RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024

SOMA ITERADA DE ALGARISMOS DE UM NÚMERO CONCATENADO

Eudes Antonio Costa
<eudes@uft.edu.br>
Universidade Federal do Tocantins, Colegiado de Matemática, Arraias, TO, Brasil
<https://orcid.org/0000-0001-6684-9961>

Thalles Santiago Soares
<thallessantinago@uft.edu.br>
Universidade Federal do Tocantins, Curso de Matemática, Arraias, TO, Brasil

Resumo
Neste artigo apresentamos um estudo acerca da soma iterara de algarismos de um número concatenado. A soma iterada de algarismos de um número inteiro não negativo n consiste em iteradas vezes adicionar os algarismos do número n até que o resultado seja $0 \leq r < 9$, do qual alcançamos a soma iterada de n e a denotamos por $S^*(n) = r$. Alinhados a esse processo iterativo da aplicação S^* estendemos a iteração à concatenação de um número n e procuramos determinar o padrão de repetição em $S^*(n_{[k]})$, ou seja, dado um número n qualquer, fazemos uma k-concatenação e obtemos $n_{[k]} = nn \ldots nn$, então, aplicamos S^* ao número concatenado, isto é, determinamos o resultado $S^*(n_{[k]})$ para cada $k \geq 1$. Motivado por alguns trabalhos acerca da soma de algarismos, neste apresentamos novas propriedades em relação ao tema. O trabalho também visa contribuir, como material de consulta para docentes, com atividades não rotineiras em sala de aula. Acreditamos que este trabalho possa complementar trabalhos já existentes na literatura sobre o assunto, bem como motivar o surgimento de novos.

Palavras-chave: *Número concatenado. Soma iterada. Órbita.*

1. INTRODUÇÃO

Denotamos por $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos inteiros não negativos, este conjunto é equivalente ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Denotamos por

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

o conjunto dos dígitos ou algarismos do sistema posicional decimal. Considere também n, m, k, p naturais, a menos que especificado de outra forma

Seja n um número com t algarismos (dígitos), ou seja,

$$n = a_{t-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_{t-1} 10^{t-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \ ,$$

para $t > 0$, e $a_i \in D$, definimos

$$S(n) := a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{t-1} \ .$$

a soma dos dígitos do número n.

Usaremos o seguinte resultado auxiliar

Lema 1. (DOMINGUES, 2017; HEFEZ, 2013; NIVEN; ZUCKERMAN; MONTGOMERY, 1991) Um número n é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9, ou seja, $S(n)$ é divisível por 9.

Considerando o Lema 1 e o algoritmo de divisão de Euclides, nas próximas seções definiremos a *soma iterada* e apresentaremos algumas propriedades aritmética desta aplicação. O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos resultados clássicos sobre a *soma iterada*, na Seção 3 apresentamos nosso estudo sobre a *soma iterada* de um número concatenado. Mais uma vez reafirmamos que os resultados referentes à *soma iterada*, Seção 2, já são conhecidos na literatura. Algumas provas são fundamentadas em resultados clássicos de divisibilidade (módulo de congruência m), estes podem ser encontrados em (DOMINGUES, 2017; HEFEZ, 2013; NIVEN; ZUCKERMAN; MONTGOMERY, 1991). Em relação ao tema temos uma sustentação motivadora nos trabalhos (CARDOSO; QUADROS, 2021; COSTA et al., 2021; COSTA; SOUZA, 2022; MESQUITA, 2023; IZMIRLI, 2014; VYAWAHARE, 2016), pesquisadores entusiastas no tema em questão.

2. APLICAÇÃO SOMA ITERADA

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ na forma $n = a_k \dots a_2 a_1 a_0$, com $k \geq 0$, podemos associar ao número natural m dado por

$$m := S(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k \, .$$

Segue-se da definição que $S(2024) = 2 + 0 + 2 + 4 = 8$, enquanto $S(123456) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$, e $S(28) = S\big(S(1234567)\big) = 10$. No último caso, aplicamos S ao número $m = S(n)$, para $n = 1234567$, esse processo é chamado de iteração, e o conjunto de iterações é chamado de órbita.

