

A ÁLGEBRA DOS NÚMEROS TERNÁRIOS

Nathália Cássia Leal de Deus


<nathaliacassia7@gmail.com>

Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brasil

José Eloy Ottoni

<jeottoni@ufsj.edu.br>


Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brasil

 <<https://orcid.org/0000-0002-0074-243X>>

Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni

<amandagso@ufsj.edu.br>

Universidade Federal de São João del Rei, Ouro Branco, MG, Brasil

 <<https://orcid.org/0000-0002-7797-6760>>

Resumo

Este trabalho é baseado na dissertação de mestrado de Nathália Cássia Leal de Deus, defendida pelo Mestrado Profissional em Rede Nacional no Campus Alto Paraopeba da UFSJ, PROFMAT/CAP, em setembro de 2023 (DEUS; OTTONI; OTTONI, 2023). O presente artigo tem como objetivo apresentar a álgebra dos números ternários, um conjunto numérico tridimensional análogo ao conjunto dos números complexos. Primeiramente são lembradas algumas estruturas algébricas elementares como grupos, subgrupos, anéis, ideais e corpos. A seguir, apresenta-se os números complexos com suas propriedades básicas, e verifica-se a estrutura algébrica dos mesmos. Após um breve estudo sobre os números complexos, são apresentados os números ternários, onde é utilizada a analogia com o conjunto dos números complexos para facilitar a leitura e apresentação do tema. Para um maior aprofundamento do estudo do conjunto dos números ternários, é estudada a estrutura algébrica desse conjunto, a função módulo cúbico e a propriedade de composição desse módulo, a forma normal e uma representação matricial dos ternários, e são analisadas algumas propriedades de um curioso polinômio de terceira ordem intimamente relacionado à este conjunto. O último capítulo trata de uma atividade aplicada e outra atividade proposta para a utilização de temas de álgebra abstrata para alunos de Ensino Médio. Finalmente, uma conclusão e algumas perspectivas futuras sobre o trabalho são apresentadas.

Palavras-chave: Estruturas Algébricas, Números Complexos, Números Ternários, Módulo cúbico, Álgebra abstrata no Ensino Médio, Polinômio $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

1. INTRODUÇÃO

O processo que levou à introdução de um ponto de vista verdadeiramente abstrato em álgebra teve início em 1815, quando vários matemáticos da Universidade de Cambridge, como Charles Babbage (1792-1871), George Peacock (1791-1858) e John Herschel (1792-1878) fundaram a Analytical Society, uma sociedade cuja finalidade imediata era reformar o ensino do cálculo, adotando as notações em uso no continente. Porém, sua contribuição fundamental foi repensar e discutir os fundamentos da álgebra.

Séculos antes, quando a ciência europeia ainda discutia a possível validade do emprego de números negativos ou irracionais, apareceram no mundo matemático os números que hoje

chamamos de complexos. Rafael Bombelli introduziu procedimentos matemáticos que usavam a raiz quadrada de menos um de maneira a resolver equações de terceiro grau em seu trabalho *L'Algebra*, de 1572, após os contatos iniciais de outro matemático italiano, Gerolamo Cardano com os números complexos, no seu *Ars Magna*, de 1545.

Em 1830, Peacock publicou seu *Treatise on Algebra* onde tenta dar a esta disciplina uma estrutura lógica comparável à dada à geometria nos *Elementos de Euclides*; isto é, apresentá-la como o desenvolvimento abstrato das consequências de um certo conjunto de postulados. A obra, que fora ampliada a dois volumes até 1845, marca o verdadeiro início do pensamento axiomático em álgebra. No primeiro volume, Peacock tenta exibir as leis fundamentais da aritmética, trabalhando apenas com números e dando aos símbolos $+$ e $-$ apenas o seu significado ordinário. Augustus de Morgan e outros matemáticos do século XIX também apresentaram enormes contribuições para o início do pensamento algébrico abstrato, porém William Rowan Hamilton, inspirado pela beleza e poder da análise complexa recentemente desenvolvida, procurava por algum tipo de “número complexo generalizado”, que poderia descrever de maneira natural a matemática e a geometria dos espaços tridimensionais, papel equivalente ao dos números complexos com o espaço bidimensional. Hamilton perseguindo esse objetivo, através do desenvolvimento dos quatérnions, um novo conjunto numérico quadridimensional, onde a multiplicação não é comutativa, leva a álgebra abstrata mais além (POLCINO, 2004). Cerca de dois meses após receber uma carta do Hamilton, anunciando a descoberta dos quatérnions, em 1843, o matemático John Graves descobriu os números octodimensionais denominados octonions, que não obedecem à propriedade da associatividade da multiplicação. Os octonions foram redescobertos por Arthur Cayley em 1845.

Ainda que o trabalho de Hamilton com os quatérnions tenha levado a uma ampliação da investigação e do estudo de estruturas algébricas mais abstratas, sua meta inicial fora frustrada por pelo menos um ponto essencial: *Se são os quatérnions análogos multidimensionais dos complexos, a dimensionalidade não muda de duas para três dimensões, mas de duas para quatro!*

Acontece que, como acabou por ser visto, há uma maneira natural de se construir versões generalizadas dos números complexos em espaços reais de n dimensões (FLEURY; TRAUBENBERG; YAMALEEV, 1993; FLEURY; TRAUBENBERG; YAMALEEV, 1995) sem perder certas propriedades básicas, como a comutatividade e associatividade, ao custo de outras, como a divisibilidade. O caso mais simples dessas generalizações ocorre para $n = 3$.

Os chamados números ternários, ou tricomplexos, ou complexos ternários; números complexos de três dimensões, foram introduzidos em uma série de estudos relativamente recentes (LIPATOV; TRAUBENBERG; VOLKOV, 2008; OLARIU, 2000), embora os primeiros passos nessa direção tenham sido dados há muito mais tempo. Por exemplo, como primeiro passo em direção a uma extensão dos números complexos, em uma série de artigos, os matemáticos estudaram um espaço tridimensional com comprimento de arco dado pela fórmula cúbica definida por $d^3s = d^3x + d^3y + d^3z - 3dxdydz$. Esse estudo foi iniciado pelo matemático francês P. Appell (APPELL, 1877b; APPELL, 1877a), escrito em 1877, onde ele introduz uma certa generalização das funções trigonométricas usuais relacionadas com esse comprimento de arco. Então décadas depois, as propriedades geométricas desses espaços tridimensionais foram primeiro estudadas por P. Humbert em uma série de artigos (HUMBERT, 1942; HUMBERT, 1940; HUMBERT, 1949) e por J. Devisme (DEVISME, 1933; DEVISME, 1929), entretanto todos esses resultados foram obtidos sem o uso explícito de algum tipo de extensão de números complexos, com exceção de uma pequena observação feita pelo próprio Appell, em seu primeiro artigo (APPELL, 1877b).

Os números ternários estão sendo investigados na Física Teórica nos últimos anos porque, aparentemente estão relacionados com algumas simetrias da física de alta energia, possibilitando uma maneira diferente de compreender fenômenos que envolvem os problemas dos chamados números quânticos de cor, que são três, e das três gerações, ou famílias de partículas elementares do Modelo Padrão (KERNER; SUZUKI, 2014; KERNER, 2017; KERNER, 2018a; KERNER, 2018b; KERNER, 2019; KERNER, 2023; KERNER; LUKIERSKI, 2019; KERNER, 1991; KERNER, 2010; KERNER, 1992; ABRAMOV; KERNER; ROY, 1997).

O presente trabalho tem como objeto de estudo principal os números ternários. Para uma melhor compreensão do leitor, utiliza-se uma analogia com o conjunto dos números complexos sempre que possível, assunto de estudo de um capítulo anterior. Este trabalho é apresentado de forma a gerar uma compreensão mais didática da álgebra abstrata e portanto apresenta-se primeiramente as estruturas algébricas elementares definidas como grupos, subgrupos, anéis, subanéis, ideais, domínios de integridade, corpos. Utiliza-se o conjunto dos números complexos para explorar a questão das estruturas algébricas e por fim aplica-se essas mesmas definições aos números ternários.

O estudo apresentado no capítulo sobre os números ternários procura explorar a riqueza de estruturas da álgebra abstrata envolvida nesse conjunto, demonstrando de maneira formal, mas acessível, muitas das características e propriedades do novo conjunto apresentado, além disso explora a intrigante relação com o curioso polinômio cúbico $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, revelando o papel de uma superfície cúbica muito peculiar denominada *Esfera de Appell* na estranha geometria sistematizada pelos ternários.

Por fim, apresenta-se uma aplicação realizada em sala de aula, e uma proposta de atividade; de alguns dos conceitos de álgebra estudados, por meio da representação matricial dos números complexos, verificando que a mesma representa um grupo.

2. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS ELEMENTARES

Um dos pilares da matemática moderna é a álgebra, uma grande área da matemática que se desenvolveu através dos esforços de matemáticos como Karl Weierstrass, Georg Cantor, Leopold Kronecker, Richard Dedekind, Karl F. Gauss, Niels H. Abel, Augustin Cauchy e etc, que empreenderam a árdua tarefa de estabelecer uma fundação mais rigorosa ao conceito de número. Com o tempo as ideias e os conceitos da álgebra foram sendo ampliados, se tornaram mais gerais, consistentes e abstratos, e hoje essa área contém toda uma classe de estruturas algébricas como os chamados grupos, anéis, corpos, domínios de integridade, ideais e etc. Algumas dessas estruturas serão consideradas nesse capítulo. O caso essencial do corpo dos números complexos é estudado no terceiro capítulo, e partindo dos números complexos como um protótipo de conjunto numérico, o quarto capítulo apresenta o conjunto dos números ternários.

2.1. Grupo

O conceito de grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na matemática moderna. Dentre as diversas áreas da ciência nas quais este conceito é fundamental estão incluídas a

teoria quântica de campos, a física da matéria condensada, no estudo das estruturas atômica e molecular, e significativamente na cristalografia, além do próprio estudo da álgebra abstrata na matemática moderna, onde tal conceito é utilizado para a construção de outras estruturas algébricas, como anéis, corpos, e espaços vetoriais, uma vez que estes podem ser vistos como grupos dotados de operações e axiomas adicionais.

A primeira grande fase da teoria dos chamados grupos finitos atingiu o seu ápice no período imediatamente antes da Primeira Guerra Mundial, com os trabalhos do alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), do inglês William Burnside (1852-1927) e do bielorrusso Issai Schur (1875-1936). Depois de 1928, novas e decisivas contribuições foram feitas pelo também inglês P. Hall (1904-1982), pelo alemão H. Wielandt (1910-2001) e, na área das representações de grupos, pelo também alemão Richard D. Brauer (1901-1977). A classificação completa dos grupos finitos foi levada a cabo somente em 1982 com a participação de centenas de matemáticos, liderados pelo norte-americano D. Gorenstein (1923-1992) (SOUZA, 2012).

Nesta seção, certas estruturas algébricas bastante gerais munidas de apenas uma operação são apresentadas. Estas estruturas são conhecidas como grupos. Além disso, denomina-se alguns tipos de grupos e subgrupos e apresenta-se seus respectivos exemplos e resultados para um melhor entendimento dos conteúdos abordados.

Definição 2.1.1. (Grupo) *Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação binária $(*)$ fechada definida entre seus elementos*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

*Dizemos que $(G, *)$ é um grupo se as propriedades abaixo são válidas para quaisquer que sejam a, b e $c \in G$:*

- i) (Associatividade): $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- ii) (Existência do elemento neutro): Existe $e \in G$, tal que $a * e = e * a = a$, denomina-se e por elemento neutro,
- iii) (Existência do elemento inverso): Para todo $a \in G$, existe um $a^{-1} \in G$, denominado elemento inverso de a , tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ao estudar a teoria dos grupos é comum nos depararmos com o termo grupos comutativos. Estes se diferenciam dos demais pela característica de satisfazer a propriedade comutativa com relação a operação utilizada. Os grupos comutativos também recebem o nome de grupos abelianos, em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829).

