RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024

Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática

Juan López Linares
<jlopez@usp.br>
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos,
Universidade de São Paulo, Pirassununga, São Paulo, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>

Resumo
Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. Uma introdução dos conteúdos relativos ao cálculo de áreas é apresentada. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas, utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e interessem-se em problemas mais desafiadores.

Palavras-chave: *Olimpíadas internacionais de Matemática, Cálculo de áreas, Problemas resolvidos, Ensino Médio e Universitário, Geometria.*

1. INTRODUÇÃO

O cálculo de áreas aparece com frequência nos problemas de olimpíadas coligada a diversos assuntos. Neste artigo são resolvidos cinco, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os mesmos foram propostos na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad). Embora úteis, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas olímpicos não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções encontram-se frequentemente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as discussões no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Baricentro (LINARES; SANTOS; JESUS, 2021a), Incírculos e Ex-incírculos (LINARES; SANTOS; JESUS, 2021b), a Desigualdade de Ptolomeu (LINARES et al., 2022) e Trigonometria (LINARES; BRUNO-ALFONSO, 2023). Na Seção 2 é feita uma breve introdução de alguns conceitos básicos, utilizados neste trabalho, sobre o cálculo de áreas. O leitor já familiarizado com a teoria pode passar diretamente para a Seção 3, onde são enunciados e resolvidos cinco problemas IMO.

2. ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS SOBRE O CÁLCULO DE ÁREAS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

2.1. Fórmula tradicional para a área de triângulo

Utiliza-se a notação $[A_1A_2\cdots A_n]$ para denotar a área de um polígono de n lados.

Proposição 2.1. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a, CA = b$ e $AB = c$ e alturas h_a, h_b e h_c. Então vale:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c. \tag{1}$$

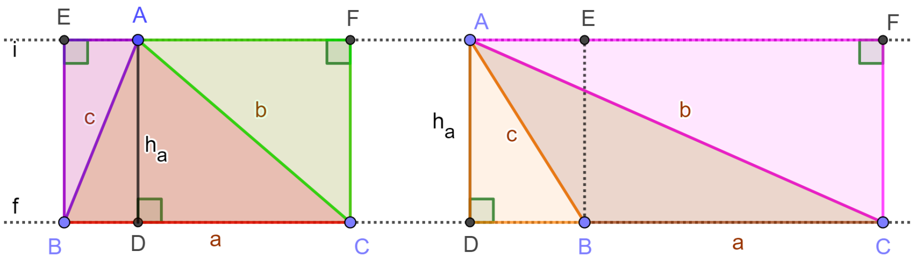

Figura 1. Fórmula tradicional para o cálculo de área de triângulo. Versão interativa aqui.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A. Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 1) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 1).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 1). Neste caso vale que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}[BDAE] - \frac{1}{2}[DCFA],$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}BD \cdot h_a - \frac{1}{2}(a - BD) \cdot h_a,$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 1). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B. Neste caso vale que:

$$[\triangle ABC] = [ADCF] - \frac{1}{2}[ADBE] - \frac{1}{2}[ADCF],$$

$$[\triangle ABC] = (DB + a)h_a - \frac{1}{2}DB \cdot h_a - \frac{1}{2}(a + DB) \cdot h_a,$$

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2}a \cdot h_a.$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando outro par de lado e altura correspondente. $\square$

A equação (1) também implica uma correlação entre lados e alturas de um $\triangle ABC$, pois pode ser escrita como:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c. \tag{2}$$

Corolário 2.1. *Sejam r e s retas paralelas e A e B pontos distintos sobre a reta r e C e D pontos distintos sobre a reta s. Então,*

$$[\triangle ABC] = [\triangle ABD].$$

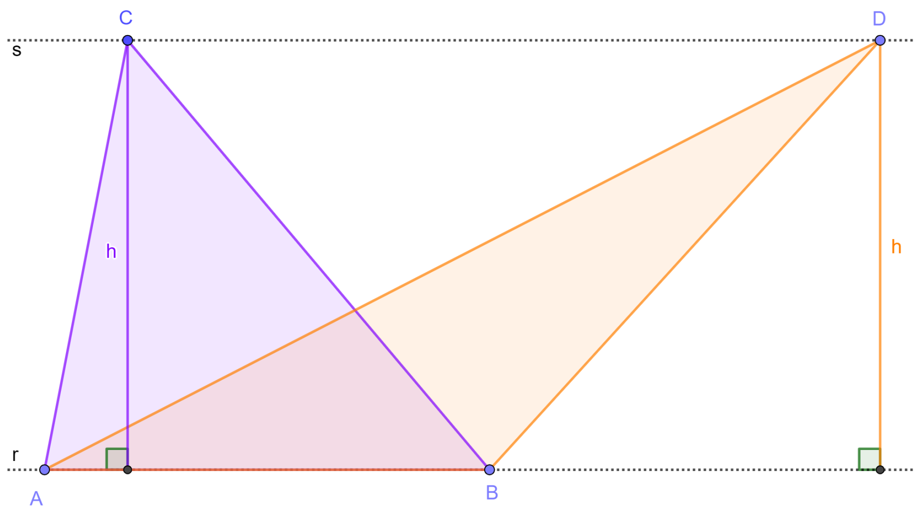

Figura 2. Triângulos de igual área entre retas paralelas. Versão interativa aqui.

