

# O Teorema de Hall e o Gap Lemma de Newhouse

**Talita Santos de Araújo**

talita.araujo@im.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, Brazil

## Resumo

Neste trabalho, apresentaremos um teorema provado inicialmente por Marshall Hall [1947], que permite-nos conectar certos problemas típicos de Teoria dos Números a problemas típicos de Sistemas Dinâmicos.

O Teorema de Hall nos diz que todo número real pode ser escrito como soma de um número inteiro mais dois números cuja expansão em frações contínuas não contém dígitos maiores que 4.

Aqui, daremos uma prova desse teorema utilizando o Gap Lemma de Newhouse, que apareceu pela primeira vez em um trabalho de S. Newhouse no contexto de dinâmica hiperbólica, e nos dá condições suficientes para que a interseção de dois conjuntos de Cantor seja não vazia. Relacionaremos esse resultado com a soma de conjuntos de Cantor.

Por fim, usaremos o Teorema de Hall para mostrar que o Espectro de Lagrange contém o intervalo  $[6, +\infty)$ .

## Palavras-chave

Frações contínuas, Conjuntos de Cantor Regulares, Teorema de Hall, Gap Lemma de Newhouse.

## 1 Introdução

Alguns conjuntos de Cantor têm a propriedade de que parte pequenas dele se parecem em um sentido explicado no texto, com o próprio conjunto. Essa aparente similaridade permite-nos obter muitas propriedades do mesmo. O conhecido Conjunto de Cantor Ternário,  $K$ , formado pelos números cuja expansão na base 3 possui apenas os dígitos 0 ou 2 é um exemplo disso. Em nosso trabalho, estudaremos o conjunto  $C(N)$ , formado pelos números reais cuja expansão em frações contínuas não possui quocientes parciais maiores que  $N$ . Este conjunto tem propriedades similares ao Conjunto de Cantor Ternário, por exemplo, ambos são conjuntos perfeitos e possuem medida nula. Em 1917, Hugo Steinhaus [6] mostrou  $K + K = [0, 2]$ , existiria um resultado similar para  $C(N) + C(N)$ ?

Ao estudarmos a soma  $C(N) + C(N)$  nem sempre obtemos um intervalo de comprimento maior que 1, por exemplo, para  $N = 3$  isto não é válido e para  $N = 2$  sequer é sabido se essa soma contém um intervalo. Para o caso  $N = 4$ , Marshall Hall provou, em 1947, que

$$C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

e, como esse intervalo tem comprimento maior que 1, qualquer número real pode ser escrito

como soma de um número inteiro e dois números em  $C(4)$ , isto é,

$$\mathbb{Z} + C(4) + C(4) = \mathbb{R}$$

A demonstração dada por Marshall Hall pode ser vista em [3].

Aqui, daremos uma prova para o Teorema de Hall usando o Gap Lemma de Newhouse, que nos dá condições suficientes para que a interseção entre dois conjuntos de Cantor, que chamaremos de regulares, seja não vazia, e com isso, encontraremos condições suficientes sob as quais a soma de dois conjuntos de Cantor é igual a soma de seus fechos convexos.

Iniciaremos apresentamos a expansão em frações contínuas de um número real, que será obtida pela iteração da Transformação de Gauss, e apresentaremos algumas propriedades desta expansão que serão úteis no decorrer do texto.

Na terceira seção, falaremos um pouco sobre conjuntos de Cantor regulares, mostrando alguns exemplos desse tipo de conjunto. Definiremos também conceitos importantes, como o de espessura e provaremos o Gap Lemma de Newhouse. Ainda nesta seção, vamos construir o conjunto  $C(N)$  e estudar algumas de suas propriedades.

Na quarta seção, voltaremos nossa atenção para o caso  $N = 4$ , provando algumas propriedades adicionais que nos farão concluir o Teorema de Hall, que será provado nesta mesma seção.

Por fim, traremos na quinta seção um breve comentário sobre o espectro de Lagrange. Nesta seção, vamos apresentar o espectro de Lagrange e, em seguida provar, como consequência do Teorema de Hall, que o espectro de Lagrange contém o intervalo  $[6, +\infty)$ .

## 2 Frações Contínuas

Iniciaremos nosso trabalho estudando um pouco sobre a expansão em frações contínuas de um número real. Esta expansão possui propriedades particularmente interessante, por exemplo, ela nos fornece boas aproximações de números reais por números racionais, além de caracterizar tais números (os racionais) por possuírem expansão finita. Um outro fato interessante é que os números com expansão periódica são exatamente as raízes de equações do segundo grau com coeficientes inteiros (a prova desta propriedade pode ser encontrada em [8]).

Aqui, estudaremos esta expansão dinamicamente, através da iteração da Transformação de Gauss, mas antes veremos sua definição recursiva.

Definimos a expansão em frações contínuas de um número real  $x$  através da seguinte sequência  $x = x_0$ ,  $a_n = \lfloor x_n \rfloor$  e se  $a_n \neq x_n$ , definimos  $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$  obtendo

$$x = x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

para simplificar nossa notação, escreveremos  $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$  como a expansão em frações contínuas de  $x$ , mostraremos mais tarde que esta expansão está bem definida. Chamamos os  $a_i$ 's da expansão de quocientes parciais.

Esta mesma expansão pode ser obtida através da iteração da *Transformação de Gauss*, que apresentaremos a seguir.

Defina  $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  por

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

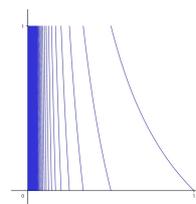


Figura 1: Gráfico de  $T(x)$

Então se  $x \in (0, 1)$  é tal que  $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ , temos

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, a_2 = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor, \dots, a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

e segue que

$$T(x) = [0; a_2, a_3, \dots], T^2(x) = [0; a_3, a_4, \dots], \dots, T^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$$

deste modo, obtemos a expansão em frações contínuas de qualquer  $x \in [0, 1)$  através da iteração de  $T(x)$ .

Para a expansão em frações contínuas de qualquer  $x \in \mathbb{R}$  basta fazermos, como antes,  $a_0 = \lfloor x \rfloor$ , obtendo

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + T(x)} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + T^2(x)}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + T^n(x)}}}}$$

Assim,  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + T^n(x)]$ .

**Exemplo 2.1.** Acharemos a expansão em frações contínuas de  $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  (a razão áurea). Seja

$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  temos,  $[x] = 1$ , assim,

$$x = 1 + \frac{1}{\left[ \frac{1}{x} \right] + T(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = 1 + \frac{1}{x}$$

consequentemente, a expansão será dada por

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

Observe que  $x$  é um ponto fixo para a Transformação de Gauss, isto é,  $T(x) = x$ , uma vez que suas iterações "apagam" os dígitos da expansão em frações contínuas.

**Exemplo 2.2.** Construiremos um ponto de período 2 para a Transformação de Gauss, isto é, um ponto  $x$  tal que  $T^2(x) = x$ . Basta tomarmos o número  $x \in [0, 1)$  cuja representação em fração contínuas é dada por  $x = [0; \overline{1, 2}]$ . Temos então

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + x}} \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1$$

Ou seja,  $x = \sqrt{3} - 1$  satisfaz a propriedade desejada.