Definição 2.1.2. (Grupo Abelian) *Dizemos que $(G; *)$ é um grupo abeliano quando a operação que define o grupo G for também comutativa, ou seja, para quaisquer $a, b \in G$, tem-se $a * b = b * a$.*

Como exemplo, pode-se citar alguns grupos importantes, como (DOMINGUES, 2003):

- i) $(\mathbb{Z}, +)$: O grupo aditivo dos números inteiros (comutativo) é o sistema formado pelo conjunto dos inteiros e a operação definida é a adição usual, uma operação sobre \mathbb{Z} , associativa e comutativa. $(\mathbb{Q}, +)$: O grupo aditivo dos números racionais

(comutativo) é o sistema formado pelo conjunto dos racionais \mathbb{Q} e a adição usual sobre esse conjunto. $(\mathbb{R}, +)$: O grupo aditivo dos números reais (comutativo) é o sistema formado pelo conjunto dos números reais \mathbb{R} e a adição usual sobre esse conjunto.

- ii) (\mathbb{Q}^*, \cdot) : O grupo multiplicativo dos números racionais (comutativo) é o sistema formado pelo conjunto dos racionais \mathbb{Q}^* (rationais exceto o 0) e a multiplicação usual sobre esse conjunto,
- iii) (\mathbb{R}^*, \cdot) : O grupo multiplicativo dos números reais (comutativo) é o sistema formado pelo conjunto dos números reais \mathbb{R}^* (reais exceto o 0) e a multiplicação usual sobre esse conjunto.

Nas seções 5.1.1 e 5.1.2 é apresentada uma aplicação em sala de aula, com a exemplificação da definição de grupos.

Alguns subconjuntos do grupo $(G, *)$ também podem formar um grupo com relação à mesma operação $(*)$ definida para o grupo G , o que leva a definir os chamados subgrupos (GARCIA; LEQUAIN, 2013):

Definição 2.1.3. (Subgrupo) *Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotado por $H < G$) quando, com a operação de G , o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:*

- o) (Fechamento da operação em H): $h_1 * h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$,
- i) (Associatividade): $h_1 * (h_2 * h_3) = (h_1 * h_2) * h_3, \forall h_1, h_2, h_3 \in H$,
- ii) (Existência do elemento neutro): $\exists e_H \in H$ tal que $e_H * h = h * e_H = h, \forall h \in H$,
- iii) (Existência do elemento inverso): Para cada $h \in H$, existe $k \in H$ tal que $h * k = k * h = e_H$.

Pode-se fazer algumas observações com relação à natureza dos subgrupos, que torna sua análise mais simples:

- 1) A condição de associatividade (i) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ é válida para todos os elementos de G ,
- 2) O elemento neutro e_H é necessariamente igual ao elemento neutro e de G . De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H * a = a$; multiplicando os dois membros da igualdade a^{-1} à direita, obtemos $e_H = e$,
- 3) Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G . De fato, se k é o inverso de h em H , então $h * k = k * h = e_H$, logo $h * k = k * h = e_h = e$, e portanto k é o inverso de h em G .

Como exemplo de subgrupo pode-se citar o conjunto de todos os números pares, a saber, $2\mathbb{Z} = \{2k | k \in \mathbb{Z}\}$, é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Estruturas algébricas mais elaboradas podem ser construídas se forem incluídas mais operações binárias entre os elementos do conjunto estudado. As definições apresentadas na próxima seção envolvem conjuntos com duas operações definidas entre seus elementos, que podem ser chamadas de adição e multiplicação, e as definições usadas são baseados nos livros (GARCIA; LEQUAIN, 2013) e (HEFEZ, 2011).

2.2. Anel

A teoria dos anéis é um dos principais assuntos do campo da álgebra abstrata moderna. A origem da álgebra remonta aos babilônios e o seu desenvolvimento percorreu um longo caminho e que teve um momento importante no século *XVI* com os matemáticos da chamada Escola de Bolonha que se ocuparam da resolução das equações algébricas do terceiro e do quarto grau. Um outro momento importante para a álgebra ocorreu na primeira metade do século *XIX* com os trabalhos do irlandês W. H. Hamilton e de seus contemporâneos ingleses. Hamilton introduziu o formalismo dos números complexos que é até hoje usado e posteriormente definiu formalmente os chamados quartêrnios, dando mais um passo decisivo para o desenvolvimento da álgebra abstrata. Importante para o desenvolvimento da teoria nessa época foi o estudo dos anéis de inteiros algébricos, iniciado por Gauss e desenvolvido por Kummer, Dedekind, Kronecker, Dirichlet e Hilbert, trabalhos que culminaram no final do século *XIX*, início do século *XX*. Finalmente, a noção abstrata moderna de anel foi introduzida na segunda década do século *XX* (HEFEZ, 2011).

Um anel é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$, chamada adição, e de uma operação denotada por \cdot , chamada multiplicação, que satisfazem determinadas condições:

Definição 2.2.1. (Anel) *Seja A um conjunto não vazio munido de duas operações binárias fechadas em A ; $(+)$ e (\cdot) , chamadas adição e multiplicação*

$$\begin{aligned} + : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

A terna $(A, +, \cdot)$ é um anel quando as operações satisfazem as seguintes propriedades para quaisquer que sejam a, b e $c \in A$:

- A_1 (Associatividade da adição): $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- A_2 (Comutatividade da adição): $a + b = b + a$,
- A_3 (Existência do elemento neutro para a adição): Existe $\alpha \in A$, tal que $a + \alpha = \alpha + a = a$, o elemento neutro da adição é simbolizado por 0 ,
- A_4 (Existência do elemento simétrico): Para todo $a \in A$, existe um $a' \in A$, denominado elemento simétrico de a , tal que $a + a' = 0$, o elemento simétrico é simbolizado por $-a$,
- M_1 (Associatividade da multiplicação): $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- M_2 (Comutatividade da multiplicação): $a \cdot b = b \cdot a$,
- M_3 (Existência do elemento neutro para a multiplicação): Existe $e \in A$ (com $e \neq 0$), tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, o elemento neutro da multiplicação é simbolizado por 1 ,

- $AM)$ (Distributividade): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Portanto todo anel é um grupo abeliano com relação a operação de adição, mas como os elementos de um anel não necessariamente têm inverso multiplicativo, um anel não é um grupo com relação à operação de multiplicação. O anel $(A, +, \cdot)$ também é representado simplesmente por A .

Como exemplo de anéis importantes, pode-se citar (DOMINGUES, 2003): O anel dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, o anel dos números racionais $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, o anel dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. No próximo capítulo será demonstrado que o conjunto dos números complexos munido das operações usuais é um anel.

Um elemento $a \in A$ é dito inversível se existir um elemento $b \in A$ tal que $a \cdot b = 1$:

Definição 2.2.2. (Elemento Inverso) Diz-se que $a^{-1} \in A$ é o inverso de um elemento a do anel A se $a \cdot a^{-1} = 1$, nesse caso a é dito invertível.

Denota-se por A^* o conjunto dos elementos invertíveis do anel A . Pode-se fazer algumas observações com relação à natureza do conjunto A^* dos elementos invertíveis de A :

- 1) O conjunto A^* é fechado com relação à operação de multiplicação,
- 2) O elemento neutro 1 é necessariamente um elemento de A^* ,
- 3) Dado $x \in A$, o inverso de x em A , x^{-1} está necessariamente em A^* .

Como as operações em A são comutativas por definição, e com as observações acima é possível concluir-se que A^* é um grupo abeliano com relação à operação de multiplicação, e A^* não é um anel, pois não pode conter o 0, que não tem inverso.

Definição 2.2.3. (Subanel) Um subconjunto não vazio B de um anel $(A, +, \cdot)$ é um subanel de A se, e somente se:

- i) se $a, b \in B$ então $a + b \in B$,
- ii) se $a, b \in B$ então $a \cdot b \in B$,
- iii) $0_A \in B$,
- iv) se $a \in B$ então $-a \in B$.

Como exemplo de subanel pode-se citar:

- i) Com as operações usuais $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ é subanel de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é subanel de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,
- ii) O conjunto dos números ímpares $B = \{2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ não é subanel de \mathbb{Z} . Basta ver que $1, 3 \in B$ porém $3 - 1 = 2 \notin B$,
- iii) O conjunto dos números pares $B = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ é subanel de \mathbb{Z} . De fato, a soma, o produto e a diferença de números pares é sempre um número par,
- iv) \mathbb{R} é um subanel de \mathbb{C} .

2.3. Ideal

Nesta seção será apresentado a definição de ideal, e serão explorados alguns exemplos para facilitar a compreensão do leitor. As definições e exemplos foram extraídos de (JANESCH; TANEJA, 2008).

A noção de ideal foi introduzida no final do século *XIX* por Dedekind. Os ideais formam uma classe especial de subaneis e surgiram como ferramenta para o estudo da teoria dos números. Pela definição anterior de anéis, é possível notar que B é um subanel de A quando este subconjunto é fechado por diferenças e produtos de elementos em B . Como pode-se ver abaixo, os ideais são subconjuntos fechados por diferenças e por produtos com elementos do próprio anel A .

Definição 2.3.1. (Ideal) Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e $\emptyset \neq I \subseteq A$ um subconjunto não vazio de A . Dizemos que I é **ideal** de A quando:

- (i) $a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$,
- (ii) $x \in A$ e $a \in I \Rightarrow ax \in I$.

Como exemplo de subanel que não são ideais, é possível observar o seguinte caso: \mathbb{Z} é subanel de \mathbb{Q} , no entanto \mathbb{Z} não é ideal de \mathbb{Q} . Para ver isso basta notar que $1 \in \mathbb{Z}$, e $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, mas $1 \cdot \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Outro exemplo de subanel que não é ideal, pode-se também citar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, será observado na subseção 2.2.3 que \mathbb{R} é um subanel de \mathbb{C} , porém \mathbb{R} não é um ideal de \mathbb{C} ; para ver isso basta notar que $2i \in \mathbb{C}$ e $1 \in \mathbb{R}$, mas $2i \cdot 1 \notin \mathbb{R}$.

Como exemplo de ideal pode-se citar (DOMINGUES, 2003):

- i) Se A é um anel, então $\{0\}$ e o próprio A são ideais em A . São os ideais triviais do anel.
- ii) No anel \mathbb{Z} , os subconjuntos $n\mathbb{Z} = 0, \pm n, \pm 2n, \dots$, (qualquer que seja o inteiro n), são ideais de \mathbb{Z} . De fato se $a, b \in n\mathbb{Z}$, então $a = rn$ e $b = sn$, para convenientes inteiros r e s , e logo $a - b = rn - sn = (r - s)n$, de onde conclui-se que $a - b \in n\mathbb{Z}$; e também sejam $x \in \mathbb{Z}$ e $a \in n\mathbb{Z}$; então $a = qn$, para um conveniente q inteiro, e portanto $xa = x(qn) = (xq)n$, o que mostra que $xa \in n\mathbb{Z}$.

2.4. Domínio de Integridade

Um anel A será chamado de domínio de integridade, ou simplesmente domínio, se for verificada a chamada propriedade de integridade entre todos os seus elementos. A propriedade da integridade é a seguinte (HEFEZ, 2011):

Definição 2.4.1. (Domínio de Integridade) Um anel $(A, +, \cdot)$ é um domínio de integridade, ou simplesmente domínio, se dados quaisquer $a, b \in A$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $a \cdot b \neq 0$.

Exemplos de domínio de integridade são (LEQUAIN; GARCIA, 1983):

- i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: O anel dos inteiros é um domínio de integridade.
- ii) $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$: O subconjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ dos números complexos, com entradas inteiras e a multiplicação dada pela multiplicação de números complexos, (conforme definido no próximo capítulo). Então esse anel é um domínio de integridade chamado de anel dos inteiros Gaussianos.
- iii) Mais geralmente, se n é um inteiro positivo, temos então que $(\{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ e $(\{a + bi\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ são domínios.
- iv) O conjunto das matrizes 2×2 com entradas reais e a soma e multiplicação definidas pelas soma e produto de matrizes não é um domínio de integridade. Basta observar que o produto das matrizes apresentadas abaixo é zero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5. Corpo:

Um anel onde todos os elementos são invertíveis (com exceção do 0) é chamado corpo.