Demonstração. Como os dois triângulos têm a mesma medida da base e altura, pela Proposição 2.1, as áreas são iguais:

$$\frac{AB \cdot h}{2}.$$

□

2.2. Área com dois lados e o ângulo que eles determinam

Proposição 2.2. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ e $\angle C = \gamma$. Então vale:*

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen}(\gamma) = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \operatorname{sen}(\alpha). \tag{3}$$

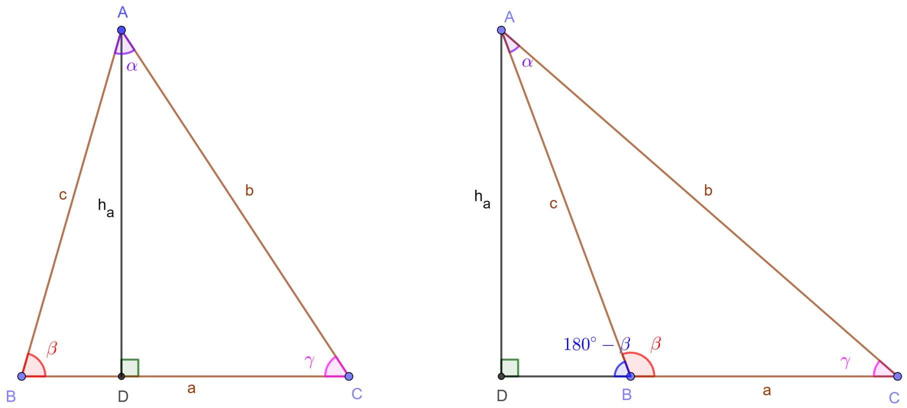

Figura 3. Área de um triângulo com dois lados e o ângulo que eles determinam. Versão interativa aqui.

Demonstração. Seja o ponto D pé da altura do vértice A. Serão considerados dois casos: i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 3) e ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 3).

i) O ponto D está no interior do segmento BC (esquerda da Figura 3). No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{ sen}\,(\beta).$$

Pela Proposição 2.1 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} a \cdot h_a.$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{ sen}\,(\beta).$$

ii) O ponto D está no exterior do segmento BC (direita da Figura 3). Suponha-se, sem perda de generalidade, que D esteja a esquerda do ponto B. No $\triangle ADB$ vale que:

$$h_a = c \cdot \text{ sen}\,(180° - \beta) = c \cdot \text{ sen}\,(\beta).$$

Pela Proposição 2.1 tem-se:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

Segue que:

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \text{ sen}\,(\beta).$$

Analogamente demonstra-se a fórmula utilizando os outros pares de lados e ângulos correspondentes. □

A equação (3) também pode ser vista como um invariante, quando escrita como:

$$c \cdot a \cdot \text{ sen}\,(\beta) = a \cdot b \cdot \text{ sen}\,(\gamma) = b \cdot c \cdot \text{ sen}\,(\alpha). \tag{4}$$

2.3. Fórmula de Heron

Proposição 2.3. *Seja o $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e p o semiperímetro. Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

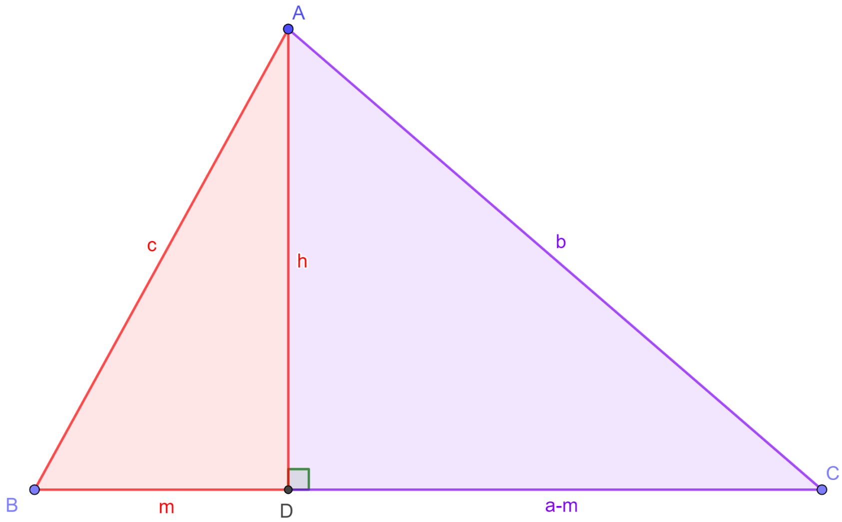

Figura 4. Área de um triângulo utilizando a fórmula de Heron. Versão interativa aqui.

Demonstração. Sejam o ponto D e o segmento $BD = m$ as projeções ortogonais do ponto A e do lado AB sobre BC, respectivamente (Figura 4). Aplicando o Teorema de Pitágoras nos $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$ encontra-se:

$$h^2 = c^2 - m^2, \tag{5}$$

$$h^2 = b^2 - (a-m)^2. \tag{6}$$

Igualando as equações (5) e (6) pode ser colocado m em evidência:

$$c^2 - m^2 = b^2 - (a-m)^2,$$

$$c^2 - \cancel{m^2} = b^2 - a^2 + 2am - \cancel{m^2},$$

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \tag{7}$$

A equação (7) é substituída em (5) e a expressão simplificada:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2,$$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2.$$

Utilizando as propriedades da diferença de quadrados e do binômio quadrado perfeito encontra-se:

$$4a^2h^2 = \left(2ac + a^2 + c^2 - b^2\right)\left(2ac - a^2 - c^2 + b^2\right),$$
$$4a^2h^2 = \left((a+c)^2 - b^2\right)\left(b^2 - (a-c)^2\right),$$
$$4a^2h^2 = (a+c+b)(a+c-b)(b-a+c)(b+a-c)\,. \tag{8}$$

Cada um dos parêntesis no lado direito de (8) pode ser escrito em função do semiperímetro p :

$$4a^2h^2 = 2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c)\,,$$
$$\frac{a^2h^2}{4} = p(p-b)(p-a)(p-c),$$
$$[\triangle ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$\square$