Se  $x \in (0, 1]$  possui expansão finita, ou seja,  $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ , temos  $T^n(x) = 0$  de modo que  $x \in \mathbb{Q}$ . Usando o algoritmo da divisão podemos mostrar que também vale a recíproca. Segue que,  $x$  é irracional se e, somente se  $T^n(x) \neq 0$  para todo  $n \geq 1$ . Neste caso, denotaremos  $x = [0; a_1, a_2, \dots]$ .

**Definição 2.1.** Seja  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  um número real. Definimos, para cada  $n \geq 0$ ,  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  e os chamamos de convergentes de ordem  $n$  da fração contínua de  $x$ .

Estudaremos os convergentes com a seguinte construção recursiva:  $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ , daí,  $p_0 = a_0$  e  $q_0 = 1$ . Agora,

$$[a_0; a_1] = a_0 + [0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

e temos  $p_1 = a_1 a_0 + 1$  e  $q_1 = a_1$ . Continuando,

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + [0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2 a_1 a_0 + a_0 + a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

de modo que  $p_2 = a_2(a_1a_0 + 1) + a_0$  e  $q_2 = a_2a_1 + 1$ .

Indutivamente,  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ , onde

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ e } q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \tag{1}$$

Algumas vezes, é conveniente considerar os convergentes de ordem  $-1$ , definindo  $p_{-1} := 1$  e  $q_{-1} := 0$ .

As relações acima são uma consequência da seguinte proposição:

**Proposição 2.1.** *Seja  $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n]$ ,  $x_n \geq 1$ , então, para todo  $n \geq 1$ ,  $x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$ .*

*Demonstração.* Provaremos a proposição por indução sobre  $n$ . Para  $n = 1$ , temos

$$[a_0; x_1] = a_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 a_0 + 1}{x_1} = \frac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}}$$

Para  $n = 2$ ,

$$[a_0; a_1, x_2] = [a_0; a_1 + \frac{1}{x_2}]$$

e usando o caso anterior,

$$[a_0; a_1 + \frac{1}{x_2}] = \frac{(a_1 + \frac{1}{x_2})a_0 + 1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \frac{x_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{x_2 a_1 + 1} = \frac{x_2 p_1 + p_0}{x_2 q_1 + q_0}$$

Suponhamos agora que

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n] = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

então  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}]$ . Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}] &= \frac{(a_n + \frac{1}{x_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{x_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}} \end{aligned}$$

E a proposição está provada. □

**Corolário 2.1.1.** *Para todo  $n \geq 1$ ,  $x = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$ .*

*Demonstração.* Como

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)]$$

Temos  $x_n = a_n + T^n(x)$ , usando isso, segue da proposição anterior que

$$x = \frac{(a_n + T^n(x))p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + T^n(x))q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$$

E temos o requerido. □

As duas proposições a seguir nos dão propriedades úteis satisfeitas pelos convergentes, mas não serão demonstradas aqui, o leitor interessado pode consultá-las em [8].

**Proposição 2.2.** Para todo  $n \geq 0$  temos  $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$ . Em particular,  $p_n$  e  $q_n$  são primos entre si.

**Proposição 2.3.** Temos, para todo  $n \geq 0$ ,  $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ .

A próxima proposição nos fala sobre a diferença entre frações contínuas e será de particular importância em contas posteriores.

**Proposição 2.4.** Sejam  $[a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_1]$  e  $[a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_2]$  duas expansões em frações contínuas que coincidem nos  $n$  primeiros quocientes parciais, então

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_1] - [a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_2] = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(-1)^n}{(\mu_2q_n + q_{n-1})(\mu_1q_n + q_{n-1})}$$

A prova dessa proposição é obtida escrevendo as frações como na proposição 2.1 e calculando sua diferença com o auxílio da proposição 2.2.

O corolário abaixo também será importante em resultados posteriores. Ele nos permite ordenar os números observando sua expansão em frações contínuas.

**Corolário 2.4.1.** Sejam  $x_1 = [a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_1]$  e  $x_2 = [a_0; a_1, \dots, a_n, \mu_2]$  onde  $\mu_1 < \mu_2$ . Então se  $n$  é par  $x_1 > x_2$ , se  $n$  é ímpar  $x_1 < x_2$ .

O seguinte resultado mostra que a sequência formada pelos convergentes da expansão em frações contínuas de um número real  $x$  converge de fato para  $x$ .

**Proposição 2.5.** Seja  $x \in \mathbb{R}$  e  $\frac{p_n}{q_n}$  a sequência dos convergentes da sua expansão em frações contínuas, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$ .

*Demonstração.* Basta calcularmos

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{q_n(x_{n+1}p_n + p_{n-1}) - p_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^n}{q_n^2(x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned}$$

Daí,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2 \left( x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)}$$

Como  $a_{n+1} < x_{n+1} + \frac{q_{n-1}}{q_n} < a_{n+1} + 2$  temos

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Por outro lado, de  $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ , segue que,

$$q_0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_n < \dots$$

ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ , de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

□

Ao analisarmos a representação decimal de número real conseguimos facilmente localizá-lo na reta, dividindo-a em intervalos convenientes e analisando cada um dos dígitos desse número.

Veremos agora como fazer essa mesma análise usando sua expansão em frações contínuas e a Transformação de Gauss.

Escrevamos  $(0, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  onde,  $I_k = \left[ \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right)$ , então os extremos de cada  $I_k$  são exatamente os pontos de descontinuidade de  $T(x)$ , quando desconsideramos a origem.

Teremos então que

$$x \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1 = k$$

$$T(x) \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = a_2 = k$$

De modo geral, temos

$$T^n(x) \in I_k \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1}{T^n(x)} \right\rfloor = a_{n+1} = k$$

Assim, para localizarmos os números, basta estudarmos os iterados da Transformação de Gauss. Esta análise é particularmente útil para o estudo das expansões infinitas.

### 3 Conjuntos de Cantor Regulares

Nesta seção, estudaremos os conjuntos de Cantor regulares voltando nossa atenção para alguns exemplos interessantes desses conjuntos.

Iniciamos com o Conjunto de Cantor Ternário  $K$ , obtido ao restringirmos os dígitos da expansão na base 3 de um número  $x \in [0, 1]$  ao conjunto  $\{0, 2\}$ .

Para sua construção, tomamos o intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . A primeira etapa da construção consiste em remover os números cujo primeiro dígito na base 3 é 1, após esta remoção restam os intervalos  $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $I_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ .

Na segunda etapa removemos os números cujo segundo dígito da expansão é 1, restando os intervalos  $I_{00} = \left[0, \frac{1}{9}\right]$ ,  $I_{02} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ ,  $I_{20} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$  e  $I_{22} = \left[\frac{1}{8}, 1\right]$ .

Na  $n$ -ésima etapa removemos os números cujo  $n$ -ésimo dígito da expansão na base 3 é 1.  $K$  é o conjunto obtido ao repetirmos esse processo indefinidamente.