Definição 2.5.1. (Corpo) Um anel $(A, +, \cdot)$ provido da propriedade abaixo é denominado corpo:

- M_4 (Existência do inverso): Para todo $a \in A$ ($a \neq 0$), existe $a^{-1} \in A$, tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Exemplos clássicos de corpos são :

- i) O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , reais \mathbb{R} e complexos \mathbb{C} .
- ii) O conjunto dos inteiros \mathbb{Z} não é um corpo, porque nem todo elemento de \mathbb{Z} possui inverso multiplicativo.

É possível verificar que:

Teorema 2.5.2. *Todo corpo é um domínio de integridade.*

A demonstração desse teorema é análoga à demonstração dada para o conjunto dos complexos, feita no próximo capítulo.

No próximo capítulo é verificado que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} é um corpo, aproveitando também para ilustrar mais claramente a definição de corpo apresentada nesta seção.

3. OS NÚMEROS COMPLEXOS

Considere o conjunto \mathbb{C} dos pares ordenados de números reais (x, y) , onde ficam definidas as seguintes operações de adição e multiplicação:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow z_1 + z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\longrightarrow z_1 \cdot z_2 \end{aligned}$$

- *(Adição de números complexos):*
 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$
- *(Multiplicação de números complexos):*
 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$

O conjunto \mathbb{C} com as operações acima definidas é chamado o conjunto dos números complexos, e denotado por \mathbb{C} . A adição acima definida é simplesmente a soma de vetores em \mathbb{R}^2 , enquanto a multiplicação tem uma interpretação geométrica mais elaborada. Com isso é possível afirmar que:

Teorema 3.0.1. \mathbb{C} é um grupo abeliano com relação à operação de adição.

Prova. Seja \mathbb{C} o conjunto dos pares ordenados de números reais munido da operação de adição como a definida acima, dados $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ em \mathbb{C} , a soma obedece às propriedades:

- A_1 (*Associatividade da adição*): $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \end{aligned}$$
- A_2 (*Comutatividade da adição*): $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \end{aligned}$$
- A_3 (*Existência do elemento neutro para a adição*): Existe $0 \in \mathbb{C}$, tal que $z + 0 = z,$

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$
- A_4 (*Existência do elemento simétrico*): Para todo $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, existe um $z' \in \mathbb{C}$, denominado elemento simétrico de z , tal que $z + z' = 0$. O elemento simétrico é simbolizado por $-z,$

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0$$

Analisando as propriedades acima, e de acordo com a definição 2.1.1, $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo abeliano. \square

Teorema 3.0.2. \mathbb{C} é um anel.

Prova. É possível ver que a multiplicação de complexos obedece às propriedades $M1 - M3$ e AM da definição 2.2 de anel:

- $M_1)$ (Associatividade da multiplicação): $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3) \end{aligned}$$

São iguais a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

- $M_2)$ (Comutatividade da multiplicação): $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \\ z_2 \cdot z_1 &= (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) \end{aligned}$$

São iguais a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

- $M_3)$ (Existência do elemento neutro da multiplicação): Existe $1 \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot 1 = z$,

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot (1, 0) &= (x \cdot 1 + y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= (x + 0, 0 + y) = (x, y) \end{aligned}$$

- $AM)$ (Distributividade): $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= \left(x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3) \right) \\ &= \left(x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3 \right) \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = \left(x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3 \right)$$

Que são iguais, a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

Em conjunto com a demonstração das propriedades $A1 - A4$ demonstradas no teorema anterior, verifica-se assim que os números complexos possuem todas as propriedades relativas a um anel. \square

Na próxima seção será investigado a questão da existência (ou não) dos elementos inversos dos números complexos, e finalmente será demonstrado que:

Teorema 3.0.3. \mathbb{C} é um corpo.

3.0.10 elemento inverso de um número complexo

Como visto, os elementos de um anel não necessariamente têm inverso multiplicativo. Quando todos os elementos do anel (com exceção do 0) são inversíveis esse anel é chamado corpo. Nessa seção será investigado se os números complexos formam não apenas um anel, mas um corpo. Para isso, seja um número complexo $z = (x, y) \neq 0$, e (considere se existir) $z' = (x', y') \in \mathbb{C}$ seu inverso, isto é $z \cdot z' = 1$, ou seja:

$$z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + yx') = (1, 0) \quad (1)$$

Encontrar $z' = (x', y')$ implica resolver o seguinte sistema (onde as incógnitas são x' e y'):

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases}$$

Para encontrar a solução do sistema acima pode-se utilizar a regra de Cramer (PAIVA, 1995). Na forma matricial, o sistema linear fica:

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer, a solução é dada por $x' = \frac{D_x}{D}$ e $y' = \frac{D_y}{D}$ (para $D \neq 0$), onde D_x e D_y são os respectivos determinantes das matrizes:

$$D_x(x, y) = \det \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{bmatrix} = x,$$

$$D_y(x, y) = \det \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix} = -y$$

e D é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear:

$$D(x, y) = \det \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = x^2 + y^2$$

Para $D(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0$, ou seja, para $z \neq (0, 0)$, o sistema possui solução única. Nesse caso:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (2)$$

Verifica-se, portanto que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} é um corpo 2.5.1, e consequentemente, conforme visto no capítulo anterior, \mathbb{C} também é um domínio de integridade, mas como não havia a demonstração dessa afirmação no capítulo anterior, a demonstração no caso do corpo dos complexos, que ilustra a demonstração para o caso geral, é feita a seguir.

Teorema 3.0.4. \mathbb{C} é um domínio de integridade

Demonstração. Sejam $z, z' \in \mathbb{C}$, tais que $z \cdot z' = 0$ e $z \neq 0$. Como \mathbb{C} é um corpo, existe um $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z^{-1} \cdot z = 1$. Logo, multiplicando os dois membros da equação $z \cdot z' = 0$ por z^{-1} , obtém-se $z^{-1} \cdot (z \cdot z') = 0$, logo $((z^{-1} \cdot z) \cdot z') = 0$, isto é, $z' = 0$. \square

Na próxima seção são discutidas algumas definições convenientes para o estudo da álgebra dos números complexos.

3.1. A forma algébrica dos números complexos

Todo número complexo z pode ser escrito de maneira única na forma (DANTE, 2012):

$$z = x + yi$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = (0, 1)$, tal que:

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi.$$

A forma acima é chamada *forma normal* do número complexo (x, y) . Observe que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Observamos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

- A denominada parte real de z : $x = \Re(z)$.
- A denominada parte imaginária de z : $y = \Im(z)$.

Observa-se que a existência do número i , a unidade imaginária, é que permite que no conjunto dos números complexos \mathbb{C} existam raízes de índice par de números reais negativos, o que não é definido no conjunto dos números reais \mathbb{R} . Por exemplo, se $x \in \mathbb{C}$ e $x^2 = -25$, então $x = \pm 5i$ são duas soluções possíveis, pois $(\pm 5i)^2 = (5i)^2 = 5^2 i^2 = 25i^2 = -25$.

Se o número complexo possui apenas a parte real (ou seja, se $y = 0$) ele é chamado de real puro. Se o número complexo possui apenas a parte imaginária (ou seja, se $x = 0$) ele é chamado de imaginário puro. Exemplos:

- i) Se $z = 2 + 3i$, tem-se $\Re(z) = 2$ e $\Im(z) = 3$.
- ii) Se $z = 3$, tem-se $\Re(z) = 3$ e $\Im(z) = 0$. Portanto z é um número real puro.
- iii) Se $z = -2i$, tem-se $\Re(z) = 0$ e $\Im(z) = -2$. Portanto z é um número imaginário puro.

3.2. O conjugado dos números complexos

Nesta seção são apresentadas a definição e as propriedades do chamado conjugado de um número complexo (SOARES, 2007), (DANTE, 2012).

Definição 3.2.1. (Conjugado de um número complexo) Dado o número complexo $z = (x, y)$, o conjugado de z é o número complexo $\bar{z} = (x, -y)$.

O conjugado de um número complexo tem certas propriedades bastante úteis como pode ser visto na proposição a seguir:

Proposição 3.2.2. Se $z = (x, y)$ é um número complexo qualquer, então:

- 1) $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$,
- 2) $z\bar{z} = x^2 + y^2$,
- 3) $z = \bar{z}$ se, e somente se, z é um número real puro $z = (x, 0)$,
- 4) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, (o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados),
- 5) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, (o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados),
- 6) $\bar{\bar{z}} = z$, (o conjugado do conjugado de z é o próprio z).

Demonstração. Seja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$,

- 1) $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{x+yi+x-yi}{2} = x = \Re(z)$ e $\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{x+yi-x-yi}{2} = y = \Im(z)$,
- 2) $z\bar{z} = (x, y) \cdot (x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2$,
- 3) se $z = \bar{z}$, ou seja, $(x, y) = (x, -y)$, portanto $y = -y = 0$, então z é um número real puro $z = (x, 0)$. A volta é trivial,
- 4) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)} = \overline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- 5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2, -x_1 y_2 - y_1 x_2) = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
- 6) $\bar{\bar{z}} = \overline{(x, -y)} = (x, y) = z$.

□

Com a definição de conjugado é possível definir ainda outros objetos matemáticos interessantes que são úteis para se caracterizar os números complexos. Um desses objetos é o chamado módulo do número complexo.

3.3. O módulo de um número complexo

O valor absoluto ou módulo de um número real x , ou $|x|$, é definido como a distância de x a 0, isto é, $|x| = \sqrt{x^2}$. Analogamente, definimos o módulo de um número complexo $z = (x, y)$ como a distância do ponto $z = (x, y)$ no plano \mathbb{R}^2 à origem $(0, 0)$ nesse mesmo plano (que é denominado também como plano de Argand-Gauss, ou simplesmente plano complexo) (SOARES, 2007):

Definição 3.3.1. (Módulo de um número complexo) Seja $|z| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ a função módulo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \geq 0$$

Pode-se mostrar algumas propriedades envolvendo o módulo de números complexos (DANTE, 2012).

Proposição 3.3.2. *Sejam z, z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$, é possível mostrar que:*

- 1) $z\bar{z} = |z|^2$,
- 2) $|z| = |\bar{z}|$,
- 3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Demonstração. Seja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$,

- 1) $z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$,
- 2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|$,
- 3) $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$, e tirando a raiz quadrada dos dois lados da equação demonstra-se a última propriedade.

□

A última propriedade mostrada $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ é muito importante no estudo de álgebra e faz dos números complexos um caso especial das chamadas *Álgebras de composição normadas*. Uma propriedade análoga será mostrada para o caso dos números ternários, no próximo capítulo.

Na próxima subseção será estudado uma maneira alternativa de se representar os números complexos.