2.4. Área de um triângulo utilizando o incírculo

Proposição 2.4. *Seja o* $\triangle ABC$ *de lados* $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ e r *o raio da circunferência inscrita neste (Figura 5). Então vale que:*

$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

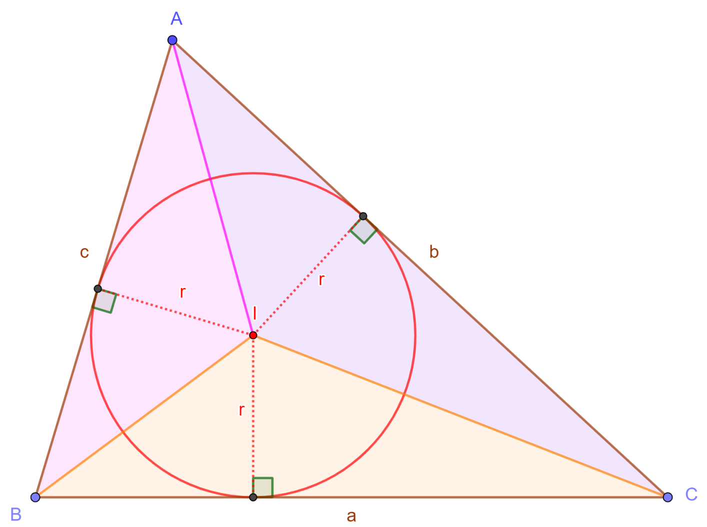

Figura 5. Área de um triângulo utilizando o incírculo. Versão interativa aqui.

Demonstração. Nota-se na Figura 5 que a área do $\triangle ABC$ pode ser calculada como a soma das áreas de outros três triângulos que utilizam, como um dos seus vértices, o incentro I:

$$[\triangle ABC] = [\triangle BCI] + [\triangle CAI] + [\triangle ABI],$$
$$[\triangle ABC] = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2},$$
$$[\triangle ABC] = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r,$$
$$[\triangle ABC] = p \cdot r.$$

□

2.5. Relação entre as áreas de triângulos semelhantes

Proposição 2.5. *Se dois triângulos são semelhantes com ração de semelhança k, então a ração das áreas é k^2.*

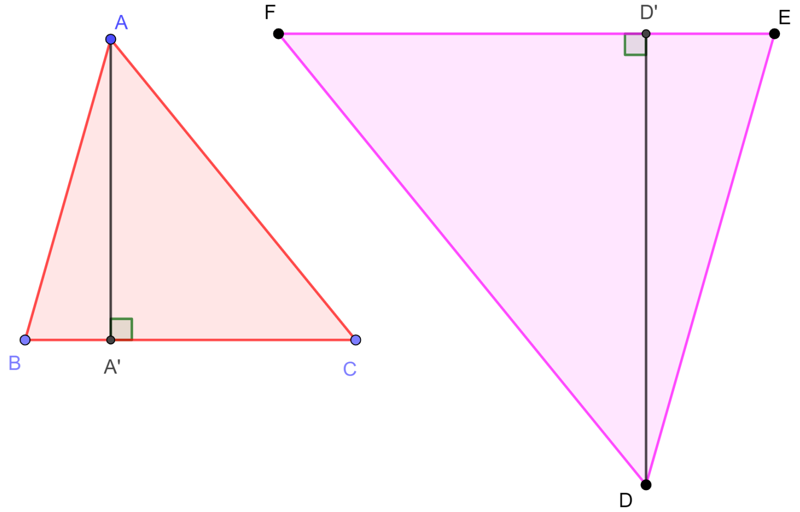

Figura 6. Relação entre as áreas de triângulos semelhantes. Versão interativa aqui.

Demonstração. Por hipótese $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Figura 6). Sejam os pontos A' e D' as projeções ortogonais dos pontos A e D sobre os lados BC e EF, respectivamente. Suponha-se, sem perda de generalidade, que:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AA'}{DD'} = k.$$

Segue que:

$$\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle DEF]} = \frac{\frac{BC \cdot AA'}{2}}{\frac{EF \cdot DD'}{2}} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AA'}{DD'} = k^2.$$

□

O resultado anterior vale para figuras (não somente triângulos) semelhantes em geral.

2.6. Igualdade de áreas num trapézio

Proposição 2.6. *Seja $ABCD$ um trapézio com $BC \parallel DA$ e o ponto $E = AC \cap BD$ (Figura 7). Então vale a igualdade das áreas:*

$$[\triangle AEB] = [\triangle CED].$$

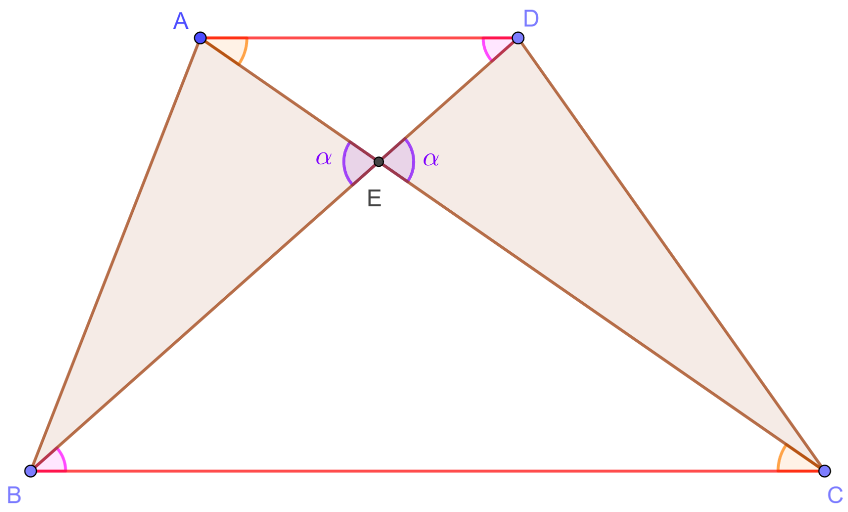

Figura 7. Igualdade de áreas num trapézio. Versão interativa aqui.