Agora, veremos uma construção dinâmica para  $K$ . Para isso, consideramos a aplicação  $\Psi : \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$ , definida por

$$\Psi(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 3x - 2, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

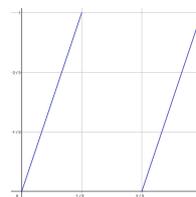


Figura 2: Gráfico de  $\Psi(x)$

Observe que o domínio de  $\Psi$  é a primeira etapa da construção de  $K$ , isto é,  $I_0 \cup I_2$ .

Agora, seja  $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  cuja expansão na base 3 é  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$  temos

$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{3^k} = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$  ou seja,  $\Psi$  "apaga" o primeiro dígito da expansão.

Como  $\Psi \circ \Psi = \Psi^2$  não está definida para  $x \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ , o conjunto onde  $\Psi$  e  $\Psi^2$  estão bem definidas corresponde aos  $x \in [0, 1]$  que não possuem o primeiro ou segundo dígito de sua expansão na base 3 iguais a 1, isto é,  $I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ .

Seguindo este argumento, o conjunto dos pontos onde  $\Psi^k$  está bem definida,  $1 \leq k \leq n$  corresponde a  $n$ -ésima etapa da construção de  $K$ , de modo que,  $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Psi^{-n}(I_0 \cup I_2)$ .

Esta segunda forma de obter  $K$  explica a definição de conjunto de Cantor regular ou conjunto de Cantor dinamicamente definido.

Observe que o comportamento de  $\Psi$  sob iteração quando observado na base 3 é similar ao comportamento de  $T$  quando observamos a expansão em frações contínuas, ambas apagam um dígito da expansão. Mais especificamente,  $\Psi$  e  $T$  se comportam como um shift, de fato, elas são conjugadas a shifts adequados. Este tipo de representação simbólica auxilia no estudo dos conjuntos de Cantor como os que veremos abaixo. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [4].

**Definição 3.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Dizemos que  $f$  é expansora se existe  $\lambda$  tal que  $|f'(x)| \geq \lambda > 1$  para todo  $x \in X$ .*

Agora, daremos a definição de conjunto de Cantor regular.

**Definição 3.2.** *Sejam  $I_1, \dots, I_n$  intervalos compactos disjuntos,  $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$  e  $\text{conv}(I)$  o fecho convexo de  $I$ . Seja  $f : I \rightarrow \text{conv}(I)$  um mapa expensor de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , tal que  $f(I_k)$  é o fecho convexo de uma união de intervalos  $I_j$ , para  $1 \leq k, j \leq n$ , e além disso, para cada  $1 \leq k \leq n$  existe  $m \geq 1$  tal que  $f^m(I_k) \supset I$ , então dizemos que  $K_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I)$  é um Conjunto de Cantor Regular (ou Dinamicamente Definido). Se  $m = 1$  para qualquer  $k$ , dizemos que  $K_f$  é um Conjunto de Cantor Regular do Tipo Bernoulli. Chamamos  $\mathcal{R} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  uma Partição de Markov e  $I$  um Domínio de Markov associados a  $K_f$ .*

Observe que  $K$ , o conjunto de Cantor Ternário, é do tipo Bernoulli. Veremos um exemplo de conjunto de Cantor regular que não possui esta propriedade.

**Exemplo 3.1.** Seja  $f(x)$  uma função  $f : \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right] \rightarrow [0, 1]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in \left[0, \frac{1}{5}\right] \\ 3x - \frac{6}{5}, & x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \\ -3x + \frac{17}{5}, & x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right] \end{cases}$$

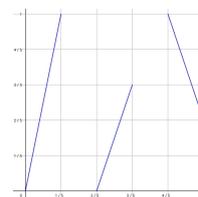


Figura 3: Gráfico de  $\Psi(x)$

então  $|f'(x)| > 1$ , logo,  $f$  é expensora. Fazendo  $I_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right]$ ,  $I_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ ,  $I_3 = \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ , seja  $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ , temos

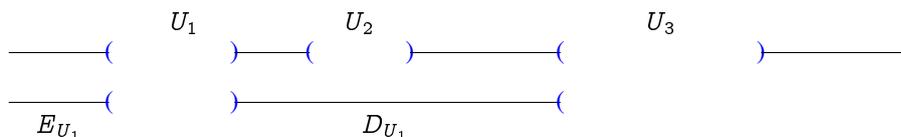
$$\begin{aligned} f(I_1) &\supset \text{conv}(I) \\ f(I_2) &= \text{conv}(I_1 \cup I_2) \Rightarrow f^2(I_2) \supset \text{conv}(I) \\ f(I_3) &= \text{conv}(I_2 \cup I_3) \Rightarrow f^2(I_3) \supset \text{conv}(I) \end{aligned}$$

Segue que  $K_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(I)$  é um conjunto de Cantor regular que não é do tipo Bernoulli.

### 3.1 O Gap Lemma de Newhouse

Agora, estamos interessados em estudar a soma de conjuntos de Cantor, mais precisamente, derivaremos condições sob as quais a soma de tais conjuntos se reduz a soma de seus fechos convexos. Iniciaremos com algumas definições.

**Definição 3.3.** *Seja  $U$  um gap de um Conjunto de Cantor  $K$ , isto é, uma componente conexa de seu complementar, e  $u \in \partial U$ , chamamos de ponte entre  $K$  e  $u$  ao intervalo maximal que contém  $u$  em sua fronteira e separa  $U$  de um gap maior mais próximo a ele. Para cada gap teremos duas pontes, uma à esquerda  $E_U$  e outra à direita  $D_U$ , como ilustrado abaixo.*



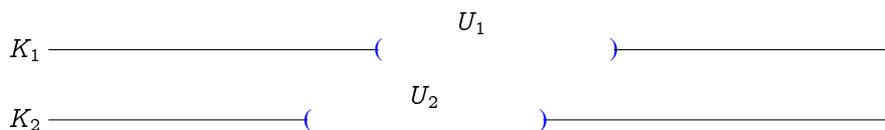
**Definição 3.4.** *Seja  $U$  um gap limitado de um Conjunto de Cantor  $K$ , definimos  $\tau_D(U) = \frac{|D_U|}{|U|}$  e  $\tau_E(U) = \frac{|E_U|}{|U|}$ . Chamamos  $\tau_D(K) = \inf\{\tau_D(U); U \text{ é gap limitado de } K\}$  a espessura direita de  $K$ , similarmente,  $\tau_E(K) = \inf\{\tau_E(U); U \text{ é gap limitado de } K\}$  é a espessura esquerda de  $K$ .  $\tau(K) = \min\{\tau_D(K), \tau_E(K)\}$  é a espessura de  $K$ .*

Agora estamos prontos para enunciar o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.1** (Gap Lemma). *Sejam  $K_1, K_2$  conjuntos de Cantor. Se  $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$ , então ou  $K_1$  está contido num gap de  $K_2$  ou  $K_2$  está contido num gap de  $K_1$  ou  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $K_1$  não está contido num gap de  $K_2$  e que  $K_2$  não está contido num gap de  $K_1$ , mostraremos que  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ .

Como nenhum deles está contido num gap do outro, existe um par de gaps  $(U_1, U_2)$ , com  $U_1 \in K_1$  e  $U_2 \in K_2$  se intersectando, podemos supor, sem perda de generalidade a configuração abaixo.



Como  $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2)$ , temos

$$\frac{|E_{U_1}|}{|U_1|} \cdot \frac{|D_{U_2}|}{|U_2|} > 1 \Rightarrow |E_{U_1}| > |U_2| \text{ ou } |D_{U_2}| > |U_1|$$

então  $E_{U_1} \cap \partial U_2 \neq \emptyset$  ou  $D_{U_2} \cap \partial U_1 \neq \emptyset$ .

Suponhamos, sem perda de generalidade, o primeiro caso. Seja  $u \in E_{U_1} \cap \partial U_2$ , se  $u \in K_1$ , temos  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , uma vez que  $\partial U_2 \subset K_2$ . Se  $u \notin K_1$ , então existe um novo gap  $U_1^1$  tal que  $u \in U_1^1$ , neste caso repetimos a construção para  $(U_1^1, U_2)$ .

Fazendo isso sucessivas vezes construímos uma sequência de gaps  $(U_1^n, U_2^m)$  convergindo para um ponto de acumulação de  $K_1 \cap K_2$ , como este ponto está na fronteira de uma sequência de gaps, ele deverá pertencer a ambos os conjuntos de Cantor logo,  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ . □

O Gap Lemma de Newhouse nos dá condições sob as quais a interseção entre dois conjuntos de Cantor é não vazia.

Buscaremos relacionar o fato de a interseção entre dois conjuntos de Cantor ser não vazia e sua soma. Faremos isto na proposição abaixo, que é um corolário do Gap Lemma.

**Proposição 3.1.** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  conjuntos de Cantor tais que  $\tau(K_1)\tau(K_2) > 1$  e  $I_1, I_2$  os fechos convexos de  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente. Suponhamos que,  $I_1$  tem comprimento maior que qualquer gap de  $K_2$  e que  $I_2$  tem comprimento maior que qualquer gap de  $K_1$ , então  $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$ .*

*Demonstração.* Consideramos os Conjuntos de Cantor  $K_1$  e  $K_2$ , cujos fechos convexos correspondem a  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente.

Tome  $k \in I_1 + I_2$ , então  $k - K_1$  ainda é um conjunto de Cantor e sua espessura é preservada, uma vez que comprimentos de intervalos são invariantes por translação e esta propriedade seguirá para seu ínfimo.

Como  $\tau(K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$ , temos  $\tau(k - K_1) \cdot \tau(K_2) > 1$ . Além disso, os gaps de  $K_1$  e  $k - K_1$  possuem o mesmo comprimento, segue que  $k - K_1$  não está contido em qualquer gap de  $K_2$ , e  $K_2$  não está contido em qualquer gap de  $k - K_1$ .

Usando o Gap Lemma, temos  $(k - K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$ , daí  $k \in K_1 \cap K_2$ . Como  $k$  é arbitrário em  $I_1 + I_2$ , temos  $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$ . □

### 3.2 A Construção de $C(N)$

Finalizamos esta seção com a construção combinatorial de  $C(N)$ . Antes disso, daremos sua definição.

Definimos o conjunto  $C(N)$ , onde  $N \geq 2$  é um número inteiro por

$$C(N) = \{x = [0; a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}; 1 \leq a_i \leq N \forall i \geq 1\}$$

Para sua construção, primeiro acharemos o maior e menor elemento neste conjunto, isto é, o maior e menor elemento cuja expansão em frações contínuas não contém dígitos maiores que  $N$ .

Pelo lema 2.4.1, o maior elemento será

$$\max(C(N)) = [0; 1, N, 1, N, \dots] = [0; \overline{1, N}]$$

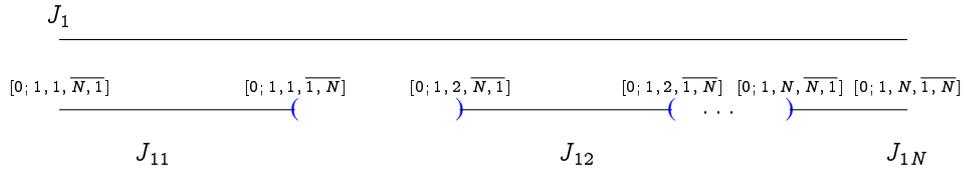
e o menor elemento

$$\min(C(N)) = [0; N, 1, N, 1, \dots] = [0; \overline{N, 1}]$$

Na primeira etapa da construção, removemos de  $J = [[0; \overline{N, 1}], [0; \overline{1, N}]]$  os números cujo segundo dígito da expansão é maior que  $N$ . Restarão então os intervalos

$$\begin{array}{cccccc} [0; N, \overline{1, N}] & [0; N, \overline{N, 1}] & [0; 2, \overline{1, N}] & [0; 2, \overline{N, 1}] & [0; 1, \overline{1, N}] & [0; 1, \overline{N, 1}] \\ \hline & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{J_N} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{J_2} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{J_1} & \end{array}$$

que formam a primeira etapa. Na segunda, removemos os números cujo terceiro dígito da expansão é maior que  $N$ . Para visualizarmos estes intervalos, a imagem abaixo ilustra os intervalos remanescentes em  $J_1$  após esta etapa.



De modo geral, os intervalos remanescentes da  $n$ -ésima etapa são da forma

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{N}, 1], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1}, \overline{N}]]$$

se  $n$  é par, ou da forma

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1}, \overline{N}], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{N}, 1]]$$

se  $n$  é ímpar, onde  $1 \leq a_i \leq N, i = 1, 2, \dots, n$ .

$C(N)$  é o conjunto de pontos obtidos ao repetimos as remoções indefinidamente.

Agora, vamos construir  $C(N)$  dinamicamente definido, a partir da Transformação de Gauss, a aplicação  $\Phi : J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_N \rightarrow [[0; \overline{N}, 1], [0; \overline{1}, \overline{N}]]$ ,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x \in J_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{x} - N, & x \in J_N \end{cases}$$

Seja  $\Phi_k(x)$  a restrição de  $\Phi$  ao intervalo  $J_k$ . Temos que  $\Phi_k(x)$  é expansora, de fato,  $|\Phi'_k(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| \geq \frac{1}{[0; \overline{1}, \overline{N}]^2} > 1$ . E, para cada  $1 \leq k \leq N, \Phi_k(J_k) = \Phi_k([0; k, \overline{1}, 4], [0; k, \overline{4}, 1]) = [0; \overline{1}, 4], [0; \overline{4}, 1]$ .

Observamos que o domínio de  $\Phi$  corresponde aos intervalos da primeira etapa da construção de  $C(N)$ .

De modo similar, o conjuntos dos pontos para os quais  $\Phi(x), \Phi^2(x)$  estão bem definidas corresponde aos intervalos da segunda etapa da construção de  $C(N)$ . Continuando este argumentos, concluimos que  $C(N)$  é o conjunto dos pontos para os quais  $\Phi^n(x)$  está bem definida para todo  $n \geq 1$ .

