RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024

# PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPEIAS VIA SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO NO OCTAVE

**Felipe Batista de Lima Araújo**
<felipebl.araujo@gmail.com>
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil
<https://orcid.org/0000-0001-9079-9415>

**Resumo**
*Um contrato derivativo, ou simplesmente derivativo, é um ativo financeiro cujo valor depende do valor de ativos mais concretos: ações, ouro, petróleo, títulos, moedas, etc. Opções são um dos tipos de derivativos mais negociados no mercado financeiro. Quem compra uma opção do tipo europeia tem o direito de comprar ou vender um certo ativo financeiro na data de vencimento do contrato por um preço fixado anteriormente. Uma vez que o valor de um ativo no futuro não é determinístico, a precificação racional dos derivativos é feita com auxílio de modelos matemáticos. O presente trabalho apresenta um modo para a precificação de opções europeias utilizando simulações de Monte Carlo no software livre Octave. A abordagem está apoiada na aplicação da fórmula de Cox Ross Rubinstein, uma equação oriunda do modelo matemático conhecido como Modelo Binomial para precificação desses derivativos em tempo discreto.*

***Palavras-chave:*** *Precificação, Opções europeias, Modelo Binomial, Cox Ross Rubinstein, Simulações de Monte Carlo, Octave.*

## 1 INTRODUÇÃO

Nos mercados financeiros são negociados ativos como ações, ouro, petróleo, títulos, moedas, etc. Além desses ativos mais concretos, são negociados também os contratos derivativos, ou simplesmente derivativos. Um derivativo é um ativo financeiro cujo valor depende do valor de ativos subjacentes. Em (CUTLAND; ROUX, 2012), um derivativo é apresentado como qualquer instrumento ou contrato que dá ao seu titular, em algum momento no futuro, uma recompensa (chamada payoff) que depende da perfomance do ativo subjacente; desse modo os derivativos funcionam como mecanismos de proteção ao risco inerente ao preço de um ativo no futuro, sendo também usados por especuladores que assumem riscos para obter ganhos possíveis com base em suas crenças sobre o comportamento futuro do mercado.

Dentre os tipos de derivativos, opções são um dos mais negociados. As opções podem ser de compra (call) ou de venda (put). Esses contratos tem como aspectos básicos o preço de exercício (strike) e a data de vencimento (exercício). Opções que só podem ser executadas na data de exercício são chamadas de opções europeias:

- Call europeu: um call europeu confere ao titular o direito (mas não a obrigação) de comprar o ativo subjacente pelo preço de exercício $X$ na data de exercício $T$.
- Put europeu: um put europeu confere ao titular o direito (mas não a obrigação) de vender o ativo subjacente pelo preço de exercício $X$ na data de exercício $T$.

Para exemplificar, seja a situação fictícia em que um investidor compra no dia 09/12/2023 um put europeu de strike $US\$\,50.00$ e vencimento em 20 dias. Em outras palavras, ao adquirir essa opção, ele tem o direito de vender o ativo subjacente (por exemplo, uma ação) pelo preço de $US\$\,50.00$ no dia 29/12/2023. Se na data de exercício a ação estiver custando mais que $US\$\,50.00$, não faz sentido exercer o contrato, que expira com valor zero. Por outro lado, se a ação estiver custando menos que $US\$\,50.00$, o titular certamente irá optar por executar a opção, que terá como valor a diferença entre o strike e o valor real da ação.

A grande questão relacionada aos derivativos é a determinação do preço do contrato de modo racional, uma vez que o valor de um ativo no futuro não é determinístico. No mundo real, o valor de um ativo no futuro é uma variável aleatória influenciada por inúmeros fatores. Sendo assim, como os derivativos são precificados? Modelos matemáticos e simulações são a resposta para essa pergunta; tais ferramentas auxiliam fornecendo previsões para esses valores.