Demonstração. Tem-se $BC \parallel DA$. Por serem ângulos alternos entre paralelas vale:

$$\angle EAD = \angle ECB,$$

$$\angle ADE = \angle CBE.$$

Pelo critério de semelhança AA encontra-se:

$$\triangle EAD \sim \triangle ECB.$$

Portanto, os lados respectivos são proporcionais e:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB},$$
$$EA \cdot EB = EC \cdot ED.$$

Por opostos pelo vértice $\angle AEB = \angle CED = \alpha$. Juntando os dois resultados anteriores segue:

$$\frac{EA \cdot EB}{2} \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{EC \cdot ED}{2} \operatorname{sen}(\alpha),$$
$$[\triangle AEB] = [\triangle CED].$$

□

3. PROBLEMAS OLÍMPICOS RESOLVIDOS

3.1. Áreas. Desigualdades. Lei dos Cossenos. P2 IMO 1961.

Problema 1. *Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo ABC cuja área é S. Provar que:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}. \tag{9}$$

Em que caso a igualdade é válida?

A IMO 1961 foi realizada na cidade de Budapeste, Capital da Hungria. Esse é o Problema 3 do primeiro dia da competição e foi proposto pela delegação da Polônia (DJUKIC et al., 2011).

3.1.1.Resolução do Problema 1.

A Figura 8 mostra uma construção geométrica.

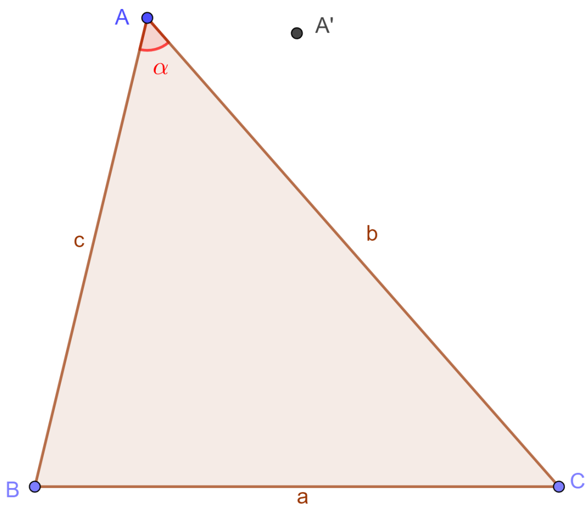

Figura 8. Construção geométrica para o Problema 1. Quando $A = A'$ o $\triangle ABC$ é equilátero. Versão interativa aqui.

Sejam $BC = a > 0, CA = b > 0$ e $AB = c > 0$ os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$ e $\angle CAB = \alpha$. A área pode ser calculada como:

$$S = \frac{bc \operatorname{sen}(\alpha)}{2}. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9) encontra-se:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\frac{bc \operatorname{sen}(\alpha)}{2}\sqrt{3},$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}bc\,\text{sen}\,(\alpha). \tag{11}$$

Pela Lei dos Cossenos pode ser escrito:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha). \tag{12}$$

Substituindo (12) em (11) encontra-se:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}bc\,\text{sen}\,(\alpha),$$

$$b^2 + c^2 \geq bc[\cos(\alpha) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,(\alpha)]. \tag{13}$$

Adicionalmente, nota-se que:

$$\cos(\alpha) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,(\alpha) = 2\left[\frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,(\alpha)\right],$$

$$\cos(\alpha) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,(\alpha) = 2\left[\cos(60^\circ)\cos(\alpha) + \text{ sen}\,(60^\circ)\,\text{sen}\,(\alpha)\right],$$

$$\cos(\alpha) + \sqrt{3}\,\text{sen}\,(\alpha) = 2\cos(60^\circ - \alpha). \tag{14}$$

Substituindo (14) em (13) encontra-se:

$$b^2 + c^2 \geq 2bc\cos(60^\circ - \alpha),$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos(60^\circ - \alpha) \geq 0. \tag{15}$$

Para completar um quadrado perfeito soma-se $0 = -2bc + 2bc$:

$$b^2 - 2bc + c^2 + 2bc - 2bc\cos(60^\circ - \alpha) \geq 0,$$

$$(b - c)^2 + 2bc[1 - \cos(60^\circ - \alpha)] \geq 0. \tag{16}$$

Verifica-se que:

$$(b - c)^2 \geq 0,$$

$$\cos(60^\circ - \alpha) \leq 1.$$

Isto é, os dois somandos na esquerda de (16) são, de fato, não negativos para quaisquer valores de $b > 0$, $c > 0$ e α. A igualdade acontece quando $b = c$ e $\alpha = 60^\circ$. Ou seja, no caso do $\triangle ABC$ ser equilátero. Todas as transições anteriores foram do tipo se, e somente se. Isto completa a demonstração.

3.2. Diferentes formas de calcular áreas. Incírculos. P3 IMO 1964.

Problema 2. *Uma circunferência está inscrita num triângulo ABC de lados a, b e c. Três tangentes ao incírculo são desenhadas, cada uma delas paralela a um lado do $\triangle ABC$. Essas tangentes formam três triângulos menores (internos ao $\triangle ABC$). Em cada um desses triângulos está inscrito um círculo. Determinar a soma das áreas de todos os quatro círculos internos.*

A IMO 1964 foi realizada na cidade de Moscou, capital da Rússia. Esse é o Problema 3 do primeiro dia da competição e foi proposto pela delegação da antiga Iugoslávia (DJUKIC et al., 2011).