Segue que  $C(N) = \bigcap_{n \geq 0} \Phi^{-n}(J_1 \cup \dots \cup J_N)$  é um conjunto de Cantor regular.

$C(N)$  possui propriedades interessantes que seguem da sua construção e o leitor pode verificar facilmente. A primeira delas é que em  $C(N), T$  é topologicamente conjugado ao shift em  $N$  símbolos. Além disso,  $C(N)$  é um conjunto perfeito e possui medida nula. Esta última propriedade nos diz que  $C(N)$  é um conjunto pequeno, porém, como  $N \geq 2$ , a conjugação com o shift nos diz que  $C(N)$  é não enumerável.

### 4 O Teorema de Hall

Na seção anterior citamos algumas propriedades de  $C(N)$  que seguem da sua construção, agora veremos uma propriedade menos geral.

A soma  $C(N) + C(N)$  é particularmente interessante no caso  $N = 4$ , pois Marshall Hall provou que  $C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$ , e por consequência temos,  $\mathbb{Z} + C(4) + C(4) = \mathbb{R}$ . O mesmo não vale para o caso  $N = 3$  (como pode ser visto em [1]). Isso nos diz que, neste aspecto, o Teorema de Hall é o melhor que podemos obter, e torna  $N = 4$  um caso especial. Vamos focar em  $C(4)$  a partir de agora.

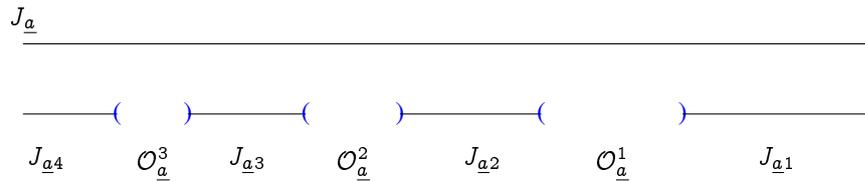
#### 4.1 O Conjunto $C(4)$

Iniciaremos visualizando geometricamente uma etapa qualquer da construção de  $C(4)$ . Fixaremos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  com  $1 \leq a_i \leq 4, i = 1, 2, \dots, n$ , de modo que  $J_{a_1 a_2 \dots a_n}$  é um intervalo da  $n$ -ésima etapa da construção.

Se  $n$  é par

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{4, 1}], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1, 4}]]$$

e a próxima etapa da construção terá a forma



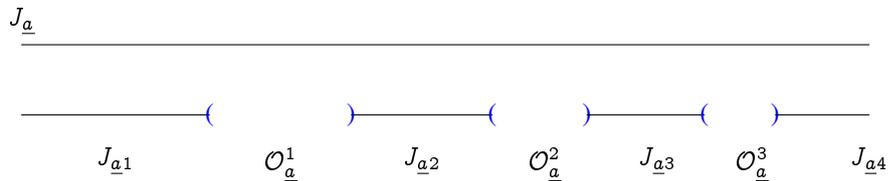
Onde

$$\begin{array}{ll}
 J_{\underline{a}1} = [[0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 1, \overline{4, 1}]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^1 = ([0; \underline{a}, 2, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}]) \\
 J_{\underline{a}2} = [[0; \underline{a}, 2, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 2, \overline{4, 1}]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 = ([0; \underline{a}, 3, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 2, \overline{1, 4}]) \\
 J_{\underline{a}3} = [[0; \underline{a}, 3, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 3, \overline{4, 1}]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 = ([0; \underline{a}, 4, \overline{4, 1}], [0; \underline{a}, 3, \overline{1, 4}]) \\
 J_{\underline{a}4} = [[0; \underline{a}, 4, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 4, \overline{4, 1}]] &
 \end{array}$$

se  $n$  é ímpar

$$J_{a_1 a_2 \dots a_n} = [[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{1, 4}], [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{4, 1}]]$$

e a próxima etapa da construção terá a forma



Onde

$$\begin{aligned}
 J_{\underline{a}1} &= [[0; \underline{a}, 1, \overline{4}, 1], [0; \underline{a}, 1, \overline{1}, 4]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^1 &= [[0; \underline{a}, 1, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 2, \overline{4}, 1]] \\
 J_{\underline{a}2} &= [[0; \underline{a}, 2, \overline{4}, 1], [0; \underline{a}, 2, \overline{1}, 4]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 &= [[0; \underline{a}, 2, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 3, \overline{4}, 1]] \\
 J_{\underline{a}3} &= [[0; \underline{a}, 3, \overline{4}, 1], [0; \underline{a}, 3, \overline{1}, 4]] & \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 &= [[0; \underline{a}, 3, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 4, \overline{4}, 1]] \\
 J_{\underline{a}4} &= [[0; \underline{a}, 4, \overline{4}, 1], [0; \underline{a}, 4, \overline{1}, 4]]
 \end{aligned}$$

A próxima proposição nos permitirá ordenar os gaps numa determinada etapa da construção. Observe que este resultado independe da paridade da etapa.

**Proposição 4.1.** *Os intervalos removidos satisfazem  $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| < |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|$ .*

*Demonstração.* Primeiro, calcularemos o comprimento de cada um desses intervalos. Façamos

$$\mu = [\overline{1}, 4] = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}, \text{ e então podemos escrever}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_{\underline{a}}^1 &= [[0; \underline{a}, 2, 4\mu], [0; \underline{a}, 1, \mu]] = [[0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{\mu}]] \\
 \mathcal{O}_{\underline{a}}^2 &= [[0; \underline{a}, 3, 4\mu], [0; \underline{a}, 2, \mu]] = [[0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{\mu}]] \\
 \mathcal{O}_{\underline{a}}^3 &= [[0; \underline{a}, 4, 4\mu], [0; \underline{a}, 3, \mu]] = [[0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{4\mu}], [0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{\mu}]]
 \end{aligned}$$

Os comprimentos destes intervalos são dados por

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| &= \frac{1 + \frac{1}{\mu} - 2 - \frac{1}{4\mu}}{((2 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(1 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 |\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| &= \frac{2 + \frac{1}{\mu} - 3 - \frac{1}{4\mu}}{((3 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(2 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\
 |\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| &= \frac{3 + \frac{1}{\mu} - 4 - \frac{1}{4\mu}}{((4 + \frac{1}{4\mu})q_n + q_{n-1})(3 + \frac{1}{\mu})q_n + q_{n-1}} = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}
 \end{aligned}$$

Como todos possuem o mesmo numerador, a desigualdade entre os denominadores nos dá o resultado requerido.  $\square$

Temos uma relação entre os tamanhos dos gaps. Nossa próxima proposição nos dá uma relação entre os tamanhos dos intervalos remanescentes em cada etapa. Sua demonstração é similar à dada na proposição anterior e será deixada para o leitor.

**Proposição 4.2.** *Os intervalos remanescentes em cada etapa satisfazem  $|J_{\underline{a}4}| < |J_{\underline{a}3}| < |J_{\underline{a}2}| < |J_{\underline{a}1}|$ .*

Agora, apresentaremos um resultado que relaciona o tamanho dos gaps com o tamanho dos intervalos remanescentes em cada etapa. As contas utilizadas em sua demonstração serão importantes no cálculo da espessura de  $C(4)$ , que faremos mais tarde.