Para precificação de opções europeias em tempo discreto, o Modelo Binomial de Cox Ross Rubinstein [1]é um dos mais utilizados devido à simplicidade do ponto de vista matemático e da facilidade para implementação em softwares de computação matemática. Assim, o viés desse trabalho é apresentar a implementação desse modelo no software livre Octave para a realização de simulações de Monte Carlo para obtenção de valores para o preço de opções europeias. Espera-se que esse material possa servir como um guia, principalmente para alunos de graduação em Matemática, fornecendo uma visualização da aplicação de modelos matemáticos no mercado financeiro.

## 2 MODELO BINOMIAL DE COX ROSS RUBINSTEIN

### 2.1 Árvore Binomial

O preço de um ativo financeiro no futuro, como uma ação, é incerto e determinado por uma série de fatores, os chamados cenários $\omega$ com determinada probabilidade. Seja $\Omega$ o conjunto finito de todos os cenários possíveis. O preço da ação no tempo $t$ é uma variável aleatória:

$$S(t) : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$$

Uma notação mais completa pode é $S(t, \omega)$: o preço da ação no tempo $t$ se o mercado seguir o cenário $\omega$. Para se determinar o preço de uma opção de uma ação de modo racional utilizam-se modelos matemáticos. Um dos mais utilizados é o da Árvore Binomial de Cox Ross Rubinstein também chamado Modelo Binomial que simula os possíveis movimentos do preço do ativo que serve de base para a opção. Tal modelo assume que o preço da ação (ativo subjacente ao derivativo) segue um padrão *random walk* (AVELLANDEDA; LAURENCE, 2000).

1 Também conhecido como Modelo Binomial, Árvore Binomial de Cox Ross Rubinstein ou também Modelo CRR.

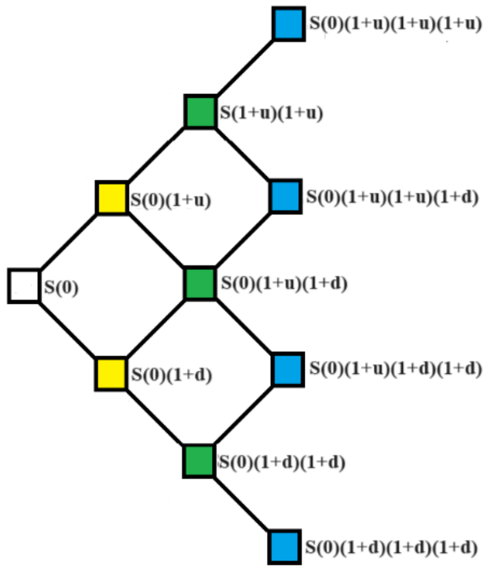


**Figura 1. Preços da ação na Árvore Binomial para 3 períodos.**

A árvore binomial tem a propriedade de que o preço do ativo em cada ponto é igual a um valor constante multiplicado pelo preço no ponto anterior. Esse valor constante é chamado de fator de ramificação. Na Figura 1, encontra-se ilustrada uma árvore binomial recombinante de 3 períodos e os fatores $(1+u)$ e $(1+d)$. Esses fatores estão relacionados com o conceito de retorno a 1 passo na árvore binomial, definido como:

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)}$$

No modelo binomial, o retorno tem apenas dois valores possíveis:

$$K(n) = \begin{cases} u & \text{com probabilidade } p \\ d & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

$$\text{Onde: } -1 < d < u$$

Desse modo, cada ponto na árvore tem 2 valores possíveis a serem assumidos:

$$S(1) = \begin{cases} S(0)(1+u) \\ S(0)(1+d) \end{cases} \quad S(2) = \begin{cases} S(1)(1+u) \\ S(1)(1+d) \end{cases}$$

$$S(3) = \begin{cases} S(2)(1+u) \\ S(2)(1+d) \end{cases} \quad S(4) = \begin{cases} S(3)(1+u) \\ S(3)(1+d) \end{cases}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S(n-1) = \begin{cases} S(n-2)(1+u) \\ S(n-2)(1+d) \end{cases} \quad S(n) = \begin{cases} S(n-1)(1+u) \\ S(n-1)(1+d) \end{cases}$$