3.2.1Resolução do Problema 2.

A Figura 9 mostra uma construção geométrica inicial.

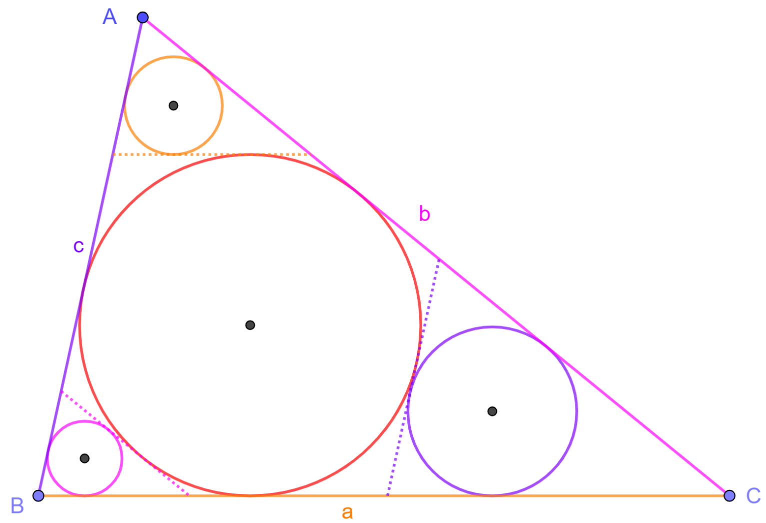

Figura 9. Construção geométrica inicial para o Problema 2. Versão interativa aqui.

Sejam $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$ e o semi-perímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Seja r o raio do círculo interno do $\triangle ABC$, r_a, r_b e r_c os raios dos incírculos menores correspondentes a A, B e C. Sejam ainda os pontos B' e C' a interseção da reta tangente ao incírculo maior (e paralela a BC) com os lados AB e AC, respetivamente. Adicionalmente, defina-se h_a como a altura relativa ao vértice A no $\triangle ABC$ (Figura 10). A soma das áreas dos quatro incírculos S_{in} pode ser calculada como:

$$S_{in} = \pi \left(r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \right). \tag{17}$$

Seja s a área do $\triangle ABC$. Pela fórmula de Heron escreve-se:

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Utilizando o incírculo de raio r encontra-se uma segunda expressão para a área do $\triangle ABC$:

$$s = p \cdot r.$$

Das duas últimas equações chega-se em:

$$p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p},$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}. \tag{18}$$

Por outro lado, vale que $\angle AB'C' = \angle ABC$ e $\angle AC'B' = \angle ACB$ (correspondentes entre paralelas). Pelo critério de semelhança AA tem-se:

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC.$$

Consequentemente, a razão de semelhança pode ser escrita como:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a}. \tag{19}$$

A área do $\triangle ABC$ também calcula-se como:

$$s = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Segue que:

$$h_a = \frac{2s}{a}. \tag{20}$$

Substituindo (20) em (19) encontra-se:

$$\frac{r_a}{r} = 1 - \frac{r \cdot a}{s}.$$

Utilizando, mais uma vez, que $s = p \cdot r$ segue:

$$r_a = \left(1 - \frac{a}{p}\right) r. \tag{21}$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$r_b = \left(1 - \frac{b}{p}\right) r, \tag{22}$$

$$r_c = \left(1 - \frac{c}{p}\right) r. \tag{23}$$

Substituindo (21), (22) e (23), em (17) encontra-se:

$$S_{in} = \pi r^2 \left[1 + \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{p}\right)^2\right]. \tag{24}$$

A seguir é substituído (18) em (24) para chegar em:

$$S_{in} = \pi \left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{p}\right)^2 + \left(1 - \frac{c}{p}\right)^2\right].$$

Resta trocar a definição de semiperímetro e simplificar:

$$S_{in} = \pi \left(\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}\right).$$

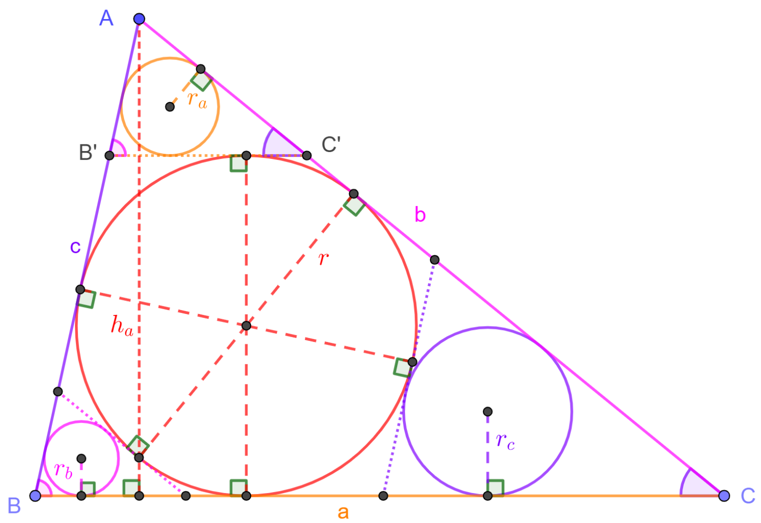

Figura 10. Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui.

3.3. Áreas, bases médias, triângulo medial. P6 IMO 1966.

Problema 3. *Considera-se um $\triangle ABC$ arbitrário. Sejam os pontos $M \in AB$, $K \in BC$ e $L \in CA$. Provar que a área de pelo menos um dos três triângulos $\triangle MAL$, $\triangle KBM$ e $\triangle LCK$ é menor ou igual a um quarto da área do $\triangle ABC$.*

A IMO 1966 foi realizada na cidade de Sófia, capital da Bulgária. Esse é o Problema 6, segundo dia da competição, e foi proposto pela delegação da Polônia (DJUKIC et al., 2011).