**Proposição 4.3.** *Os intervalos satisfazem  $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| < |J_{\underline{a}i}|$ ,  $i = 1, 2$ ,  $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^2| < |J_{\underline{a}i}|$ ,  $i = 2, 3$  e  $|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3| < |J_{\underline{a}i}|$ ,  $i = 3, 4$ .*

*Demonstração.* Suponhamos, sem perda de generalidade  $n$  par. Tomando  $\mu = [\overline{1}, 4] = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ , nos será conveniente observar que  $\frac{1}{\mu} = 4\mu - 1 = 2\sqrt{2} - 2$  e  $\frac{1}{4\mu} = \mu - 1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ . podemos escrever

$$\begin{aligned} J_{\underline{a}4} &= [[0; \underline{a}, 4, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 4, \overline{4}, 1]] = [[0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 4 + \frac{1}{4\mu}]] \\ J_{\underline{a}3} &= [[0; \underline{a}, 3, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 3, \overline{4}, 1]] = [[0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 3 + \frac{1}{4\mu}]] \\ J_{\underline{a}2} &= [[0; \underline{a}, 2, \overline{1}, 4], [0; \underline{a}, 2, \overline{4}, 1]] = [[0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 2 + \frac{1}{4\mu}]] \end{aligned}$$

e temos

$$\begin{aligned} |J_{\underline{a}4}| &= \frac{4 + \frac{1}{4\mu} - 4 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ |J_{\underline{a}3}| &= \frac{3 + \frac{1}{4\mu} - 3 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ |J_{\underline{a}2}| &= \frac{2 + \frac{1}{4\mu} - 2 - \frac{1}{\mu}}{q_n^2(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} = \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned}$$

Abaixo, acharemos o valor mínimo de  $\frac{|J_{\underline{a}4}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3|}$ ,  $\frac{|J_{\underline{a}3}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^2|}$  e  $\frac{|J_{\underline{a}2}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|}$

$$\begin{aligned} \frac{|J_{\underline{a}4}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^3|} &= \frac{\frac{-3}{4\mu}(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{(\frac{3-3\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3\sqrt{2}-5}{2})(2 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned} \tag{2}$$

e como  $0 \leq \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$ , podemos olhar essa expressão como uma função em  $x$  e encontrar seu mínimo em  $[0, 1]$  que será alcançado em 0, dado por

$$f(0) = \frac{(\frac{3-3\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} + 1)}{(\frac{3\sqrt{2}-5}{2})(2 + 2\sqrt{2})} \geq 1,300\dots > 1$$

$$\begin{aligned} \frac{|J_{\underline{a}3}|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^2|} &= \frac{\frac{-3}{4\mu}(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3}{4\mu} - 1)(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \frac{(\frac{3-3\sqrt{2}}{2})(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{(\frac{3\sqrt{2}-5}{2})(1 + 2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \end{aligned} \tag{3}$$

cujo valor mínimo em  $[0, 1)$  que será alcançado em 0, dado por

$$\frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right)2\sqrt{2}}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right)(1+2\sqrt{2})} \geq 1,212\dots > 1$$

$$\frac{|J_{a2}|}{|\mathcal{O}_{a1}^1|} = \frac{\frac{-3}{4\mu}\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\frac{3}{4\mu} - 1\right)\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right)(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \tag{4}$$

que terá seu valor mínimo em  $[0, 1)$  alcançado em 0, dado por

$$\frac{\left(\frac{3-3\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} - 1)}{\left(\frac{3\sqrt{2}-5}{2}\right)2\sqrt{2}} \geq 1,060\dots > 1$$

Com as contas acima e as desigualdades entre os intervalos remanescentes, temos

$$\begin{aligned} |J_{a3}| &> |J_{a4}| > |\mathcal{O}_{a3}^3| \\ |J_{a2}| &> |J_{a3}| > |\mathcal{O}_{a2}^2| \\ |J_{a1}| &> |J_{a2}| > |\mathcal{O}_{a1}^1| \end{aligned}$$

como queríamos. □

#### 4.2 O Teorema de Hall

Finalmente, chegamos ao nosso resultado principal.

**Teorema 4.1** (Teorema de Hall). *Qualquer número real pode ser escrito na forma  $a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots]$ , onde  $1 \leq b_j, c_j \leq 4$  e  $a \in \mathbb{Z}$ . Em outras palavras  $\mathbb{R} = \mathbb{Z} + C(4) + C(4)$ .*

Para provar o Teorema de Hall mostraremos que  $C(4)$  tem espessura maior que 1. Iniciaremos identificando as pontes de cada gap.

Fixada uma etapa  $n$ , com  $n$  ímpar, o comprimento do maior gap da  $(n + 1)$ -ésima etapa é dado por

$$|\mathcal{O}_{a1}^1| = \frac{1 + \frac{1}{\mu} - 2 - \frac{1}{4\mu}}{\left(2 + \frac{1}{4\mu}\right)q_{n+1} + q_n}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)q_{n+1} + q_n = \frac{\frac{3}{4\mu} - 1}{q_{n+1}^2\left(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}}\right)}$$

Sabemos que  $q_{n+1} = iq_n + q_{n-1}$ , assim,  $\frac{q_{n+1}}{q_n} = i + \frac{q_{n-1}}{q_n}$ . Lembramos ainda que  $\frac{q_{n-1}}{q_n} \in [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ , pela construção das etapas, cada um destes elementos estão entre 1 e 4, como  $n$  é ímpar, o maior valor possível para  $\frac{q_{n-1}}{q_n}$  será alcançado quando

$$[0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = [0; 1, 4, \dots, 1, 4, 1] > [0; \overline{1}, 4]$$

e o menor valor para  $\frac{q_{n-1}}{q_n}$

$$[0; a_{n+1}, a_n, \dots, a_1] \leq [0; 4, 1]$$

assim, o menor valor para  $\frac{q_{n+1}}{q_n}$  será alcançado em  $i + [0; 4, 1]$ .

