deste trabalho. Agradeço também à bolsa PICME, que me auxiliou financeiramente durante o período da graduação e escrita do TCC que originou este artigo.

Referências

[1] Keith Burns and Boris Hasselblatt. The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *The American Mathematical Monthly*, 2011.

[2] Jacek Bochnak, Michel Coste and Marie-Françoise Roy. *Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag Heidelberg, 1998.

[3] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 2 edition, 1989.

[4] Bau-Sen Du. A simple proof of sharkovsky's theorem. *The American Mathematical Monthly*, 2004.

[5] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I*. W. H. Freeman and Company, 2 edition, 1985.

[6] Jônatas Marinho. O teorema de sharkovsky no caso semi-algébrico. *Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática - Bacharelado)*, 2022.