3.3.1Resolução do Problema 3.

A Figura 11 mostra uma construção geométrica inicial.

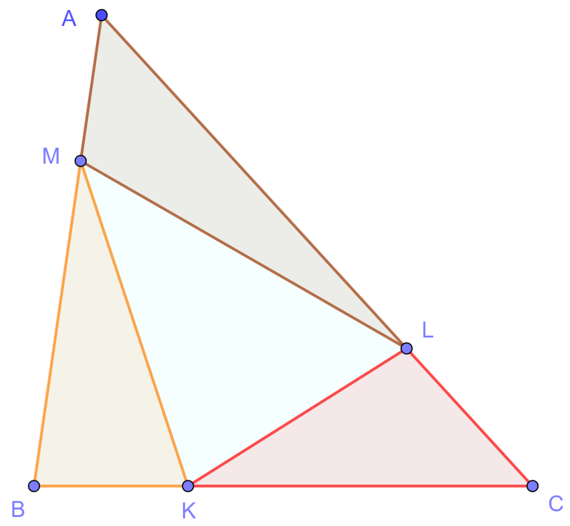

Figura 11. Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui.

Sejam A', B' e C' os pontos médios dos segmentos BC, CA e AB, respetivamente (Figura 12). Como $A'B'$, $B'C'$ e $C'A'$ são bases médias os quadriláteros $A'CB'C'$, $B'AC'A'$ e $C'BA'B'$ são paralelogramos. Pelo critério de congruência LLL tem-se:

$$\triangle AB'C' \equiv \triangle BC'A' \equiv \triangle CA'B' \equiv \triangle A'B'C'.$$

Logo, vale a igualdade das áreas:

$$[\triangle AB'C'] = [\triangle BC'A'] = [\triangle CA'B'] = [\triangle A'B'C'] = \frac{1}{4}[\triangle ABC].$$

Sem perda de generalidade, considera-se $M \in AC'$. Das quatro possibilidades para os pontos K e L a única não trivial é quando $K \in BA'$ e $L \in CB'$. Neste caso consideram-se primeiro os $\triangle KLM$ e $\triangle A'LM$ com o lado comum LM. Nota-se que a reta LM não é paralela com a reta BC, pois LM intercepta $B'C' \parallel BC$. Consequentemente, entre os pontos K e A' o mais próximo da reta LM é o ponto A'. Segue que:

$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM].$$

Segundo, estudam-se os $\triangle A'LM$ e $\triangle A'B'M$ com o lado comum $A'M$. Nota-se que a reta $A'M$ não é paralela com a reta CA, pois $A'M$ intercepta $C'A' \parallel CA$. Consequentemente, entre os pontos L e B' o mais próximo da reta $A'M$ é o ponto B'. Portanto:

$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM] \geq [\triangle A'B'M].$$

Terceiro, foca-se nos $\triangle A'B'M$ e $\triangle A'B'C'$ com o lado comum $A'B'$. Nota-se que as retas $A'B' \parallel AB$. Logo,

$$[\triangle KLM] \geq [\triangle A'LM] \geq [\triangle A'B'M] = [\triangle A'B'C'] = \frac{1}{4}[\triangle ABC].$$

De $[\triangle KLM] \geq \dfrac{1}{4}[\triangle ABC]$ e

$$[\triangle KLM] + [\triangle MAL] + [\triangle KBM] + [\triangle LCK] = [\triangle ABC],$$

pelo Princípio da Casa dos Pombos, encontra-se que a área de pelo menos um dos três triângulos $\triangle MAL$, $\triangle KBM$ e $\triangle LCK$ é menor ou igual a um quarto da área do $\triangle ABC$.

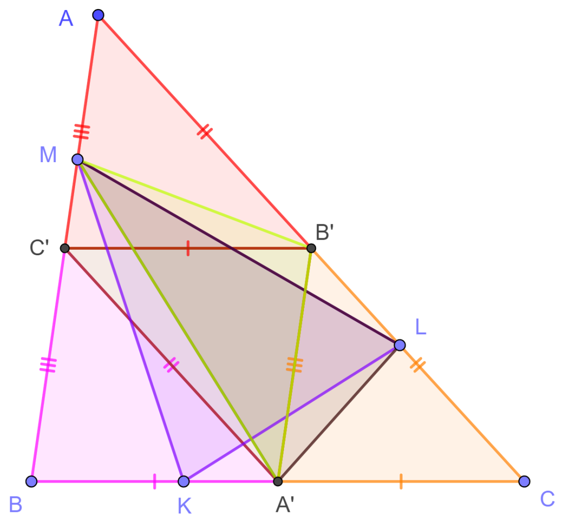

Figura 12. Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.

3.4. Áreas, quadriláteros inscritíveis. P2 IMO 1987.

Problema 4. *O prolongamento da bissetriz AL, com $L \in BC$, no triângulo de ângulos agudos ABC, cruza o círculo circunscrito d no ponto N. Do ponto L aos lados AB e AC são traçadas as perpendiculares LK e LM, respetivamente. Provar que a área do triângulo ABC é igual à área do quadrilátero $AKNM$.*

A IMO 1987 foi realizada na cidade de Havana, capital de Cuba. Esse é o Problema 21 da SL e escolhido como P2 da competição. Foi proposto pela delegação da antiga União Soviética (DJUKIC et al., 2011).

3.4.1Resolução do Problema 4.

A Figura 13 mostra uma construção geométrica inicial.