Definição 1. A *órbita* de um número $n \in \mathbb{Z}_+$ pela aplicação S, denotado por $\mathcal{O}(n)$, é o conjunto

$$\mathcal{O}(n) = \{n, S(n), S^2(n), \dots, S^k(n), \dots\}.$$

Nós temos o seguinte resultado

Teorema 1. (IZMIRLI, 2014, 2014, Teorema 1.1), (ZEITZ, 1999, 1999, Problema 7.2.11) Seja n um número inteiro não negativo e $S(n)$ denota a soma dos dígitos de n. Após um número finito de iterações, a órbita $\mathcal{O}(n) = \{n, S(n), S^2(n), \dots, S^k(n), \dots, S^{k_0}(n), S^{k_0}(n) \dots\}$ torna-se constante.

A prova do resultado acima usa o algoritmo de divisão de Euclides e pode ser encontrada em (IZMIRLI, 2014).

Do Teorema 1, segue-se que a órbita de n, ou seja, a sequência $\mathcal{O}(n) = \{S^k(n)\}_{k \in \mathbb{N}}$ se tornará constante após um determinado índice k_0. Neste caso, denotamos por $S^*(n) = S^{k_0}(n)$ o valor constante que chamamos de *soma iterada dos algarismos* do inteiro não negativo n. Agora estamos prontos para estender essa ideia e definir a aplicação *soma iterada* de um inteiro não negativo n.

Definição 2. (BALL, 1917) Definimos a *soma iterada* de um número $n \neq 9$ como a iterada da aplicação soma dos dígitos de n, isto é, a *soma iterada* é o número $S^*(n) = S^{k_0}(n)$, o termo constante do Teorema 1 . Se $n = 9$ então definimos $S^*(n) := 0$.

A escolha da constante nula para a soma iterada de nove ficará esclarecida pelos resultados abaixo. Os primeiros resultados seguem imediatamente da Definição 2.

Proposição 1. Se $0 \leq n < 9$, então $S^*(n) = n$.

Proposição 2. Se $n = 10^k$, para todo número k, então $S^*(n) = 1$.

O seguinte resultado auxiliar estabelece condições para uma fatoração polinomial.

Lema 2. (HEFEZ, 2013, Proposição 3.6) Sejam a e b números inteiros e n um número natural, então $a - b$ divide $a^n - b^n$.

Proposição 3. A diferença entre n e $S^*(n)$ é um múltiplo de 9, isto é, $n - S^*(n) = 9k$ para algum inteiro não negativo k.

Demonstração. Segue-se da Definição 2 que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(n) = S^{k_0}(n)$. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&n - S^{k_0}(n) = \\
&(n - S(n)) + (S(n) - S^2(n)) + \cdots + (S^{k_0-1}(n) - S^{k_0}(n)) = \\
&(n - S(n)) + (S(n) - S(S(n))) + \cdots + (S^{k_0-1}(n) - S(S^{k_0-1}(n)))\ .
\end{aligned}$$

Observe que todos os termos da última soma na expressão acima têm a forma $m - S(m)$, com $m \in \mathbb{N}$. Portanto, é suficiente provar que $m - S(m)$ é um múltiplo de 9. Tomando $m = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_k 10^k$ obtemos que

$$m - S(m) = (10 - 1)a_1 + (10^2 - 1)a_2 + (10^3 - 1)a_3 + \cdots + (10^k - 1)a_k\ .$$

Como, para todo $k \geq 1$, os coeficientes $10^k - 1$ são múltiplos de 9 (Lema 2), segue-se que $m - S(m)$ é um múltiplo de 9 , para todo m. O resultado está comprovado. □

Segue diretamente da Proposição 3

Corolário 1. A diferença entre n e $S^*(n)$ é um múltiplo de 3.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a aplicação soma iterada e a divisão euclidiana por 9.

Teorema 2. Para todo natural n o resto da divisão de n e $S(n)$ por 9 é o mesmo.