### 2.2 Esperança do retorno e probabilidades neutras a risco

Um típico investidor com aversão a risco irá querer que a esperança do retorno seja igual a uma taxa de juros livre de risco (rendimento fixo) (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2003):

$$\mathbb{E}(K(n)) = r$$

Tal investidor argumentaria que ele deveria ser recompensado com um retorno esperado mais alto como compensação pelo risco. Para tal, são consideradas no modelo binomial as probabilidades neutras a risco, as únicas que fazem com que a esperança do retorno seja igual à taxa de juros de um rendimento fixo.

$$\mathbb{E}_*(K(n)) = p_* u + (1 - p_*)d = r$$

Onde a probabilidade neutra a risco é dada por:

$$p_* = \frac{r-d}{u-d}$$

### 2.3 Payoff de uma opção

As opções podem ser definidas a partir do seu payoff, isto é, seu valor em função da perfomance do ativo subjacente. Assim como o valor do ativo, o payoff de uma opção é uma variável aleatória (CUTLAND; ROUX, 2012). A definição do payoff para call e put europeu é fundamental para os cálculos que fornecem o preço da opção no tempo 0. Sendo $X$ o strike e $S(t)$ o valor do ativo no tempo $t$, define-se:

- Payoff de um call europeu

$$(S(t) - X)^+ = \begin{cases} S(t) - X & \text{, se } S(t) > X \\ 0 & \text{, se} S(t) < X \end{cases}$$

- Payoff de um put europeu

$$(X - S(t))^+ = \begin{cases} X - S(t) & \text{, se } S(t) < X \\ 0 & \text{, se } S(t) > X \end{cases}$$

### 2.4 Fórmula de Cox Ross Rubinstein

O Modelo Binomial de Cox Ross Rubinstein é baseado na árvore binomial recombinante para calcular o valor da opção em cada ponto, começando pelo ponto final e voltando até o ponto inicial, usando a relação entre o valor da opção e o valor do ativo. A dedução da expressão matemática geral da fórmula de Cox Ross Rubinstein é baseada nas estratégias de replicação de contrato, levando em conta o princípio da não arbitragem. Por não ser o escopo desse trabalho, não será feita aqui a demonstração da fórmula, que pode ser encontrada em (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2003). Considerando o modelo binomial, o valor (preço) de uma opção europeia no tempo $0$ é dado por:

**Call Europeu**

$$C^E(0) = S(0)[1 - \Phi(m-1, n, q)] - (1+r)^{-n} X[1 - \Phi(m-1, n, p_*)]$$

**Put Europeu**

$$P^E(0) = -S(0)\Phi(m-1, n, q)] + (1+r)^{-n} X\Phi(m-1, n, p_*)$$

Onde:

$S(0)$ é o valor da ação em $t = 0$.
$m$ é o primeiro índice para o qual o payoff é maior que zero.
$n$ é o número períodos (tempo discreto: dias, meses,etc).
$r$ é a taxa de juros livre de riscos.
$X$ é o strike (preço de exercício da opção).
$p_*$ é a probabilidade neutra a risco.
$q = \dfrac{p_*(1+u)}{1+r}$.
$\Phi(m-1, n, p_*) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} p_*^k (1-p_*)^{n-k}$.
$\Phi(m-1, n, q) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}$.

## 3 SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO UTILIZANDO OCTAVE

O Modelo de Cox Ross Rubinstein exige muitos cálculos, especialmente quando o número de períodos até o tempo de expiração é muito grande. Não seria viável calcular manualmente nessas situações. Na prática, empregam-se softwares para realizar tal tarefa. Aqui será mostrada utilização do Octave versão Online para execução de simulações de preços de opções europeias. Tal escolha, deve-se ao fato do Octave Online ser uma interface web de fácil acesso para o GNU Octave, uma alternativa de código aberto ao MATLAB. O Octave Online permite execução de comandos do Octave em um navegador, sem precisar instalá-lo no computador. Os códigos podem ser feitos e salvos em arquivos $.txt$ e transferidos para execução na interface web do Octave Online.