3.4. A representação matricial dos números complexos

É bem sabido que a equação $X^2 + 1 = 0$, ou $X^2 = -1$ não tem solução em \mathbb{R} e é forçoso assim definir um “número” $J \notin \mathbb{R}$ de um conjunto mais amplo, satisfazendo $J^2 = -1$ que resolve a equação. É possível usar conceitos da álgebra linear elementar com o intuito de buscar um ente de natureza algébrica e geométrica que seja a solução procurada (SOARES, 2007). Se assim se proceder e se reinterpretar a referida equação como uma equação matricial, onde X é

uma matriz 2×2 a ser determinada, e o 1 for representado pela matriz I , a matriz identidade 2×2 , a equação mencionada é escrita na forma matricial:

$$X \cdot X = -I$$

onde X é a matriz 2×2 com coeficientes reais a serem determinados, e I é a matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ assim como “}\cdot\text{” é o produto de matrizes.}$$

Uma possível solução dessa equação matricial é a matriz 2×2 :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que geometricamente corresponde à rotação de um ângulo reto ($\frac{\pi}{2}$ radianos) no plano \mathbb{R}^2 , no sentido anti-horário. Diz-se então que J é uma representação matricial do número complexo $(0, 1)$.

$$\text{À um número real puro qualquer } x \text{ pode ser associada a matriz } xI = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

de tal forma que a soma de dois números reais puros x_1 e x_2 corresponda à soma de matrizes $x_1I + x_2I = x_2I + x_1I = (x_2 + x_1)I$,

$$x_1I + x_2I = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

e ao produto de dois reais puros $x_1Ix_2I = x_2Ix_1I = (x_1x_2)I$ corresponda,

$$x_1Ix_2I = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, as matrizes da forma $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ se comportam exatamente da mesma maneira que os

números reais com relação à soma e ao produto. É possível então ampliar o conjunto \mathbb{R} para que equações como a acima mencionada tenham solução considerando as matrizes 2×2 da seguinte forma:

$$xI + yJ = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$. Chama-se os “números” da forma $xI + 0J = xI$ de reais puros e os da forma $0I + yJ = yJ$ de imaginários puros. Um “número” da forma geral $xI + yJ$ é chamado de representação matricial de um número complexo e forma um corpo com exatamente as mesmas propriedades acima mencionadas do corpo dos números complexos, como pode ser visto no último capítulo, onde há uma atividade proposta nesse sentido para alunos do Ensino Médio.

4. OS NÚMEROS TERNÁRIOS

Considere o conjunto \mathbb{T} das triplas ordenadas de números reais (x, y, z) , onde ficam definidas as seguintes operações de adição e multiplicação:

Definição 4.0.1. (Adição e multiplicação em \mathbb{T}) Sejam $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathfrak{z}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos do conjunto \mathbb{T} das triplas ordenadas de reais, munido de duas operações binárias $(+)$ e (\cdot) fechadas, definidas entre seus elementos, denominadas adição e multiplicação de números ternários, respectivamente, e assim definidas:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) &\longrightarrow \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) &\longrightarrow \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 \end{aligned}$$

- (Adição de números ternários):

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

- (Multiplicação de números ternários):

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2).$$

O conjunto \mathbb{R}^3 com as operações acima definidas é chamado o conjunto dos números ternários, e denotado por \mathbb{T} . A adição acima definida é simplesmente a soma de vetores usual em \mathbb{R}^3 , enquanto a multiplicação tem uma interpretação geométrica bastante elaborada. É possível afirmar que:

Teorema 4.0.2. \mathbb{T} é um grupo abeliano com relação à operação de adição.

Prova. Seja \mathbb{T} o conjunto das ternas ordenadas de números reais munido da operação de adição como a soma usual de vetores em \mathbb{R}^3 , ou seja, dados $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathfrak{z}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{T} , a soma de \mathfrak{z}_1 e \mathfrak{z}_2 é definida como o ternário $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. É fácil ver que essa operação obedece às propriedades:

- A_1 (Associatividade da adição): $(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2) + \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{z}_1 + (\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3)$,

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3) &= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3) \\ &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \end{aligned}$$

- A_2 (Comutatividade da adição): $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1$,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1) \\ &= (x_2, y_2, z_2) + (x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

- A_3) (Existência do elemento neutro para a adição): Existe $0 \in \mathbb{T}$, tal que $\mathfrak{z} + 0 = \mathfrak{z}$,

$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x + 0, y + 0, z + 0) = (x, y, z)$$

- A_4) (Existência do elemento simétrico): Para todo $\mathfrak{z} \in \mathbb{T}$, existe um $\mathfrak{z}' \in \mathbb{T}$, denominado elemento simétrico de \mathfrak{z} , tal que $\mathfrak{z} + \mathfrak{z}' = 0$, o elemento simétrico é simbolizado por $-\mathfrak{z}$,

$$(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0) = 0$$

Analisando as propriedades acima, e de acordo com a definição 2.1.1, $(\mathbb{T}, +)$ é um grupo abeliano. \square

Teorema 4.0.3. \mathbb{T} é um anel.

Prova. Seja o conjunto \mathbb{T} dos ternários com as operações anteriormente definidas, é possível ver que multiplicação de ternários obedece às propriedades $M1 - M3$ e AM da definição 2.2 de anel:

- M_1) (Associatividade da multiplicação): $(\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2) \cdot \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{z}_1 \cdot (\mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3)$,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2) \cdot \mathfrak{z}_3 &= (x_1x_2 + y_1z_2 + y_2z_1, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= (x_1x_2x_3 + y_1z_2x_3 + y_2z_1x_3 + z_1z_2z_3 + x_1y_2z_3 + y_1x_2z_3 + y_1y_2y_3 + x_1z_2y_3 + \\ &\quad y_1y_2z_3 + x_1z_2z_3 + z_1x_2z_3 + x_1x_2y_3 + y_1z_2y_3 + y_2z_1y_3 + z_1z_2x_3 + x_1y_2x_3 + y_1 \\ &\quad z_2z_3 + x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3 + x_1x_2z_3 + y_1z_2z_3 + y_2z_1z_3 + y_1y_2x_3 + x_1z_2x_3 + z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 \cdot (\mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3) &= (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2x_3 + y_2z_3 + z_2y_3, z_2z_3 + x_2y_3 + y_2x_3, y_2y_3 + x_2z_3 + z_2x_3) \\ &= (x_1x_2x_3 + x_1y_2z_3 + x_1z_2y_3 + y_1y_2y_3 + y_1x_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1z_2z_3 + z_1x_2y_3 + \\ &\quad z_1y_2y_3 + z_1x_2z_3 + z_1z_2x_3 + x_1z_2z_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 + y_1y_2z_3 + y_1 \\ &\quad y_1z_2z_3 + y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3 + x_1y_2y_3 + x_1x_2z_3 + x_1z_2x_3 + z_1x_2x_3 + z_1y_2z_3 + z_1 \end{aligned}$$

Que são iguais a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

- M_2) (Comutatividade da multiplicação): $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_1$,

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) &= (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2) \\ (x_2, y_2, z_2) \cdot (x_1, y_1, z_1) &= (x_2x_1 + z_2y_1 + y_2z_1, z_2z_1 + x_2y_1 + y_2x_1, y_2y_1 + x_2z_1 + z_2x_1) \end{aligned}$$

Que são iguais a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

- M_3) (Existência do elemento neutro da multiplicação): Existe $1 \in \mathbb{T}$, tal que $\mathfrak{z} \cdot 1 = \mathfrak{z}$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) &= (x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0, z \cdot 0 + x \cdot 0 + y \cdot 1, y \cdot 0 + x \cdot 0 + z \cdot 1) \\ &= (x + 0 + 0, 0 + 0 + y, 0 + 0 + z) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

- *AM) (Distributividade):* $\mathfrak{z}_1 \cdot (\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3) = \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_3$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 \cdot (\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3) &= \left(x_1(x_2 + x_3) + y_1(z_2 + z_3) + z_1(y_2 + y_3), \right. \\ &\quad z_1(z_2 + z_3) + x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3), \\ &\quad \left. y_1(y_2 + y_3) + x_1(z_2 + z_3) + z_1(x_2 + x_3) \right) \\ \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_3 &= \left(x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2 + x_1x_3 + y_1z_3 + z_1y_3, \right. \\ &\quad z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + z_1z_3 + x_1y_3 + y_1x_3, \\ &\quad \left. y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2 + y_1y_3 + x_1z_3 + z_1x_3 \right) \end{aligned}$$

Que são iguais a menos de reorganização dos termos em cada coordenada.

Em conjunto com a demonstração das propriedades $A1 - A4$ demonstradas no teorema anterior, verifica-se assim que os números Ternários (\mathbb{T}) possuem todas as propriedades relativas a um anel. \square

A questão do inverso multiplicativo dos ternários é um pouco delicada e é tratada na sequência.

4.0.10 elemento inverso de um número ternário

Como visto, os elementos de um anel não necessariamente têm inverso multiplicativo, quando todos os elementos do anel (com exceção do 0) são invertíveis esse anel é chamado corpo. O caso dos números complexos foi tratado e demonstrado ser um corpo. Resta saber se os números ternários formam não apenas um anel, mas um corpo. Para tanto, sejam um ternário $\mathfrak{z} = (x, y, z) \neq 0$, e (se existir) um $\mathfrak{z}' = (x', y', z')$ seu inverso, $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}' = 1$, ou seja:

$$\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}' = (xx' + yz' + zy', zz' + xy' + yx', yy' + xz' + zx') = (1, 0, 0) \quad (3)$$

Encontrar $\mathfrak{z}' = (x', y', z')$ implica resolver o seguinte sistema (onde as variáveis são x' , y' e z'):

$$\begin{cases} xx' + zy' + yz' = 1 \\ yx' + xy' + zz' = 0 \\ zx' + yy' + xz' = 0 \end{cases}$$

Para encontrar a solução do sistema acima pode-se utilizar a regra de Cramer (PAIVA, 1995). Na forma matricial, o sistema linear fica:

$$\begin{bmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer a solução é dada por $x' = \frac{D_x}{D}$, $y' = \frac{D_y}{D}$ e $z' = \frac{D_z}{D}$ (para $D \neq 0$), e onde D_x , D_y , D_z são os determinantes das matrizes:

$$D_x(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ 0 & x & z \\ 0 & y & x \end{bmatrix} = x^2 - yz$$

$$D_y(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & 1 & y \\ y & 0 & z \\ z & 0 & x \end{bmatrix} = z^2 - xy$$

$$D_z(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & z & 1 \\ y & x & 0 \\ z & y & 0 \end{bmatrix} = y^2 - xz$$

e D é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear:

$$D(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{bmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

Para $D(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \neq 0$ o sistema possui solução única. Nesse caso:

$$\mathfrak{d}^{-1} = \left(\frac{x^2 - yz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \frac{z^2 - xy}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \frac{y^2 - xz}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \right) \quad (4)$$

Nesse ponto é interessante estudar um pouco as propriedades do interessante polinômio cúbico $D(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Observa-se que ele é simétrico e homogêneo nas três variáveis x, y e z . É possível fatorar esse polinômio da seguinte maneira (a fatoração deste polinômio é apresentada com detalhes no apêndice A):

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) \frac{1}{2} [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$$

de onde pode-se deduzir que as raízes desse polinômio pertencem a dois conjuntos; o primeiro é o conjunto dos pontos no espaço tais que $(x + y + z) = 0$, que corresponde a um plano; que de agora em diante será denominado *plano π dos ternários não invertíveis*, e o segundo é o conjunto dos pontos no espaço tais que $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$, ou seja, $x = y = z$, que corresponde à reta que é a diagonal principal do primeiro e do oitavo octantes do espaço (a trissetriz, perpendicular ao plano π), e que de agora em diante será denominada *reta r dos ternários não invertíveis*:

$$\begin{aligned} \pi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}, \\ r &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \lambda \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Plotando o gráfico da superfície $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ obtém-se a superfície de revolução (VILLARINO, 2014) exibida na figura 1 - figura gerada utilizando o software Geogebra (GEOGEBRA, 2020). Essa superfície é conhecida na literatura como a *Esfera de Appell*, e suas propriedades geométricas estão profundamente relacionadas com a geometria dos números ternários “unitários” (ou também, com a *forma polar dos ternários*).

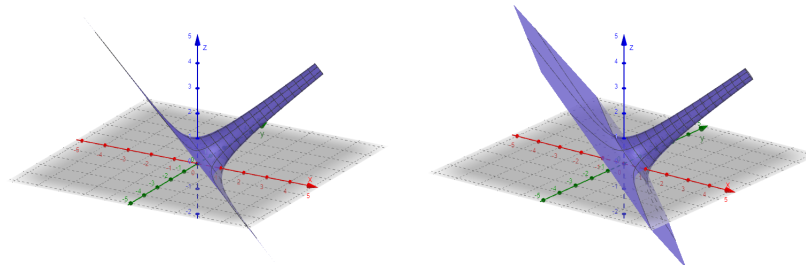


Figura 1. Gráfico da Esfera de Appell $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$

É fácil ver que qualquer ternário em π , ou em r não será invertível, o que demonstra a observação:

Teorema 4.0.4. \mathbb{T} não é um corpo.