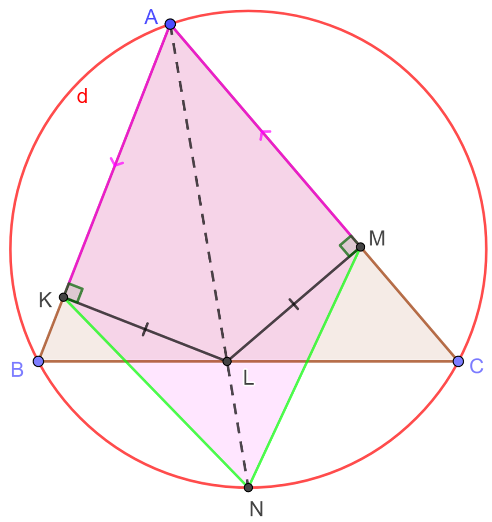

Figura 13. Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui.

Pela bissetriz AN vale que:

$$\angle BAN = \angle NAC = \alpha.$$

O quadrilátero $AKLM$ é inscritível pela circunferência f pois:

$$\angle LKA + \angle AML = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Seja $P \neq L$ o segundo ponto de intersecção do segmento BC e f. Denotar os pontos $E = KN \cap BC$ e $F = MN \cap BC$ (Figura 14). Parte da área do triângulo ABC e do quadrilátero $AKNM$ é comum. Portanto, bastará provar a igualdade das áreas não comuns. Ou seja,

$$[\triangle BEK] + [\triangle CFM] = [\triangle NEF],$$

$$[\triangle BEK] + [\triangle CFM] = [\triangle NEP] + [\triangle NPF].$$

Isto é, quer-se mostrar que:

$$[\triangle BEK] = [\triangle NEP],$$

$$[\triangle CFM] = [\triangle NPF].$$

Como os quadriláteros $ABNC$ e $LMAP$ são inscritos em d e f, respetivamente, então $\angle BCN = \angle BAN = \alpha$ e $\angle LAM = \angle LPM = \alpha$. Logo, $\angle CPM = \angle PCN$. Da recíproca de "ângulos alternos entre paralelas" segue que $PM \parallel NC$.

Por outro lado, o quadrilátero $ABNC$ e inscrito em d, então $\angle NBC = \angle NAC = \alpha$. Adicionalmente, pelo quadrilátero inscritível $AMPK$ tem-se:

$$\angle MPK = 180^\circ - 2\alpha.$$

Logo, $\angle KPB = \angle NBP = \alpha$. Da recíproca de "ângulos alternos entre paralelas" vale $KP \parallel BN$. Como os quadriláteros $KBNP$ e $PMCN$ são trapézios, pela Proposição 2.6 vale que:

$$[\triangle BEK] = [\triangle NEP],$$
$$[\triangle CFM] = [\triangle NPF].$$

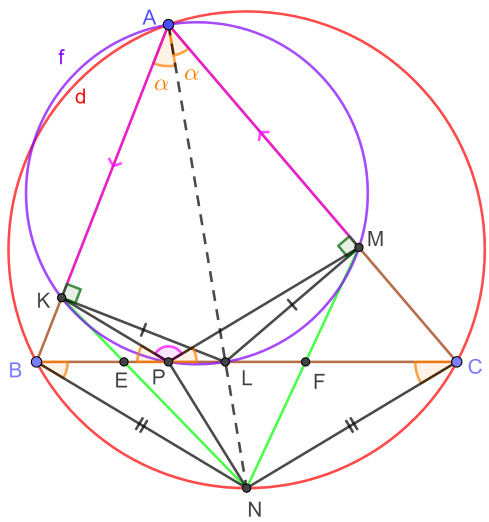

Figura 14. Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa aqui.

3.5. Incírculos no triângulo retângulo e áreas. P5 IMO 1988.

Problema 5. *No triângulo retângulo ABC, seja AD a altura desenhada para a hipotenusa. A reta que une os incentros dos triângulos ABD e ACD intercepta os lados AB e AC nos pontos K e L, respetivamente. Se E e E_1 denotam as áreas dos triângulos ABC e AKL, respectivamente, mostrar que* $\dfrac{E}{E_1} \geq 2.$

A IMO 1988 foi realizada na cidade de Camberra, capital da Austrália. Esse é o Problema 13 da SL e escolhido como P5 da competição. Foi proposto pela delegação da Grécia (DJUKIC et al., 2011).

3.5.1Resolução do Problema 5.

A Figura 15 mostra uma construção geométrica inicial.

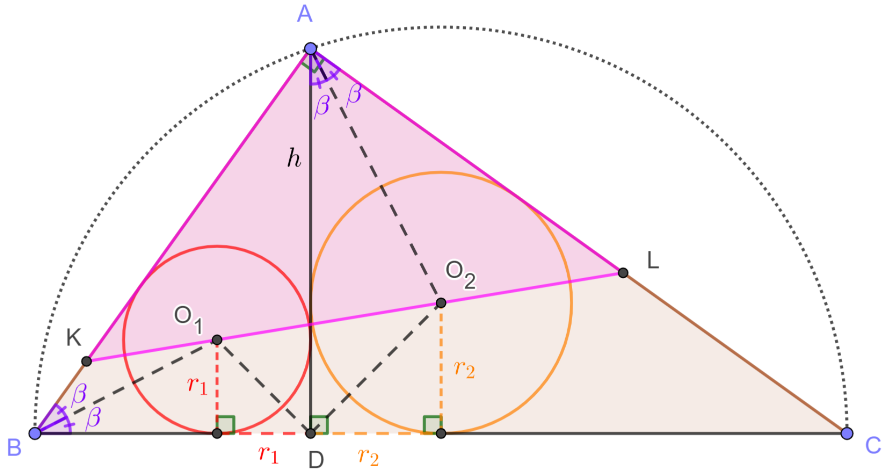

Figura 15. Construção geométrica inicial para o Problema 5. Versão interativa aqui.