Demonstração. Tomando $n = a_0 + a_1 10 + \cdots + a_k 10^k$, temos que

$$a_0 + a_1 10 + \cdots + a_k 10^k \geq a_0 + a_1 + \cdots + a_k\ ,$$

e, consequentemente, $n \geq S(n)$. Usando o algoritmo euclidiano da divisão, obtemos os naturais q_1, q_2 e $0 \leq r_1, r_2 < 9$ tais que

$$n = 9q_1 + r_1 \text{ e } S(n) = 9q_2 + r_2\ .$$

De acordo com a Proposição 3 temos que $n - S(n) = 9q_3$ para algum natural q_3, então

$$\begin{aligned} 9q_3 &= n - S(n) \\ &= 9(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2) \,. \end{aligned}$$

Como $0 \leq |r_1 - r_2| < 9$ obtemos que $r_1 - r_2 = 0$, ou seja, $r_1 = r_2$ e mais $0 \leq q_2 \leq q_1$. □

Os próximos dois resultados são uma consequência direta do Teorema 2.

Proposição 4. Se n for um múltiplo de 9, então $S^*(n) = 0$.

Demonstração. De acordo com o Teorema 2, se $n = 9q$ para algum inteiro q, então $S(9q) = 9q_1$ para algum inteiro q_1, com $0 \leq q_1 \leq q$. Esta etapa, realizada recursivamente encaminha $S(n) = S(9q) = 9q_1$, aplicando novamente

$$S(S(n)) = S(S(9q)) = S(9q_1) = 9q_2 \,,$$

com com $0 \leq q_2 \leq q_1 \leq q$. De onde concluímos que $S^*(9q) = S^*(9) = 0$. □

Proposição 5. Se n não for um múltiplo de 9, então $S^*(n)$ é igual ao resto da divisão de n por 9.

Demonstração. Se $n = 9q + r$ para o inteiro q, r e $0 \leq r < 9$, então pelo Teorema 2, $S(9q + r) = 9q_1 + r$ para algum inteiro q_1, com $0 \leq q_1 \leq q$. Esta etapa, realizada recursivamente encaminha $S^*(9q + r) = S^*(9 + r) = r$. □

Agora segue das Proposições 3, 4 e 5.

Proposição 6. Para todos os pares m, n de inteiros não negativos, as seguintes relações são válidas:
(a) $S^*(m + n) = S^*(S^*(m) + S^*(n))$,
(b) $S^*(m \cdot n) = S^*(S^*(m) \cdot S^*(n))$.

Demonstração. Pelo algoritmo de divisão de Euclides, existem inteiros q_1, q_2, r_1 e r_2 tais que $m = 9q_1 + r_1$ e $n = 9q_2 + r_2$, com $0 \leq r_1, r_2 < 9$.

(a) Temos que $m + n = 9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2 = 9(q_1 + q_2 + q_3) + r_3$, onde usamos o algoritmo de divisão de Euclides para escrever $r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3$, com $0 \leq r_3 < 9$. Agora, usando as Proposições 4 e 5, obtemos que

$$S^*(m + n) = r_3 = S^*(r_3) = S^*(r_1 + r_2) = S^*(S^*(m) + S^*(n)).$$

(b) Da mesma forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} m \cdot n &= 9(9q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2 \\ &= 9(9q_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1 + q_3) + r_3 \,, \end{aligned}$$

em que usamos o algoritmo de divisão de Euclides para escrever $r_1 \cdot r_2 = 9q_3 + r_3$, com $0 \leq r_3 < 9$. Agora, segue das Proposições 4 e 5, que

$$S^*(m \cdot n) = r_3 = S^*(r_3) = S^*(r_1 \cdot r_2) = S^*(S^*(m) \cdot S^*(n)) \,.$$