Por exemplo $\mathfrak{z} = (1, 1, 1) \in r$, ou $\mathfrak{z} = (1, 1, -2) \in \pi$ não são invertíveis.

Será denotado por \mathbb{T}^* o conjunto dos elementos invertíveis do anel \mathbb{T} , ou seja, o conjunto dos ternários invertíveis é o anel inteiro dos ternários (o espaço \mathbb{R}^3 todo) com exceção dos pontos pertencentes à reta r e ao plano π :

$$\mathbb{T}^* = \mathbb{T} - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \lambda \text{ ou } x + y + z = 0\}$$

Reforçando, para todo $\mathfrak{z} \in \mathbb{T}^*$, o inverso \mathfrak{z}^{-1} de $\mathfrak{z} = (x, y, z)$ é único e dado por:

$$\mathfrak{z}^{-1} = \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} \cdot (x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - xz) \quad (5)$$

Será denotado por \mathbb{T}_0 o conjunto dos ternários não invertíveis:

$$\mathbb{T}_0 = \mathbb{T} - \mathbb{T}^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \lambda \text{ ou } x + y + z = 0\},$$

e por \mathbb{T}_π o conjunto dos ternários não invertíveis que pertencem ao plano π e \mathbb{T}_r o conjunto dos ternários não invertíveis que pertencem à trissetriz r :

$$\mathbb{T}_\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$\mathbb{T}_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \lambda\}$$

ou seja, $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_\pi \cup \mathbb{T}_r$. Além disso, o conjunto dos ternários invertíveis também pode ser particionado em dois subconjuntos distintos; $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$, ou seja; o conjunto dos ternários invertíveis é a união de dois conjuntos disjuntos, o conjunto de ternários tais que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz < 0$; simbolizado por $\mathbb{T}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz < 0\}$ e o conjunto de ternários tais que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0$; simbolizado por $\mathbb{T}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0\}$. Sintetizando:

- (\mathbb{T}_0) : (O conjunto dos números ternários não invertíveis)

$$\mathbb{T}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ ou } x = y = z\} = \mathbb{T}_\pi \cup \mathbb{T}_r,$$

onde:

- (\mathbb{T}_r) : (O conjunto dos números ternários não invertíveis da trissetriz)

$$\mathbb{T}_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = \lambda\}$$

- (\mathbb{T}_π) : (O conjunto dos números ternários não invertíveis do plano π)

$$\mathbb{T}_\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

- (\mathbb{T}^*) : (O conjunto dos números ternários invertíveis)

$$\mathbb{T}^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \neq 0\} = \mathbb{T} - \mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+.$$

onde:

- (\mathbb{T}_-) : (O conjunto dos números ternários de “módulo cúbico negativo”)

$$\mathbb{T}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz < 0\}$$

- (\mathbb{T}_+) : (O conjunto dos números ternários de “módulo cúbico positivo”)

$$\mathbb{T}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz > 0\}$$

- (\mathbb{T}) : (O conjunto dos números ternários)

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}^* \cup \mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_0 \cup \mathbb{T}_+ = \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_\pi \cup \mathbb{T}_r \cup \mathbb{T}_+.$$

O significado do termo “módulo cúbico” é dado posteriormente.

As figuras representando o plano π (figura 3) e a trissetriz r (figura 2) foram feitas utilizando o software Geogebra (GEOGEBRA, 2020). As superfícies $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = k^3$ ($k \neq 0$) são superfícies de revolução análogas à superfície da figura 1 (esferas de Appell de “raio” k) e que têm como eixo de simetria (o eixo de revolução) a reta r , e tendem assintoticamente ao plano π , assim como tendem assintoticamente à trissetriz r . Estas superfícies representam para a geometria tridimensional sistematizada na álgebra dos ternários papel análogo ao das curvas $x^2 + y^2 = k^2$ (circunferências de raio k) para a geometria representada pela álgebra dos números complexos; que é a própria geometria euclidiana plana. A questão da geometria tridimensional codificada pela álgebra dos ternários (que não é nem euclidiana, nem hiperbólica, mas Finsleriana) não é tratada nessa artigo.

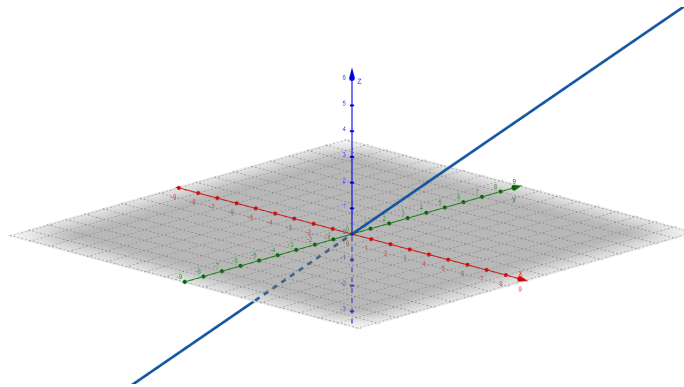


Figura 2. Trissetriz, números ternários não invertíveis \mathbb{T}_r

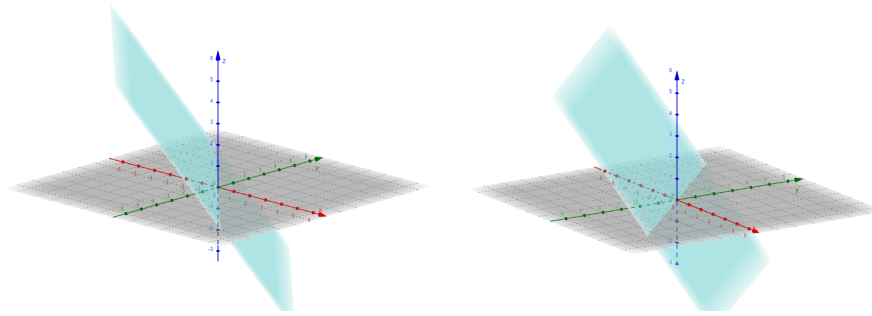


Figura 3. Plano π , números ternários não invertíveis \mathbb{T}_π

Como visto, o conjunto dos ternário é um anel comutativo, mas não é um corpo. Resta ainda a questão de saber se \mathbb{T} é, ou não, um domínio.

Observação: \mathbb{T} não é um domínio de integridade.

Demonstração. De acordo com definição apresentada em 2.4.1, o anel $(\mathbb{T}, +, \cdot)$ será um domínio de integridade se dados $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}$, tais que $\mathfrak{z}_1 \neq 0$ e $\mathfrak{z}_2 \neq 0$ obtivermos $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \neq 0$. Porém, tomando $\mathfrak{z}_1 = (1, -1, 0)$ e $\mathfrak{z}_2 = (1, 1, 1)$ e fazendo uso da multiplicação dos ternários verifica-se que

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 = (1 - 1 + 0, 0 - 1 + 1, -1 + 1 + 0) = (0, 0, 0) = 0,$$

logo \mathbb{T} não é um domínio de integridade. Generalizando o exemplo apresentado, é possível mostrar que para quaisquer $\mathfrak{z}_1 \in \mathbb{T}_r$ e $\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_\pi$ ocorrerá $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 = 0$. \square

Teorema 4.0.5. $(\mathbb{T}_r, +, \cdot)$ é um subanel de \mathbb{T} .

Demonstração. De acordo com definição 2.2.3, o conjunto $(\mathbb{T}_r, +, \cdot)$ será um subanel de \mathbb{T} se dados $\mathfrak{z} = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\mathfrak{z}_1 = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$, $\mathfrak{z}_2 = (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{T}_r$, (para quaisquer $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$):

- i) $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_r$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 &= (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \in \mathbb{T}_r \end{aligned}$$

- ii) $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_r$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 &= (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \\ &= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) \\ &= (3\lambda_1\lambda_2, 3\lambda_1\lambda_2, 3\lambda_1\lambda_2) \in \mathbb{T}_r\end{aligned}$$

- iii) $(0, 0, 0) \in \mathbb{T}_r$,

$$(0, 0, 0) = (\lambda, \lambda, \lambda) \in \mathbb{T}_r, \quad (\lambda = 0)$$

- iv) $-\mathfrak{z} \in \mathbb{T}_r$,

$$-(\lambda, \lambda, \lambda) = (-\lambda, -\lambda, -\lambda) \in \mathbb{T}_r.$$

□

Teorema 4.0.6. $(\mathbb{T}_\pi, +, \cdot)$ é um subanel de \mathbb{T} .

Demonstração. Também de acordo com definição 2.2.3, o conjunto $(\mathbb{T}_\pi, +, \cdot)$ será um subanel de \mathbb{T} se dados $\mathfrak{z} = (x, y, -x - y)$, $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1, -x_1 - y_1)$, $\mathfrak{z}_2 = (x_2, y_2, -x_2 - y_2) \in \mathbb{T}_\pi$:

- i) $\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_\pi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 &= (x_1, y_1, -x_1 - y_1) + (x_2, y_2, -x_2 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -x_1 - x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, -(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \in \mathbb{T}_\pi\end{aligned}$$

- ii) $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_\pi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 &= (x_1, y_1, -x_1 - y_1)(x_2, y_2, -x_2 - y_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)y_2, \\ &\quad (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + x_1y_2 + y_1x_2, \\ &\quad y_1y_2 - x_1(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)x_2) \\ &= (x_1x_2 - 2y_1y_2 - (x_1y_2 + y_1x_2), \\ &\quad x_1x_2 + y_1y_2 + 2(x_1y_2 + y_1x_2), \\ &\quad y_1y_2 - 2x_1x_2 - (x_1y_2 + y_1x_2)) \in \mathbb{T}_\pi\end{aligned}$$

- iii) $(0, 0, 0) \in \mathbb{T}_\pi$,

$$(0, 0, 0) = (x, y, -x - y) \in \mathbb{T}_\pi, \quad (x = y = 0)$$

- iv) $-\mathfrak{z} \in \mathbb{T}_\pi$,

$$-(x, y, -x - y) = (-x, -y, -(-x - y)) \in \mathbb{T}_\pi.$$

□

Teorema 4.0.7. $(\mathbb{T}_r, +, \cdot)$ é um ideal de \mathbb{T} .

Demonstração. De acordo com definição apresentada em 2.3.1, o conjunto $(\mathbb{T}_r, +, \cdot)$ será um ideal de \mathbb{T} se dados $\mathfrak{z} = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\mathfrak{z}_1 = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$, $\mathfrak{z}_2 = (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \in \mathbb{T}_r$, (para quaisquer $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), e $\mathfrak{z}' = (x', y', z') \in \mathbb{T}$:

- i) $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_r$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 &= (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) - (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) \in \mathbb{T}_r,\end{aligned}$$

- ii) $\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'\mathfrak{z} \in \mathbb{T}_r$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}\mathfrak{z}' &= (\lambda, \lambda, \lambda)(x', y', z') \\ &= (\lambda x' + \lambda z' + \lambda y', \lambda z' + \lambda y' + \lambda x', \lambda y' + \lambda z' + \lambda x') = (\mu, \mu, \mu) \in \mathbb{T}_r.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.0.8. $(\mathbb{T}_\pi, +, \cdot)$ é um ideal de \mathbb{T} .