Com estas informações acharemos as pontes da etapa fixada. Inicialmente, devemos encontrar os gaps maiores mais próximos

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}}^1|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &> 1,44 \cdot 1,051 \cdot 1,061 = 1,605 \\ \frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(2 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{5+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &> 4,840 \cdot 0,731 \cdot 0,696 = 2,462 \\ \frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{7+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &> 10,240 \cdot 0,561 \cdot 0,518 = 2,975 \\ \frac{|\mathcal{O}_{\underline{a}4}^4|}{|\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1|} &= \frac{q_{n+1}^2(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{q_n^2(4 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})(3 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &= \left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)^2 \cdot \frac{(\frac{3+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(\frac{7+\sqrt{2}}{2} + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \cdot \frac{(2\sqrt{2} - 1 + \frac{q_n}{q_{n+1}})}{(2\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \\ &> 17,64 \cdot 0,561 \cdot 0,518 = 5,126 \end{aligned}$$

Concluimos então que o maior gap à direita mais próximo de  $\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1$  é  $\mathcal{O}_{\underline{a}}^1$ . Para o gap maior à esquerda, o qual denotaremos por  $U_e$ , temos  $U_e \neq \mathcal{O}_{\underline{a}1}^2, \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3$ , pelos resultados obtidos na proposição 4.1, fazendo  $\underline{a}' = a_1 \dots a_{n-1}$ , então se  $a_n = 1$ , o próximo gap será  $\mathcal{O}_{\underline{a}'}^1$ , e pelas contas acima,

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}'}^1| > |\mathcal{O}_{\underline{a}'1}^1| = |\mathcal{O}_{\underline{a}}^1| > |\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1|$$

e obtemos  $E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1} = J_{\underline{a}12} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^2 \cup J_{\underline{a}13} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3 \cup J_{\underline{a}14}$  é a ponte à esquerda, e  $D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^1} = J_{\underline{a}11}$  é a ponte à direita. Além disso,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^2} &= J_{\underline{a}13} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}1}^3 \cup J_{\underline{a}14} & E_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^3} &= J_{\underline{a}14} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^2} &= J_{\underline{a}12} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}1}^3} &= J_{\underline{a}13} \end{aligned}$$

Os demais valores de  $a_n$  nos dão conclusões similares.

Para  $\mathcal{O}_{\underline{a}2}$ , temos que  $\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2$  é o gap maior à direita mais próximo e  $\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1$  o gap maior à esquerda mais próximo, segue que

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1} &= J_{\underline{a}22} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^2 \cup J_{\underline{a}23} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^3 \cup J_{\underline{a}24} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2} &= J_{\underline{a}22} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^1} &= J_{\underline{a}21} & E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^3} &= J_{\underline{a}24} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^2} &= J_{\underline{a}23} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^3 \cup J_{\underline{a}24} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}2}^3} &= J_{\underline{a}23} \end{aligned}$$

Para  $\mathcal{O}_{\underline{a}3}$  o gap maior à esquerda mais próximo é  $\mathcal{O}_{\underline{a}3}^2$ , enquanto à direita é  $\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3$ , e temos

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1} &= J_{\underline{a}32} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^2 \cup J_{\underline{a}33} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^3 \cup J_{\underline{a}34} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^2} &= J_{\underline{a}32} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^1} &= J_{\underline{a}31} & E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3} &= J_{\underline{a}34} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^2} &= J_{\underline{a}33} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^3 \cup J_{\underline{a}34} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}3}^3} &= J_{\underline{a}33} \end{aligned}$$

Finalmente, para  $\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1$ , o gap maior à esquerda mais próximo é  $\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3$ , para o gap à direita, fazemos, novamente,  $\underline{a}' = a_1 \dots a_{n-1}$ , e, se  $a_n = 4$ ,

$$|\mathcal{O}_{\underline{a}'3}| > |\mathcal{O}_{\underline{a}'4}^3| = |\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3| > |\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1|$$

daí,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1} &= J_{\underline{a}42} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^2 \cup J_{\underline{a}43} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^3 \cup J_{\underline{a}44} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^2} &= J_{\underline{a}42} \\ D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^1} &= J_{\underline{a}41} & E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3} &= J_{\underline{a}44} \\ E_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^2} &= J_{\underline{a}43} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}4}^3 \cup J_{\underline{a}44} & D_{\mathcal{O}_{\underline{a}4}^3} &= J_{\underline{a}43} \end{aligned}$$

**Proposição 4.4.**  $C(4)$  tem espessura maior que 1, ou seja,  $\tau(C(4)) > 1$ .

*Demonstração.* Seja  $n$  um número natural ímpar fixado e  $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$

$$J_{\underline{a}1} = [[0; \underline{a}, 1, \overline{1, 4}], [0; \underline{a}, 1, \overline{4, 1}]] = [[0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{\mu}], [0; \underline{a}, 1 + \frac{1}{4\mu}]]$$

e temos

$$\begin{aligned} |J_{\underline{a}1}| &= \frac{\frac{-3}{4\mu}}{q_n^2(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})(1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})} \\ |J_{\underline{a}2} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^2 \cup J_{\underline{a}23} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2}^3 \cup J_{\underline{a}24}| &= \frac{\frac{-3}{4\mu} - 2}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})(2 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})} \\ |J_{\underline{a}3} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}3}^3 \cup J_{\underline{a}34}| &= \frac{\frac{-3}{4\mu} - 1}{q_n^2(4 + \frac{1}{\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})(3 + \frac{1}{4\mu} + \frac{q_n-1}{q_n})} \end{aligned}$$

usando isto podemos calcular as espessuras. Minimizando os quocientes entre as pontes e os gaps, obtemos

$$\frac{|J_{a1}|}{|\mathcal{O}_{a1}^1|} \geq 2, 999... \tag{5}$$

$$\frac{|J_{a2} \cup \mathcal{O}_{a2}^2 \cup J_{a3} \cup \mathcal{O}_{a3}^3 \cup J_{a4}|}{|\mathcal{O}_{a1}^1|} \geq 2, 621... \tag{6}$$

$$\frac{|J_{a2}|}{|\mathcal{O}_{a2}^2|} \geq 2, 384... \tag{7}$$

$$\frac{|J_{a3} \cup \mathcal{O}_{a3}^3 \cup J_{a4}|}{|\mathcal{O}_{a2}^2|} \geq 2, 508... \tag{8}$$

$$\frac{|J_{a3}|}{|\mathcal{O}_{a3}^3|} \geq 2, 152... \tag{9}$$

Pelas equações 5 e 6, as espessuras de  $\mathcal{O}_{ai}^1$  são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_E(\mathcal{O}_{ai}^1) &= \frac{|J_{ai2} \cup \mathcal{O}_{ai}^2 \cup J_{ai3} \cup \mathcal{O}_{ai}^3 \cup J_{ai4}|}{|\mathcal{O}_{ai}^1|} \geq 2, 621... \\ \tau_D(\mathcal{O}_{ai}^1) &= \frac{|J_{ai}|}{|\mathcal{O}_{ai}^1|} \geq 2, 999... \end{aligned}$$

Assim,  $\tau(\mathcal{O}_{ai}^1) \geq 2, 621...$

Usando as equações 7 e 8, as espessuras de  $\mathcal{O}_{ai}^2$  serão dadas por

$$\begin{aligned} \tau_E(\mathcal{O}_{ai}^2) &= \frac{|J_{ai3} \cup \mathcal{O}_{ai}^3 \cup J_{ai4}|}{|\mathcal{O}_{ai}^2|} \geq 2, 508... \\ \tau_D(\mathcal{O}_{ai}^2) &= \frac{|J_{ai2}|}{|\mathcal{O}_{ai}^2|} \geq 2, 384... \end{aligned}$$

E temos  $\tau(\mathcal{O}_{ai}^2) \geq 2, 384...$

Por fim, usando as equações 2 e 9, as espessuras de  $\mathcal{O}_{ai}^3$  são dadas por

$$\begin{aligned} \tau_E(\mathcal{O}_{ai}^3) &= \frac{|J_{ai4}|}{|\mathcal{O}_{ai}^3|} \geq 1, 300... \\ \tau_D(\mathcal{O}_{ai}^3) &= \frac{|J_{ai3}|}{|\mathcal{O}_{ai}^3|} \geq 2, 152... \end{aligned}$$

E obtemos  $\tau(\mathcal{O}_{ai}^3) \geq 1, 300...$ , de modo que  $\tau(C(4)) \geq 1, 300...$  □

Agora, a prova do teorema está pronta.