Sejam $AB = c$, $AC = b$, $\angle CBA = 2\beta$, $BC = a$ e $AD = h$. Sejam ainda r_1 e r_2 e O_1 e O_2 os raios e centros dos incírculos do $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$, respectivamente. Segue que $\angle DAC = \angle CBA = 2\beta$. O objetivo inicial será provar que $AL = AK = AD = h$. Posteriormente, retorna-se ao cálculo das áreas. Pelo critério de semelhança AA obtêm-se:

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \sim \triangle ABC.$$

Da semelhança entre os $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$ vale a proporcionalidade:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{c}{b} = \frac{DO_1}{DO_2}.$$

Como DO_1 e DO_2 são bissetrizes de ângulos retos encontra-se:

$$\angle O_2DO_1 = \angle O_2DA + \angle ADO_1 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

Pelo critério de semelhança LAL obtêm-se:

$$\triangle DBA \sim \triangle DO_1O_2.$$

Segue que $\angle DO_1O_2 = \angle DBA = 2\beta$ (Figura 16). Isto é, pode ser feita uma roto-homotetia, com centro em D, para transformar o $\triangle DBA$ no $\triangle DO_1O_2$. Seja o ponto P a interseção da circunferência circunscrita ao $\triangle DO_1O_2$ com o segmento h. Como DO_1PO_2 é um quadrilátero inscritível vale:

$$\angle DPO_2 = \angle DO_1O_2 = 2\beta,$$

$$\angle O_1PO_2 = 180^\circ - \angle O_2DO_1 = 90^\circ,$$

$$\angle O_2O_1P = \angle O_2DP = 45^\circ,$$

$$\angle PO_2O_1 = \angle PDO_1 = 45^\circ.$$

Com isto, o $\triangle O_2O_1P$ é retângulo e isósceles de base O_1O_2. Adicionalmente,

$$\angle DPO_2 = \angle DAC,$$

$$\angle O_1PD = \angle BAD.$$

Pela recíproca de alternos entre paralelas encontra-se que $PO_2 \parallel AL$ e $PO_1 \parallel AK$. Portanto,

$$\angle ALK = \angle LKA = 45^\circ.$$

Ou seja, o $\triangle ALK$ é retângulo e isósceles de base LK. Consequentemente, $AL = AK$. Por outro lado, tem-se: $\angle O_2DA = \angle ALO_2 = 45^\circ$, AO_2 (lado comum) e $\angle DAO_2 = \angle O_2AL = \beta$ (bissetriz AO_2). Pelo critério de congruência LAAo segue:

$$\triangle DAO_2 \equiv \triangle LAO_2.$$

Portanto, $AL = AK = AD = h$. Neste ponto volta-se ao cálculo de áreas:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{a}{h}.$$

Multiplicando e dividindo por a, utilizando a ida do Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$ e a relação métrica $ah = bc$ segue:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{a^2}{ah} = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

Sendo $b > 0$ e $c > 0$ a última fração pode ser escrita como desigualdade:

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 0,$$

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b + c)^2 - 2bc}{bc} \geq 0$$

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b + c)^2}{bc} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 2.$$

Portanto,

$$\frac{E}{E_1} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 2.$$

A igualdade acontece quando $b = c$.

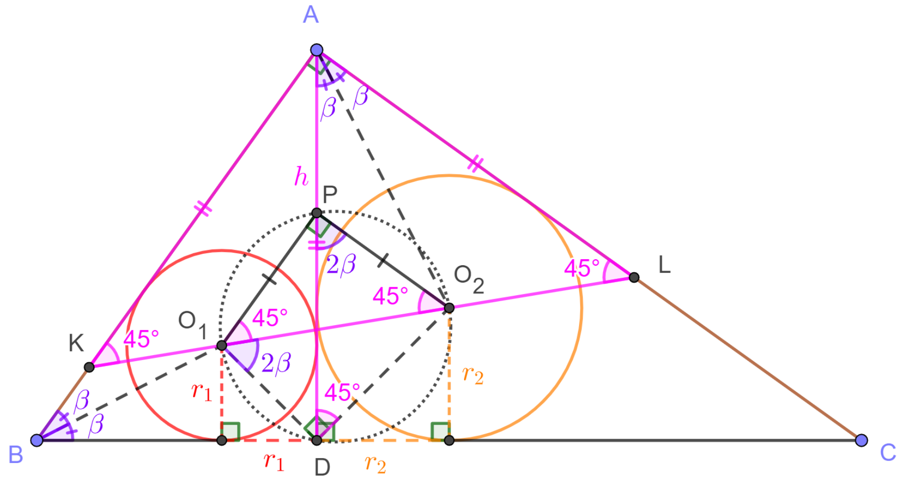

Figura 16. Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa aqui.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Foi feita uma rápida introdução de alguns conceitos básicos relativos ao cálculo de áreas. A seguir foram discutidos detalhadamente cinco problemas IMO. Espera-se que estes sirvam de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados e treinam estudantes para participar em olimpíadas.

5. REFERÊNCIAS

DJUKIC, D.; JANKOVIC, V.; MATIC, I.; PETROVIC, N. **The IMO Compendium**. Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 1441998535. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html>.

LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de olimpíadas internacionais de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, n. 1, p. 14–36, jun. 2023. ISSN 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, n. 2-2021, p. 46–69, jul 2021. ISSN 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>.

____. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 117–139, nov. 2021. ISSN 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de; BRUNO-ALFONSO, A. Desigualdade de ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 15–37, 2022. ISSN 2237-8103. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>.