Demonstração. Mais uma vez, de acordo com definição apresentada em 2.3.1, o conjunto $(\mathbb{T}_\pi, +, \cdot)$ será um ideal de \mathbb{T} se, dados $\mathfrak{z} = (x, y, -x - y)$, $\mathfrak{z}_1 = (x_1, y_1, -x_1 - y_1)$, $\mathfrak{z}_2 = (x_2, y_2, -x_2 - y_2) \in \mathbb{T}_\pi$, e $\mathfrak{z}' = (x', y', z') \in \mathbb{T}$:

- i) $\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{T}_\pi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2 &= (x_1, y_1, -x_1 - y_1) - (x_2, y_2, -x_2 - y_2) \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, -(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)) \in \mathbb{T}_\pi,\end{aligned}$$

- ii) $\mathfrak{z}\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'\mathfrak{z} \in \mathbb{T}_\pi$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{z}\mathfrak{z}' &= (x, y, -x - y)(x', y', z') \\ &= (xx' + yz' - (x + y)y', \\ &\quad -(x + y)z' + xy' + yx', \\ &\quad yy' + xz' - (x + y)x') \\ &= (xx' + yz' - xy' - yy', \\ &\quad -xz' - yz' + xy' + yx', \\ &\quad yy' + xz' - xx' - yx') \in \mathbb{T}_\pi.\end{aligned}$$

□

Na sequencia discute-se algumas definições convenientes para o estudo da álgebra dos números ternários.

4.1. A forma algébrica dos números ternários

Todo número ternário \mathfrak{z} pode ser escrito de maneira única na forma (aqui denominada, em analogia ao caso dos números complexos; *forma normal dos ternários*):

$$\mathfrak{z} = (x, y, z) = x + y\mathbf{q} + z\mathbf{q}^2 \quad (6)$$

onde $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{q} = (0, 1, 0)$, de maneira tal que pode-se ver facilmente pela regra de multiplicação ternária que $\mathbf{q}^2 = (0, 0, 1)$, e $y\mathbf{q} = (y, 0, 0)(0, 1, 0) = (0, y, 0)$, $z\mathbf{q}^2 = (z, 0, 0)(0, 0, 1) = (0, 0, z)$. Os ternários \mathbf{q} e \mathbf{q}^2 podem ser denominados *a primeira e a segunda unidades imaginárias ternárias*, respectivamente, em completa analogia com o caso dos números complexos. É possível observar a importante relação $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^2$ (e conseqüentemente $(\mathbf{q}^2)^{-1} = (\mathbf{q}^{-1})^{-1} = \mathbf{q}$). Multiplicando ambos os lados da relação $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}^{-1}$ por \mathbf{q} , revela que $\mathbf{q}^3 = 1$. De fato, todo o sistema de números ternários pode ser construído de outra maneira, partindo de operações com base nestas *três raízes cúbicas independentes da unidade*: 1, \mathbf{q} e \mathbf{q}^2 (independentes no sentido de formarem uma base linear de vetores unitários do \mathbb{R}^3).

Com base na analogia acima com números complexos, é apropriado designar as três entradas de um número ternário como o *a parte real*, *a primeira parte imaginária* e *a segunda parte imaginária* de \mathfrak{z} :

- A denominada parte real de \mathfrak{z} : $x = \Re(\mathfrak{z}) = \Re(x + y\mathbf{q} + z\mathbf{q}^2)$,
- A denominada primeira parte imaginária de \mathfrak{z} : $y = \Im_1(\mathfrak{z}) = \Im_1(x + y\mathbf{q} + z\mathbf{q}^2)$,
- A denominada segunda parte imaginária de \mathfrak{z} : $z = \Im_2(\mathfrak{z}) = \Im_2(x + y\mathbf{q} + z\mathbf{q}^2)$.

4.2. A função módulo cúbico

Quanto ao módulo no caso dos números ternários, uma função real definida para todo $\mathfrak{z} \in \mathbb{T}$, o módulo cúbico (ou pseudo-módulo, já que aqui ele pode assumir valores negativos), simbolizado por $|\mathfrak{z}|_3$, pode ser assim definido:

Definição 4.2.1. (Módulo Cúbico) Define-se $|\mathfrak{z}|_3 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ a função módulo cúbico como o número real associado ao número ternário $\mathfrak{z} = (x, y, z)$ dada por

$$|\mathfrak{z}|_3 = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}, \quad (7)$$

Esta função atribui um número real (positivo, negativo ou zero) a qualquer número ternário $\mathfrak{z} \in \mathbb{T}$, e induz uma partição no conjunto \mathbb{T} no sentido indicado no final da subseção 4.0.1:

- $\mathbb{T}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathfrak{z}|_3 = 0\} = \mathbb{T}_\pi \cup \mathbb{T}_r$: (O conjunto dos números ternários não invertíveis, ou o conjunto dos números ternários de módulo cúbico zero),
- $\mathbb{T}^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathfrak{z}|_3 \neq 0\} = \mathbb{T}_- \cup \mathbb{T}_+$: (O conjunto dos números ternários invertíveis, ou o conjunto dos números ternários de módulo cúbico não-nulo), onde:
- $\mathbb{T}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathfrak{z}|_3 < 0\}$: (O conjunto dos números ternários de módulo cúbico negativo)

- $\mathbb{T}_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathfrak{z}|_3 > 0\}$: (O conjunto dos números ternários de módulo cúbico positivo).

Além do mais, quando existe, o inverso de um ternário $\mathfrak{z} = (x, y, z)$ também pode ser escrito como

$$\mathfrak{z}^{-1} = \frac{1}{|\mathfrak{z}|_3^3} \cdot (x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - xz) \quad (8)$$

Assim como no caso das álgebras de composição com normas quadráticas, o módulo cúbico leva naturalmente a uma regra de composição da norma cúbica:

Proposição 4.2.2. (Propriedade da composição do módulo ternário): $|\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2|_3 = |\mathfrak{z}_1|_3 |\mathfrak{z}_2|_3$

Demonstração. Elevando os dois membros dessa equação ao cubo, é possível demonstrar algebricamente que $|\mathfrak{z}_1|_3^3 |\mathfrak{z}_2|_3^3 = |\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2|_3^3$, ou seja, que:

$$(x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3 - 3x_2y_2z_2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \quad (9)$$

onde $(a, b, c) = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2, z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2, y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2)$.

Por um lado temos:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{z}_1|_3^3 |\mathfrak{z}_2|_3^3 &= (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3 - 3x_2y_2z_2) \\ &= (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3) + 9x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad - 3\left((x_1^3 + y_1^3 + z_1^3)x_2y_2z_2 + (x_2^3 + y_2^3 + z_2^3)x_1y_1z_1\right) \end{aligned}$$

E, por outro lado:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)^3 + (z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2)^3 + (y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2)^3 \\ &\quad - 3(x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)(z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2)(y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2), \end{aligned}$$

trabalhando com cada termo do lado direito separadamente (e usando a identidade algébrica

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc):$$

$$\begin{aligned} a^3 &= (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)^3 = (x_1^3x_2^3 + y_1^3z_2^3 + z_1^3y_2^3) + 6x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad + 3(x_1^2x_2^2y_1z_2 + x_1x_2y_1^2z_2^2 + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1x_2z_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + y_1z_2z_1^2y_2^2) \\ b^3 &= (z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2)^3 = (z_1^3z_2^3 + x_1^3y_2^3 + y_1^3x_2^3) + 6x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad + 3(z_1^2z_2^2x_1y_2 + z_1z_2x_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1z_2y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2y_1x_2 + x_1y_2y_1^2x_2^2) \\ c^3 &= (y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2)^3 = (y_1^3y_2^3 + x_1^3z_2^3 + z_1^3x_2^3) + 6x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad + 3(y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1y_2x_1^2z_2^2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + y_1y_2z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + x_1z_2z_1^2x_2^2), \end{aligned}$$

e somando,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (x_1^3x_2^3 + y_1^3z_2^3 + z_1^3y_2^3 + z_1^3z_2^3 + x_1^3y_2^3 + y_1^3x_2^3 + y_1^3y_2^3 + x_1^3z_2^3 + z_1^3x_2^3) + 18x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad + 3(x_1^2x_2^2y_1z_2 + x_1x_2y_1^2z_2^2 + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1x_2z_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + y_1z_2z_1^2y_2^2) \\ &\quad + 3(z_1^2z_2^2x_1y_2 + z_1z_2x_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1z_2y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2y_1x_2 + x_1y_2y_1^2x_2^2) \\ &\quad + 3(y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1y_2x_1^2z_2^2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + y_1y_2z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + x_1z_2z_1^2x_2^2) \\ &= (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3) + 18x_1x_2y_1y_2z_1z_2 \\ &\quad + 3\left(x_1^2x_2^2y_1z_2 + x_1x_2y_1^2z_2^2 + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1x_2z_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + y_1z_2z_1^2y_2^2 \right. \\ &\quad \left. + z_1^2z_2^2x_1y_2 + z_1z_2x_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1z_2y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2y_1x_2 + x_1y_2y_1^2x_2^2 \right. \\ &\quad \left. + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1y_2x_1^2z_2^2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + y_1y_2z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + x_1z_2z_1^2x_2^2\right) \end{aligned}$$

e também o termo $-3abc = -3(x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)(z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2)(y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2)$, que pode ser calculado com o auxílio da identidade algébrica:

$$(x + X)(y + Y)(z + Z) = xyz + (xyZ + xzY + yzX) + (xYZ + yXZ + zXY) + XYZ,$$

portanto, $abc =$

$$\begin{aligned} &= (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)(z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2)(y_1y_2 + x_1z_2 + z_1x_2) \\ &= \left(x_1x_2 + (y_1z_2 + z_1y_2) \right) \left(y_1y_2 + (x_1z_2 + z_1x_2) \right) \left(z_1z_2 + (x_1y_2 + y_1x_2) \right) \\ &= x_1x_2y_1y_2z_1z_2 + \left(x_1x_2y_1y_2(x_1y_2 + y_1x_2) + x_1x_2z_1z_2(x_1z_2 + z_1x_2) + y_1y_2z_1z_2(y_1z_2 + z_1y_2) \right) \\ &\quad + \left(x_1x_2(x_1z_2 + z_1x_2)(x_1y_2 + y_1x_2) + y_1y_2(y_1z_2 + z_1y_2)(x_1y_2 + y_1x_2) + z_1z_2(y_1z_2 + z_1y_2)(x_1z_2 + z_1x_2) \right. \\ &\quad \left. + (y_1z_2 + z_1y_2)(x_1z_2 + z_1x_2)(x_1y_2 + y_1x_2) \right) \\ &= x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + \left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right) \\ &\quad + \left(x_1x_2(x_1^2y_2z_2 + z_1x_2x_1y_2 + x_1z_2y_1x_2 + x_2^2y_1z_1) + \right. \\ &\quad \quad y_1y_2(y_1^2z_2x_2 + y_1z_2x_1y_2 + z_1y_2y_1x_2 + y_2^2z_1x_1) + \\ &\quad \quad \left. z_1z_2(z_1^2y_2x_2 + y_1z_2z_1x_2 + z_1y_2x_1z_2 + z_2^2y_1x_1) \right) \\ &\quad + (y_1z_2 + z_1y_2)(x_1^2y_2z_2 + x_1y_1x_2z_2 + x_1z_1x_2y_2 + x_2^2y_1z_1) \\ &= x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + \left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right) \\ &\quad + \left((x_1^3x_2y_2z_2 + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1^2x_2^2y_1z_2 + x_2^3x_1y_1z_1) + \right. \\ &\quad \quad (y_1^3y_2z_2x_2 + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + y_2^3y_1z_1x_1) + \\ &\quad \quad \left. (z_1^3z_2y_2x_2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1^2z_2^2x_1y_2 + z_2^3z_1y_1x_1) \right) \\ &\quad + (x_1^2z_2^2y_1y_2 + y_1^2z_2^2x_1x_2 + x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + x_2^2y_1^2z_1z_2 + x_1^2y_2^2z_1z_2 + x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + z_1^2y_2^2x_1x_2 + x_2^2z_1^2) \\ &= 3x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + \left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right) \\ &\quad + \left(x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1^2x_2^2y_1z_2 + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1^2z_2^2x_1y_2 \right) \\ &\quad + \left(x_1^2z_2^2y_1y_2 + y_1^2z_2^2x_1x_2 + x_2^2y_1^2z_1z_2 + x_1^2y_2^2z_1z_2 + z_1^2y_2^2x_1x_2 + x_2^2z_1^2y_1y_2 \right) \\ &\quad + \left(x_1^3x_2y_2z_2 + y_1^3y_2z_2x_2 + z_1^3z_2y_2x_2 + x_2^3x_1y_1z_1 + y_2^3y_1z_1x_1 + z_2^3z_1y_1x_1 \right) \\ &= 3x_1y_1z_1x_2y_2z_2 + \left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right. \\ &\quad \quad + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1^2x_2^2y_1z_2 + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1^2z_2^2x_1y_2 \\ &\quad \quad \left. + x_1^2z_2^2y_1y_2 + y_1^2z_2^2x_1x_2 + x_2^2y_1^2z_1z_2 + x_1^2y_2^2z_1z_2 + z_1^2y_2^2x_1x_2 + x_2^2z_1^2y_1y_2 \right) \\ &\quad + (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3)x_2y_2z_2 + (x_2^3 + y_2^3 + z_2^3)x_1y_1z_1 \end{aligned}$$