O código abaixo foi gerado baseado no exercício 8.8 encontrado em (CAPINSKI; ZASTAWNIAK, 2003) que pede a precificação de um call europeu . Os códigos utilizados estão acompanhados dos seus significados. Nas Figuras 2,3,4,5 e 6 encontram-se registros de resultados gáficos e de preços obtidos para um call europeu em simulações feitas com o código variando o parâmetro NMC (número de simulações de Monte Carlo) utilizando o Octave Online.

```
% Parâmetros
S0 = 50;           % Preço da ação em t=0.
X = 60;            % Preço de exercício da opção (Strike).
r = 0.005;         % Taxa de juros livre de risco.
n = 50;            % Número de períodos até o vencimento.
NMC = 10;          % Número de simulações de Monte Carlo.
% Média (m) e desvio padrão (dp) esperados para u e d. Valores fictícios para fins de simulação.
m_u = 0.3;
dp_u = 0.1;
m_d = -0.1;
dp_d = 0.05;

% Matriz para armazenar os preços simulados em cada simulação de Monte Carlo.
preco_acoes = zeros(n+1, NMC);

% Simulações de Monte Carlo.
for i = 1:NMC
% Geração de retornos aleatórios usando uma distribuição normal.
u = normrnd(m_u, dp_u); % Valor aleatório para u.
d = normrnd(m_d, dp_d); % Valor aleatório para d.

% Cálculo das probabilidades
pnr = (r - d) / (u - d);      % Probabilidade neutra a risco.
q = pnr * (1 + u) / (1 + r);

% Árvore binomial - Modelo CRR.
preco_acao = zeros(n+1, 1); % Vetor coluna que armazena S(0), S(1), S(2), S(3) em cada simulação.
preco_acao(1) = S0;
for t = 2:(n+1)
z = rand(); % Número entre 0 e 1.
if z >= 0.5
preco_acao(t) = preco_acao(t-1) * (1+u); % Preço da ação sobe.
else
preco_acao(t) = preco_acao(t-1) * (1+d); % Preço da ação desce.
end
end

% Armazenamento do preço da ação simulado na matriz preco_acoes.
preco_acoes(:, i) = preco_acao;
end
```

```
    % Gráfico dos caminhos dos preços das ações
    figure;
    hold on; % Mantém o gráfico ativo para adicionar
       marcadores.

    % Gráfico dos caminhos dos preços das ações com linhas
       sólidas.
    plot(0:n, preco_acoes, '-');

    % Tamanho dos marcadores (bolinhas)
    marker_size = 4; % Ajuste do tamanho.

    % Adição de marcadores (bolinhas) nos nós da árvore.
    for i = 1:NMC
    plot(0:n, preco_acoes(:, i), '.', 'MarkerSize',
       marker_size); % '.' representa um marcador de ponto.
    end

    xlabel('Períodos de Tempo');
    ylabel('Preço da Ação');
    title('Caminhos de Preços das Ações em Simulações de Monte
       Carlo');
    grid on;
    hold off; % Libera o gráfico para não adicionar mais
       elementos

    % Cálculo do valor da opção para cada simulação e exibição
       do preço médio
    valor_opcao = zeros(NMC, 1);
    for i = 1:NMC
    m = find(preco_acoes(:, i) > X, 1) - 1;
    % preco_acoes (:,i) obtém todos os valores de preço para a
       simulação i, criando um vetor.
       find(preco_acoes(:,i)>X,1) encontra o primeiro índice
       onde o valor da ação em t=50 é maior que o Strike.
       Subtraímos 1 do índice encontrado para obter o valor de
       m, onde a ação cruzou ou ultrapassou X.
    if isempty(m)
    m = n; %S Se m vazio (nunca se ultrapassou X) a opção não é
        exercida. Atribui-se a m o valor do vencimento.
    end
    valor_opcao(i) = S0 * (1 - binocdf(m-1, n, q)) - (1 +
       r)^(-n) * X * (1 - binocdf(m-1, n, pnr)); %Fórmula de
       Cox Ross Rubinstein.
    end

    preco_call = mean(valor_opcao);

    fprintf('Preço estimado do Call Europeu: %.2f\n',
```

```
        preco_call);
```