*Demonstração do Teorema de Hall.* Usando as proposições 3.1 e 4.4,

$$C(4) + C(4) = [\sqrt{2} - 1, 4\sqrt{2} - 4]$$

Assim,  $C(4) + C(4)$  cobre um intervalo de comprimento maior que 1, logo, todo número real pode ser escrito na forma

$$a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots], \quad 1 \leq b_j, c_j \leq 4, \quad a \in \mathbb{Z}$$

como queríamos. □

Concluimos que  $\tau(C(4)) \geq 1,300\dots$  e isto é suficiente para provar o teorema. De fato, temos  $\tau(C(4)) = 1,300\dots$ , mas isso não será provado aqui, o leitor interessado pode consultar [1].

No texto referenciado encontramos ainda que  $\tau(C(3)) = 0,822$ , usando isso

$$\tau(C(3)) \cdot \tau(C(4)) > 1$$

como a interseção entre tais conjuntos é claramente não vazia, podemos aplicar argumentos similares aos feitos anteriormente, e obtemos

$$\mathbb{Z} + C(3) + C(4) = \mathbb{R}$$

Percebemos então o quão interessante é analisar o que acontece para diferentes valores de  $N$ . Nosso objetivo com esses comentários é incentivar a continuidade da leitura, por isso não traremos maiores detalhes no texto.

## 5 Um Pouco Sobre o Espectro de Lagrange

Nesta seção, derivaremos um resultado sobre o espectro de Lagrange que é uma consequência do Teorema de Hall. Primeiro apresentaremos o problema proposto.

Seja  $\alpha$  um número irracional, a desigualdade  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$  tem uma quantidade infinita de soluções racionais  $\frac{p}{q}$ . Este resultado é conhecido como teorema de Dirichlet, e é uma consequência da proposição 2.5.

Fixando  $\alpha$ , estamos interessados em encontrar todos os  $k$  tais que a desigualdade  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq^2}$  tenha infinitas soluções racionais  $\frac{p}{q}$ . Vamos denotar por  $k(\alpha)$  a maior constante com tal propriedade, então

$$k(\alpha) = \limsup_{p, q \in \mathbb{Z}, q \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{1}{q(q\alpha - p)} \right| \right)$$

onde  $k(\alpha) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Os casos de interesse serão aqueles onde  $k(\alpha) < +\infty$ , isto é,

$$L = \{k(\alpha); \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, k(\alpha) < +\infty\}$$

este conjunto é chamado Espectro de Lagrange.

Seja  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ , sabemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}$$

onde  $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$  e  $\beta_n = [0; a_{n-1}, \dots, a_1]$ .

Obtemos então uma fórmula para  $k(\alpha)$ , seja  $\lambda_n(\alpha) = \alpha_n + \beta_n$

$$k(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$$

para  $n \in \mathbb{Z}$ , onde  $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$  e  $\beta_n = [0; a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1]$ .

Esta fórmula nos permite concluir que  $k(\alpha) < +\infty$  se, e somente se  $(a_n)$  é limitada, onde  $(a_n)$  é a sequência dos quocientes parciais de  $\alpha$ .

Usando o Teorema de Hall podemos provar o seguinte resultado:

**Teorema 5.1.** *O espectro de Lagrange contém  $[6, +\infty)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos  $\lambda \geq 6$ , pelo Teorema de Hall

$$\lambda = a + [0; b_1, b_2, \dots] + [0; c_1, c_2, \dots] \quad 1 \leq b_i, c_i \leq 4$$

Uma vez que  $\lambda \geq 6$ , temos  $a \geq 5$ . Definimos

$$\alpha = [b_{k_1}; b_{k_1-1}, \dots, b_1, a, c_1, \dots, c_{k_1}, b_{k_2}, \dots, b_1, a, c_1, \dots, c_{k_2}, a, \dots] = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

onde  $k_n$  é uma sequência qualquer estritamente crescente de inteiros positivos. Temos que

$$k(\alpha) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha)$$

o lim sup será alcançado quando  $a_{n+1} = a \geq 5$  nestes casos

$$\lambda_n = a + [0; b_1, \dots, b_{k_n}] + [0; c_1, \dots, c_{k_n}]$$

como  $k_n$  é estritamente crescente, quando  $n \rightarrow \infty$  temos  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ , logo

$$k(\alpha) = \lambda$$

ou seja,  $\lambda \in L$ , segue que  $[6, +\infty) \subset L$ . □

## 6 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos o Teorema de Hall, que aborda um problema inicialmente numérico (a soma de números cujos quocientes parciais da expansão em frações contínuas não excede 4), e o conecta com o estudo de conjuntos de Cantor.

Estudamos  $C(4)$  como um conjunto de Cantor regular, isso nos permitiu provar o Teorema de Hall usando o Gap Lemma de Newhouse, este resultado trata da interseção de conjuntos de Cantor regulares, aqui o utilizamos para obter resultados sobre a soma destes conjuntos.

Ao fim, utilizamos o Teorema de Hall para provar um novo resultado, que trata sobre o Espectro de Lagrange, tema de grande importância na teoria dos números.

O problema de soma de conjuntos de Cantor regulares, espectro de Lagrange e demais conceitos aqui apresentados são de grande relevância, e problemas similares são ainda hoje temas de pesquisas.

## 7 Agradecimentos

Agradeço ao professor Davi Lima, por me incentivar e orientar na elaboração desse artigo, e à FAPEAL, pelo apoio financeiro.

## Referências

- [1] S. Astels. Cantor sets and numbers with restricted partial quotients. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(1):133–170, 1999.
- [2] Thomas W. Cusick, Mary E. Flahive. *The Markoff And Lagrange Spectra*. American Mathematical Society, 1989.
- [3] Marshall Hall Jr. On the sum and product of continued fractions. *Annals of Mathematics*, 48(4):966–993, 1947.
- [4] Carlos G. Moreira. *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética*. 22º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1999.
- [5] Davi Lima, Carlos G. Moreira. Dynamical characterization of initial segments of the markov and lagrange spectra. *Monatsh Math* 199, (817–852):2022, <https://doi.org/10.1007/s00605-022-01765-3>.
- [6] Hugo Steinhaus. Mowa własność mnogosci cantora. *Wector*, pages 1–3, 1917.
- [7] J. Palis, F. Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: fractal dimensions and infinitely many attractors*. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [8] Fábio B. Martinez, Carlos G. Moreira, Nicolau Saldanha, Eduardo Tengan. *Teoria dos Números: Um Passeio Com Primos e Outros Números Familiares Pelo Mundo Inteiro*. IMPA, 2015.