e então,

$$\begin{aligned}
 -3abc &= -9x_1y_1z_1x_2y_2z_2 - 3\left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right. \\
 &\quad + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1^2x_2^2y_1z_2 + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1^2z_2^2x_1y_2 \\
 &\quad \left. + x_1^2z_2^2y_1y_2 + y_1^2z_2^2x_1x_2 + x_2^2y_1^2z_1z_2 + x_1^2y_2^2z_1z_2 + z_1^2y_2^2x_1x_2 + x_2^2z_1^2y_1y_2\right) \\
 &\quad - 3\left((x_1^3 + y_1^3 + z_2^3)x_2y_2z_2 + (x_2^3 + y_2^3 + z_2^3)x_1y_1z_1\right)
 \end{aligned}$$

de maneira que,

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3) + 18x_1x_2y_1y_2z_1z_2 - 9x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \\
 &\quad - 3\left((x_1^3 + y_1^3 + z_2^3)x_2y_2z_2 + (x_2^3 + y_2^3 + z_2^3)x_1y_1z_1\right) + \\
 &\quad + 3\left(x_1^2x_2^2y_1z_2 + x_1x_2y_1^2z_2^2 + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1x_2z_1^2y_2^2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + y_1z_2z_1^2y_2^2 \right. \\
 &\quad + z_1^2z_2^2x_1y_2 + z_1z_2x_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1z_2y_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2y_1x_2 + x_1y_2y_1^2x_2^2 \\
 &\quad \left. + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1y_2x_1^2z_2^2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + y_1y_2z_1^2x_2^2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + x_1z_2z_1^2x_2^2\right) \\
 &\quad - 3\left(x_1^2y_2^2y_1x_2 + y_1^2x_2^2x_1y_2 + x_1^2z_2^2z_1x_2 + z_1^2x_2^2x_1z_2 + y_1^2z_2^2z_1y_2 + z_1^2y_2^2y_1z_2 \right. \\
 &\quad + x_1^2x_2^2z_1y_2 + x_1^2x_2^2y_1z_2 + y_1^2y_2^2x_1z_2 + y_1^2y_2^2z_1x_2 + z_1^2z_2^2y_1x_2 + z_1^2z_2^2x_1y_2 \\
 &\quad \left. + x_1^2z_2^2y_1y_2 + y_1^2z_2^2x_1x_2 + x_2^2y_1^2z_1z_2 + x_1^2y_2^2z_1z_2 + z_1^2y_2^2x_1x_2 + x_2^2z_1^2y_1y_2\right) \\
 &= (x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1)(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3 - 3x_2y_2z_2)
 \end{aligned}$$

□

A questão do conjugado dos números ternários não será tratada neste trabalho. Vale apenas ressaltar que, diferentemente do caso complexo, os números ternários admitem naturalmente um conjugado *ternário*, e não *dual* (vide o item 6 da proposição 3.2.2), no sentido de que o *conjugado do conjugado do conjugado* de um número ternário é ele mesmo!

4.3. A representação matricial dos números ternários

Como foi feito para o caso dos números complexos, uma maneira alternativa de se representar os números ternários, com matrizes, pode ser feito. Lembrando a forma algébrica dos números ternários:

$$\mathfrak{z} = (x, y, z) = x + y\mathbf{q} + z\mathbf{q}^2$$

representando por Q a matriz 3×3 , que é uma matriz circulante estudada em (FILHO; OTTONI, 2019) e (DAVIS, 1979) geometricamente corresponde à rotação de um ângulo de $120^\circ = \frac{2\pi}{3}rad$

em torno da reta r , a trissetriz, no espaço \mathbb{R}^3 :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

diz-se então que Q é uma *representação matricial do número ternário* $\mathbf{q} = (0, 1, 0)$, pois,

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (11)$$

então, Q^2 é uma representação matricial do número ternário $\mathbf{q}^2 = (0, 0, 1)$, e obviamente I , a matriz identidade 3×3 , é a representação aqui da unidade real 1.

Assim, um número real puro qualquer x pode ser associado à matriz

$$xI = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix},$$

um número “primeiro imaginário puro” pode ser associado à matriz

$$yQ = y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix},$$

e um número “segundo imaginário puro” pode ser associado à matriz

$$zQ^2 = z \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de maneira que um número ternário qualquer $\mathbf{z} = (x, y, z)$ pode ter sua representação matricial na forma geral

$$\mathbf{z} = xI + yQ + zQ^2 = x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{bmatrix}.$$

É interessante observar que o determinante da matriz que representa esse número ternário geral qualquer é precisamente $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

5. APLICAÇÃO NA SALA DE AULA

Visando a utilização de temas da álgebra em sala de aula, foi elaborada a seguinte atividade para explorar conteúdos de álgebra.

A atividade foi realizada com os alunos do terceiro ano do Ensino Médio, alunos da Escola Estadual Doutor Arthur Bernardes (Sete-Lagoas/MG). Seguindo o Plano de Curso de Matemática - 2023 (CURSO, 2023), o objeto de conhecimento para o ensino da Geometria Analítica eram as matrizes. Devido a isso, surgiu a necessidade de se revisar as operações básicas com matrizes, devido a uma certa defasagem do ano anterior.

Para poder trabalhar com os alunos a resolução de sistemas lineares e a condição de alinhamento de três pontos no plano, saberes que são necessários na matéria de Geometria Plana, foi necessário introduzir aos alunos os conceitos de igualdade, soma, subtração e multiplicação de matrizes. Esses conteúdos foram distribuídos e trabalhados da seguinte maneira (cada aula apresentada tem a duração de 50 minutos):

- Aula 1) Explicação sobre soma e subtração de matrizes. Aula expositiva e explicativa, com resolução de atividades em sala sobre o assunto apresentado,
- Aula 2) Correção da atividade da aula passada sobre soma e subtração de matrizes,
- Aula 3) Multiplicação de matrizes. Nessa aula iniciou-se o aprendizado da multiplicação de matrizes com matrizes na forma 2×2 ,
- Aula 4) Atividades sobre multiplicação de matrizes, uma observação foi concluída pelos alunos - o produto das matrizes nem sempre é comutativo,
- Aula 5) Nessa aula, para introduzir a atividade elaborada abaixo, foi explicado aos alunos conhecimentos fundamentais sobre o conjunto dos números complexos, sendo salientado para eles que não existe apenas o conjunto dos números reais. Nessa aula apresentou-se também a representação matricial dos números complexos.

Após o desenvolvimento das aulas acima, segue a atividade proposta.

5.1. A proposta

Foi apresentado aos alunos a matriz 2×2 que é a representação matricial do número complexo $z = a + bi$. Apresentou-se para a turma a definição de um grupo aditivo abeliano, e os alunos, dispostos em grupos de quatro pessoas, tinham como tarefa investigativa verificar se, de fato, o conjunto das matrizes 2×2 que é a representação matricial dos números complexos, é um grupo aditivo abeliano.

5.1.1. Atividade 01 - Grupo Aditivo Abeliano

Apresentada a matriz abaixo, que é a representação matricial do número complexo $z = a + bi$ (conforme a seção 3.4):

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

foi solicitado aos alunos que verificassem que as matrizes de ordem 2×2 representam um grupo aditivo abeliano, ou seja, que a soma usual de matrizes de ordem 2×2 obedece às propriedades de associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e existência do simétrico:

- i) (*Associatividade da soma*): $A + (B + C) = (A + B) + C$,
- ii) (*Comutatividade da soma*): $A + B = B + A$,
- iii) (*Existência do elemento neutro da soma*): $A + 0 = 0 + A = A$, onde 0 é a matriz nula,
- iv) (*Existência do simétrico*): $A + A' = A' + A = 0$, onde 0 é a matriz nula,

ou seja, os alunos deveriam verificar que:

- i) (*Associatividade da soma*)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+e & -d-f \\ d+f & c+e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c+e & -b-d-f \\ b+d+f & a+c+e \end{bmatrix},$$

que é igual ao lado direito da equação matricial,

$$\begin{bmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c+e & -b-d-f \\ b+d+f & a+c+e \end{bmatrix}.$$

- ii) (*Comutatividade da soma*)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{bmatrix},$$

que é igual a,

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+a & -d-b \\ d+b & c+a \end{bmatrix}.$$

- iii) (*Existência do elemento neutro da soma*)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

- iv) (Existência do simétrico)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dessa maneira, pode-se afirmar que as matrizes apresentadas caracterizam um grupo aditivo abeliano. Os alunos conseguiram demonstrar que o conjunto das matrizes 2×2 que forma uma representação matricial dos números complexos, de fato caracteriza um grupo aditivo abeliano. Alguns alunos apresentaram dificuldades na compreensão da propriedade da comutatividade. Outros conseguiram resolver a atividade investigativa sem dificuldades. Na sequência, segue outra proposta de atividades semelhante à anterior.

5.1.2 Atividade 02 - Grupo Multiplicativo Abeliano

Uma vez mais, apresentada a matriz abaixo, que é a representação matricial dos números complexos $z = a + bi$:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

solicitou-se aos alunos que verificassem que o conjunto das matrizes 2×2 que forma uma representação matricial dos números complexos é um grupo multiplicativo abeliano, ou seja, que o produto desse tipo de matrizes de ordem 2×2 obedece às propriedades de associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e existência do inverso:

- i) (Associatividade do produto): $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
- ii) (Comutatividade do produto): $A \cdot B = B \cdot A$,
- iii) (Existência do elemento neutro do produto): $A \cdot I = I \cdot A = A$, onde I é a matriz identidade 2×2 ,
- iv) (Existência do inverso): $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$,

ou seja, os alunos deveriam verificar que:

- i) (Associatividade do produto)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ce - df & -cf - de \\ de + cf & -df + ce \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace - adf - bde - bcf & -acf - ade + bdf - bce \\ bce - bdf + ade + acf & -bcf - bde - adf + ace \end{bmatrix},$$

que é igual a

$$\begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ace - bde - adf - bcf & -acf + bdf - ade - bce \\ bce + ade - bdf + acf & -bcf - adf - bde + ace \end{bmatrix}$$

- ii) (Comutatividade do produto)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix},$$

que é igual a,

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca - db & -cb - da \\ da + cb & -db + ca \end{bmatrix}.$$

- iii) (Existência do elemento neutro do produto)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

- iv) (Existência do simétrico)

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab-ba}{a^2+b^2} \\ \frac{ba-ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2+a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a comutatividade também é uma propriedade válida para o conjunto específico das matrizes apresentadas, segue que esse conjunto de matrizes representa um grupo multiplicativo abeliano. Através dessas atividades pode-se exercitar com os alunos algumas noções de estruturas algébricas básicas.