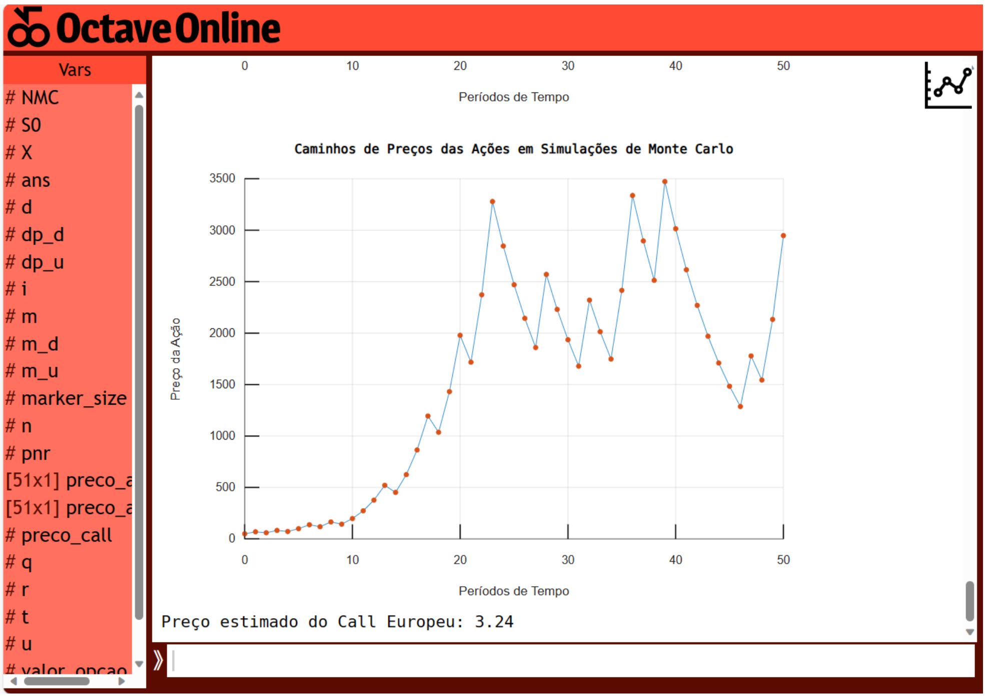


**Figura 2. Simulação para NMC=1**

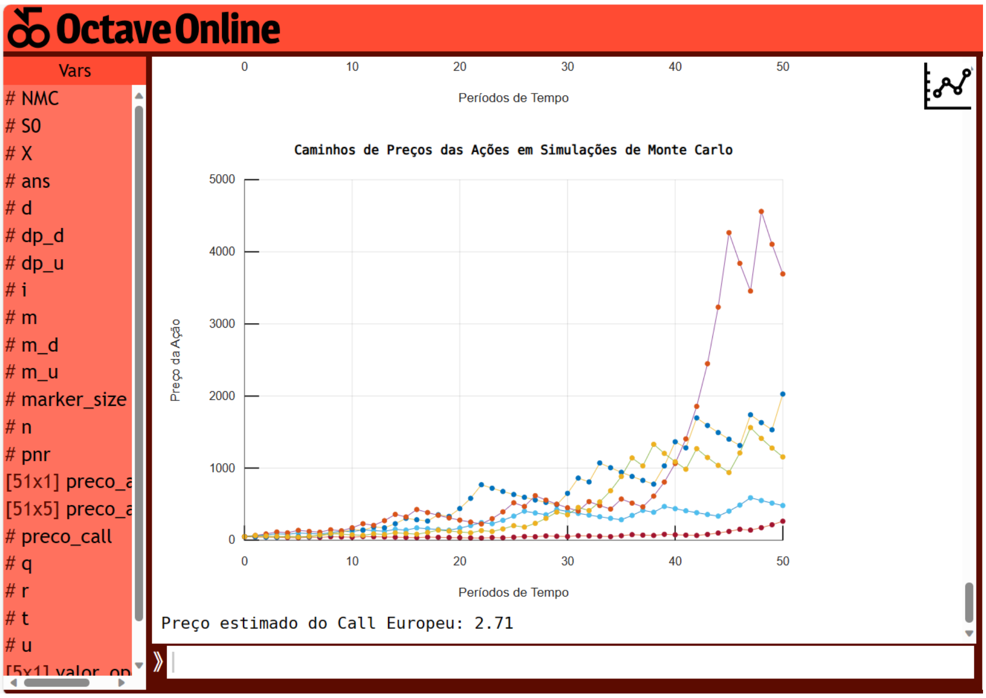


**Figura 3. Simulação para NMC=5**

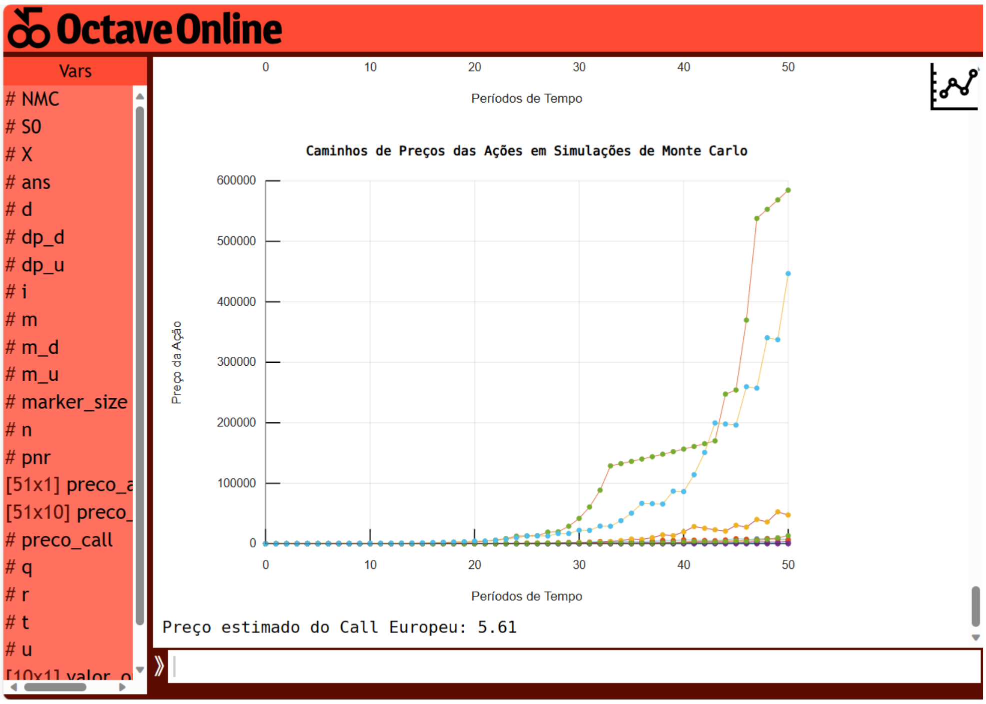


**Figura 4. Simulação para NMC=10**

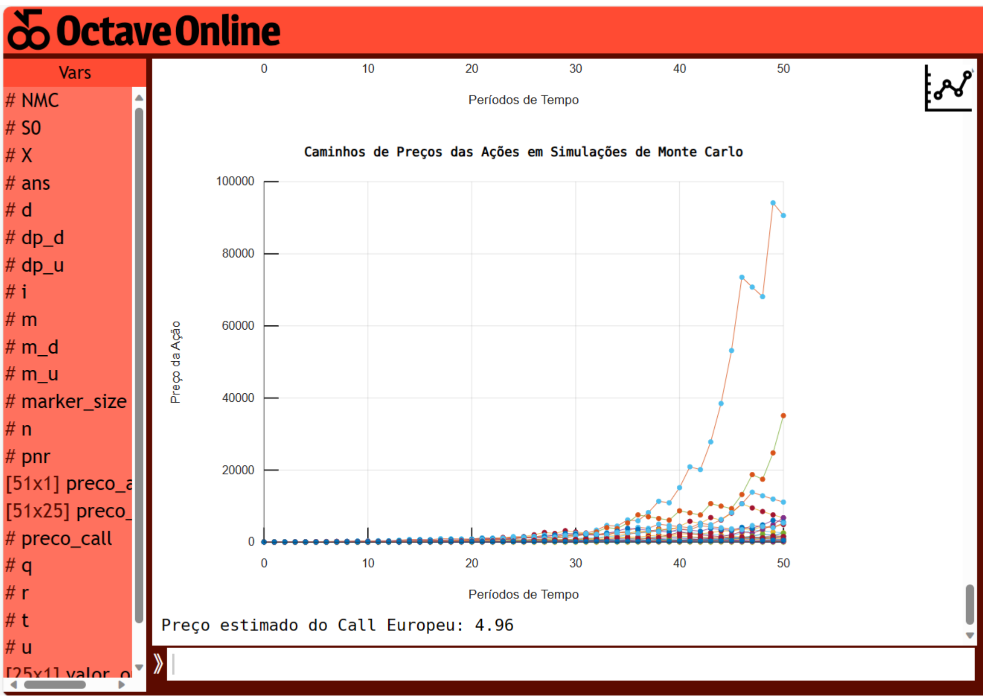


**Figura 5. Simulação para NMC=25**

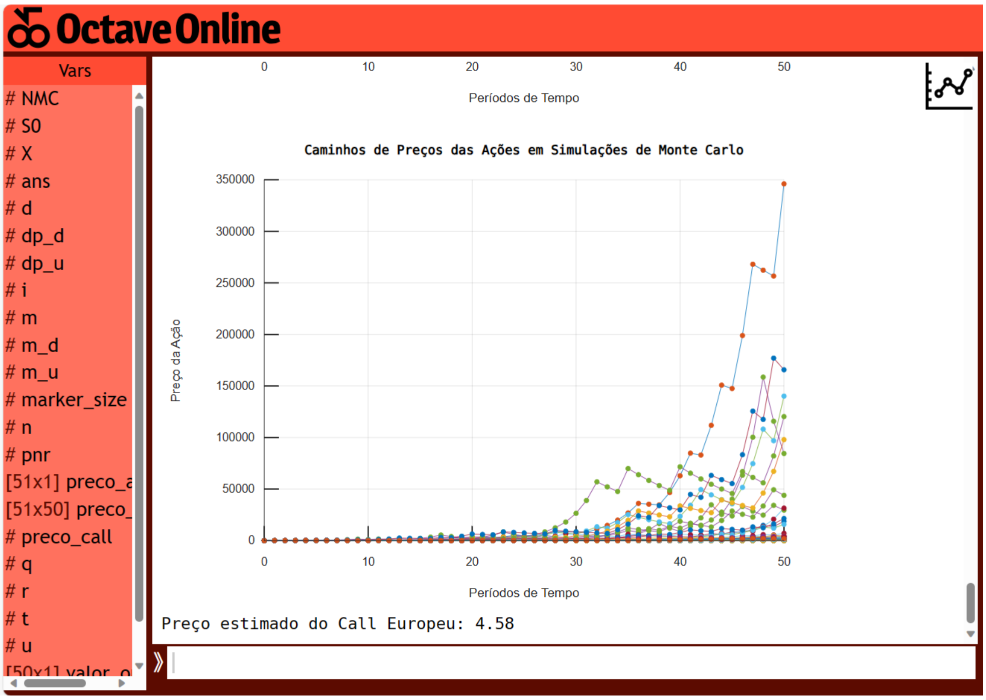


**Figura 6. Simulação para NMC=50**

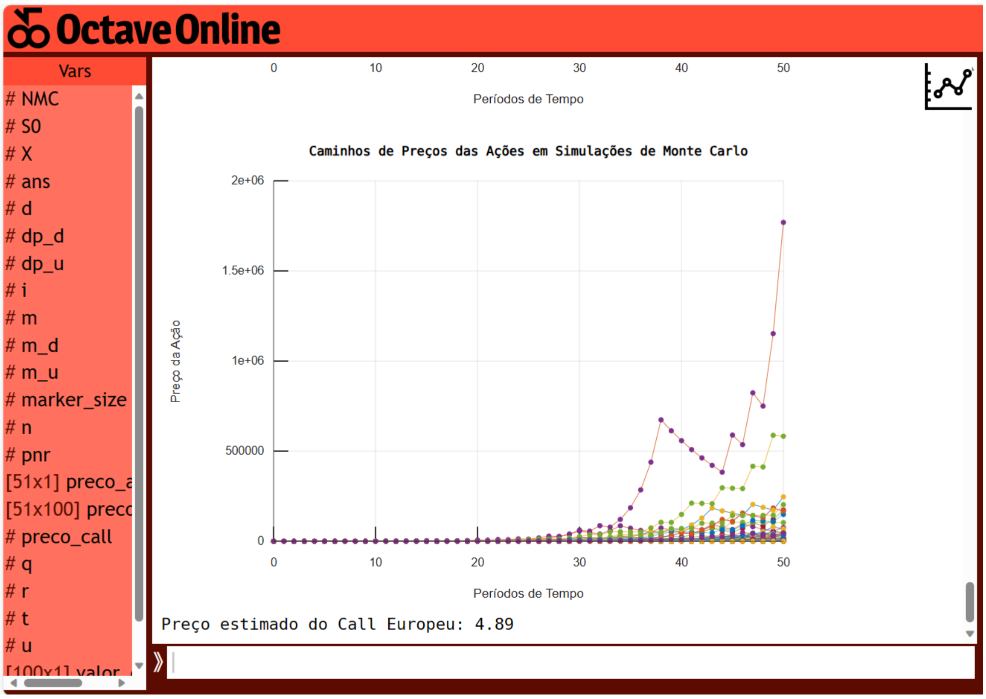


**Figura 7. Simulação para NMC=100**

## 4 CONCLUSÃO

O Octave Online se mostrou uma boa ferramenta para precificar opções europeias. Essa técnica pode ser útil para estudantes de matemática, especialmente aqueles que se concentram em finanças aplicadas. Além disso, o uso do Octave pode ajudar a desenvolver habilidades valiosas em programação e análise de dados, podendo ser usado para criar gráficos que permitem explorar diferentes cenários de preços e volatilidade e para implementar estratégias de backtesting.

## 5 AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Pedro Jose Catuogno por me orientar no projeto "Introdução à precificação de derivativos em tempo discreto"e na elaboração deste artigo. Agradeço também à FAPESP pela concessão da bolsa de iniciação científica e apoio financeiro.

## 6 REFERÊNCIAS

AVELLANDEDA, M.; LAURENCE, P. **Quantitative modeling of derivative securities: from theory to practice**. Boca Raton, FL: Chapman Hall/CRC, 2000.

CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for finance: An introduction to financial engineering**. London: Springer-Verlag, 2003.

CUTLAND, N.; ROUX, A. **Derivative Pricing in Discrete Time**. London: Springer-Verlag, 2012.