5.2. Conclusão geral sobre a atividade aplicada e a atividade proposta

Levar os alunos a compreender que a matemática vai além do que é apresentado nos planos curriculares propostos é a motivação para a atividade acima. O intuito era levar os alunos ao exercício do pensamento algébrico mais abstrato, algo que não é usualmente apresentado na sala de aula, e apresentar para os mesmos um pouco das estruturas algébricas e conjuntos numéricos de interesse matemático, que o conteúdo da matemática moderna não se resume somente ao conjunto dos números reais, além de explicar que um número pode ser representado de uma forma diferente da usual, no caso, como uma representação matricial.

Os alunos acolheram a atividade de forma bem receptiva, se sentiram desafiados e tiveram disposição para concluir a atividade. A atividade 2 ainda segue como uma proposta de continuação da atividade 1, mostrando um caso especial onde a multiplicação é comutativa.

6. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou algumas estruturas algébricas elementares como grupos, subgrupos, anéis, ideais e corpos. Para melhor compreensão do leitor, cada definição apresentada possui exemplos. Apresentou-se o conjunto dos números complexos onde verificou-se sua estrutura algébrica concluindo que o mesmo é um corpo, apresentou-se também o elemento inverso de um número complexo, a forma algébrica, o conjugado, o módulo e a representação matricial dos números complexos. Também foi realizada uma aula prática com alunos do ensino médio, mostrando a aplicação da definição de grupos com a representação matricial dos números complexos.

Como objeto principal de estudo, apresentou-se uma investigação sobre os números ternários, onde foram utilizadas as definições apresentadas de estruturas algébricas para se classificar o novo conjunto em estudo. Verificou-se que o mesmo representa um anel, porém os números que não possuem inverso apresentam algumas intrigantes propriedades. O curioso polinômio cúbico $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ se fez presente, revelando o papel de uma superfície cúbica muito peculiar denominada *Esfera de Appell*.

O desenvolvimento do estudo desse relativamente novo conjunto numérico foi feito o tempo todo em analogia com o conjunto dos números complexos, ou seja, apresentou-se também nesse caso sua estrutura algébrica, elemento inverso (quando há), foi apresentada sua forma algébrica, a função módulo cúbico, e por fim, uma representação matricial dos números ternários.

Neste trabalho não foi possível realizar a apresentação da forma polar dos números ternários, nem o caso dos conjugados para os ternários. Portanto, como perspectiva de trabalho futuro pode-se esperar um estudo mais aprofundado das funções hiperbólicas e trigonométricas de terceira ordem (MOREIRA; OTTONI; OTTONI, 2022) e sua relação com a forma polar dos números ternários, além de uma investigação sobre os conjugados dos números ternários.

7. APÊNDICE A: O POLINÔMIO $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

A primeira de muitas (MACHALE, 1991) propriedades interessantes observada no polinômio cúbico de três variáveis $D(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ é que o mesmo é simétrico em suas três variáveis, ou seja, é o mesmo para todas as permutações de x, y e z :

$$D(x, y, z) = D(y, x, z) = D(x, z, y) = D(y, z, x) = D(z, y, x) = D(z, x, y).$$

Observa-se que $D(x, y, z)$ é homogêneo de grau 3, ou seja, $D(tx, ty, tz) = t^3 f(x, y, z)$. Para fatorar esse polinômio pode-se proceder seguindo alguns passos, através da bem conhecida identidade algébrica:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y), \end{aligned}$$

de maneira que,

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= [(x + y)^3 - 3xy(x + y)] + z^3 - 3xyz \\ &= [(x + y)^3 + z^3] - 3xy(x + y) - 3xyz \\ &= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2) - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + 2xy - xz - yz + z^2 - 3xy) \end{aligned}$$

finalmente,

$$D(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz). \quad (12)$$

fatoração essa que leva aos seguintes resultados:

Teorema 7.0.1. Se $x = y = z$ ou $x + y + z = 0$, então $D(x, y, z) = 0$, ou seja; $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Demonstração. Evidente por (12). □

Teorema 7.0.2. Se $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $D(x, y, z) = 0$, então $x + y + z = 0$ ou $x = y = z = 0$. Em ambos os casos $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy$.

Demonstração. Por (12) tem-se que, se $D(x, y, z) = 0$, então ou $x + y + z = 0$ ou $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$. Se for o segundo caso, multiplicando essa equação por 2 e reorganizando, obtém-se $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$. Como x, y e $z \in \mathbb{R}$, conclui-se imediatamente que $x = y = z$. E se $x = y = z$, claramente $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy$. Se $x + y + z = 0$, $x = -(y + z)$ então $x^2 - yz = (y + z)^2 - yz = y^2 + yz + z^2$. Então $y^2 - zx = y^2 + z(y + z) = y^2 + yz + z^2 = z^2 + (y + z)y = z^2 - xy$. □

A prova do teorema 7.0.2 estabelece o seguinte:

Teorema 7.0.3. $D(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$.

Demonstração. Multiplicando e dividindo (12) por 2:

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + x^2 - 2xz + z^2) \\ &= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \end{aligned}$$

□

Teorema 7.0.4. Se x, y e z são números reais não negativos, $D(x, y, z) \geq 0$, com a igualdade válida somente se $x = y = z$.

Isso também pode ser deduzido elegantemente através da famosa desigualdade M.A. (Média Aritmética) \geq M.G. (Média Geométrica): Se $a, b, c \geq 0$, então $\frac{1}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{abc}$. Colocando $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ tem-se que $\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) \geq \sqrt[3]{x^3y^3z^3} = xyz$, que dá o resultado desejado.

8. REFERÊNCIAS

ABRAMOV, V.; KERNER, R.; ROY, B. L. Hypersymmetry: a z_3 -graded generalization of supersymmetry. **Journal of Math.Phys.**, v. 38, n. 3, p. 1650–1669, 1997.

APPELL, P. Proposition d’algèbre et de géométrie déduit de la considération des racines cubiques de l’unité’. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences**, p. 540, 1877.

_____. Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Académie des Sciences**, p. 1378, 1877.

CURSO, P. de. **Plano de Curso 2023**. 2023. [Http://tinyurl.com/hjw4fy5a](http://tinyurl.com/hjw4fy5a).

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2012.

DAVIS, P. **Circulant Matrices**. Wiley, 1979. (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics). ISBN 9780471057710. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2wrvAAAAMAAJ>>.

DEUS, N. C. L.; OTTONI, J. E.; OTTONI, A. G. S. **A álgebra dos números ternários**. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT/CAP - Universidade Federal de São João del Rei, 2023.

DEVISME, J. Sur une généralisation de l’équation de laplace. **J. Math. Pures Appl.** 19 (1940) 359, v. 8, p. 145–159, 1929.

_____. Sur l’équation de m. pierre humbert. **Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques, Série 3**, v. 25, p. 143–238, 1933. Disponível em: <<http://www.numdam.org/item/AFST-1933-3-25-143-0/>>.

DOMINGUES, H. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.

FILHO, E. P. A.; OTTONI, J. E. As elegantes matrizes circulantes. Dissertação (mestrado) PROFMAT - Universidade Federal de São João Del Rei, 2019.

FLEURY, N.; TRAUBENBERG, M. R. de; YAMALEEV, R. M. Commutative extended complex number and connected trigonometry. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 180, n. 180, p. 431–457, 1993.

_____. Extend complex number analysis and conformal-like transformation. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 191, n. 1, p. 118–136, 1995.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. IMPA, 2013. (Projeto Euclides). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gljBsgEACAAJ>>.

GEOGEBRA. **Free Software Foundation**. 2020. <http://www.geogebra.org>.

HEFEZ, A. **Curso de álgebra, volume 1. Coleção Matemática Universitária**. [S.l.]: IMPA, 2011.

HUMBERT, P. Note relative à l'article: Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques. **Commentarii Mathematici Helvetici, Bull. Math**, v. 13, n. 1, p. 67, 1940.

_____. Géométrie plane dans l'espace attaché à l'opérateur δ_3 . **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, Gauthier-Villars, v. 9, n. 21, 1942. Disponível em: <http://www.numdam.org/item/JMPA_1942_9_21__141_0/>.

_____. Réduction de formes quadratiques dans un corps algébrique fini. **Commentarii Mathematici Helvetici, Bull. Math**, v. 23, n. 1, p. 50–63, 1949.

JANESCH, O.; TANEJA, I. **Algebra I**. UFSC/EAD, 2008. ISBN 9788599379486. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=l-RhkgEACAAJ>>.

KERNER, R. Graduation z_3 et la racine cubique de l' équation de dirac. **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris**, v. 312, n. II, p. 191–195, 1991.

_____. Z_3 -graded algebras and the cubic root of the supersymmetry translations. **J. Math. Phys.**, v. 33, p. 403, 1992.

_____. Cubic and ternary algebras, ternary symmetries and the lorentz group. **Proceedings of Math. Phys. Conference, RIMS**, v. 1705, p. 134–146, 2010.

_____. Ternary generalization of pauli's principle and the z_6 -graded algebras. **Physics of Atomic Nuclei**, v. 80, n. 3, p. 529–531, 2017. Disponível em: <arXiv:1111.0518,arXiv:0901.3961>.

_____. **Mathematical Structures and Applications**. [S.l.]: Springer, 2018. 311-357 p.

_____. Ternary $z_2 \times z_3$ graded algebras and ternary dirac equation. **Physics of Atomic Nuclei**, v. 81, n. 6, p. 871–889, 2018. Disponível em: <arXiv:1801.01403>.

_____. The quantum nature of lorentz invariance. **Universe**, v. 5, n. 1, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/universe5010001>>.

____. The z3-graded extension of the poincaré group. **Preprint**, 2023. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/335028563_The_Z3-graded_extension_of_the_Poincar'e_group[accessedAug202023]>.

KERNER, R.; LUKIERSKI, J. Z3-graded colour dirac equation for quarks, confinement and generalized lorentz symmetries. **Phys. Letters B**, v. 792, p. 233–237, 2019. Disponível em: <arXiv:1901.10936[hep-th]>.

KERNER, R.; SUZUKI, O. The discrete quantum origin of the lorentz group and the z3-graded ternary algebras. **Proceedings of the RIMS Conference on Mathematical Physics**, p. 54–72, 2014. Disponível em: <<https://ci.nii.ac.jp/naid/110009863886>>.

LEQUAIN, Y.; GARCIA, A. **Álgebra: uma introdução**. IMPA, 1983. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=NCyxAAAAIAAJ>>.

LIPATOV, L.; TRAUBENBERG, R. M.; VOLKOV, G. G. On the ternary complex analysis and its applications. **J. Math. Phys.** **49(1)**, 013502, 2008.

MACHALE, D. My favourite polynomial. **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 75, n. 472, p. 158, 1991.

MOREIRA, T. G.; OTTONI, J. E.; OTTONI, A. G. c. S. Funções trigonométricas e hiperbólicas de terceira ordem. **Revista de Matemática**, v. 1, n. 01, p. 39, 2022.

OLARIU, S. Hyperbolic complex numbers in two dimensions (arxiv:math.cv/0008119); complex numbers in three dimensions (arxiv:math.cv/0008120); commutative complex numbers in four dimensions (arxiv:math.cv/0008121); complex numbers in 5 dimensions (arxiv:math.cv/0008122); complex numbers in 6 dimensions (arxiv:math.cv/0008123); polar complex numbers in n dimensions (arxiv:math.cv/0008124); planar complex numbers in even n dimensions (arxiv:math.cv/0008125), exponential forms and path integrals for complex numbers in n dimensions (arxiv:math.0a/0007180). **ArXiv**, 2000.

PAIVA, M. R. **Matemática**. 1. ed. [S.l.]: Editora Moderna, 1995. v. 2.

POLCINO, C. M. Breve história da álgebra abstrata. **Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM**. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. IMPA, 2007. (Matemática universitária). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=GVXonAEACAAJ>>.

SOUZA, J. A. Uma nota sobre a teoria dos grupos: da teoria de galois à teoria de gauge. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 12, n. 24, p. 71–81, 2012.

VILLARINO, M. B. A cubic surface of revolution. **The Mathematical Gazette**, Cambridge University Press, v. 98, n. 542, p. 281–290, 2014.