□

Exemplo 1. Seja $m = 22$, $n = 14$, então $S^*(22) = 4$ e $S^*(14) = 5$. Também temos $m+n = 36$, $m \cdot n = 308$, portanto $S^*(m+n) = 0$ e $S^*(m \cdot n) = 2$. Agora observe que

$$S^*(S^*(m) + S^*(n)) = S^*(4+5) = S^*(9) = 0 = S^*(36) = S^*(m+n) \ ,$$

e

$$S^*(S^*(m) \cdot S^*(n)) = S^*(4 \cdot 5) = S^*(20) = 2 = S^*(308) = S^*(m \cdot n) \ .$$

Se os inteiros m e m_1 são tais que m, m_1 deixam o mesmo resto sob divisão por 9, denotamos $m \equiv m_1 \mod 9$. Usando esta relação e a Proposição 6 podemos facilmente estender os resultados acima para todos os inteiros. Mais explicitamente temos a seguinte afirmação.

Proposição 7. Se os inteiros m, m_1 n e n_1 são tais que $m \equiv m_1 \mod 9$ e $n \equiv n_1 \mod 9$, então

(a) $S^*(m+n) = S^*(m_1+n_1)$,
(b) $S^*(m \cdot n) = S^*(m_1 \cdot n_1)$.

A justificativa está implícita nas Proposições 6 e 7, mas apresentamos um outro argumento. Dados dois números n_1 e n_2 , que divididos por 9 deixam os restos, respectivamente, iguais a r_1 e r_2. Nessas condições, escrevemos: $n_1 = 9q_1 + r_1$ e $n_2 = 9q_2 + r_2$, Segue-se, portanto, que:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 =& 9(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) \ , \\ n_1 \cdot n_2 =& 9(9q_1q_2 + q_1r_2 + r_1q_2) + (r_1 \cdot r_2) \ . \end{aligned}$$

Esta última igualdade permite-nos concluir que $n_1 + n_2$ e $r_1 + r_2$ ou $n_1 \cdot n_2$ e $r_1 \cdot r_2$, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto.

Nota 1.

- O Exemplo 1 descreve a possibilidade de utilizar a aplicação $S^*(\cdot)$ para justificar ou testar a veracidade de qualquer expressão aritmética (adição, multiplicação e suas simétricas), método tradicional de "verificar um cálculo eliminando noves" conhecido por **noves fora**. Por exemplo, de acordo com a Proposição 6, o cálculo $22 \cdot 14 = 307$ deve estar incorreto, porque a aplicação soma iterada da expressão no lado esquerdo é $S^*(4 \cdot 5) = 2$, enquanto a aplicação soma iterada da expressão do lado direito é $S^*(307) = 1$.

- O leitor mais experiente ou atento observará que se um cálculo (resultado de uma expressão aritmética) estiver correto e $S^*(\cdot)$ for executado corretamente, sempre confirmará a validação ou correção da igualdade (resposta).

- A **possibilidade de falha** ocorre quando o cálculo está errado e $S^*(\cdot)$ não consegue detectar o erro. A situação ocorrerá se e somente se o resultado obtido (que está errado) e o resultado correto deixarem o mesmo resto na divisão por 9 . Na verdade, se a resposta errada dada para a multiplicação $22 \cdot 14$ fosse 317 o erro não seria detectado pelo teste de $S^*(\cdot)$, pois $S^*(317) = 2$.

Em tempo, todos resultados desta seção envolvendo a aplicação soma de algarismos podem ser encontrados, ou determinados como consequência direta, em (IZMIRLI, 2014) e (VYAWAHARE, 2016).

Para finalizar esta seção apresentamos uma resolução usando a aplicação soma dos algarismos em uma questão proposta em treinamentos de estudantes para Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Questão 1. (OBMEP, 2019, BQ 2019) Qual é a soma iterada dos algarismos do número que se obtém ao calcular $2^{100} \cdot 5^{103}$.

Resolução: Na resolução desta questão utilizaremos duas propriedade de potenciação, a saber,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{e} \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \ ,$$

desta forma,

$$X = 2^{100} \cdot 5^{103} = 2^{100} \cdot 5^{100} \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^{100} \cdot 5^3 = 125 \cdot 10^{100} \ .$$

Fazendo uso da Proposições 2 e 6 obtemos que

$$\begin{aligned} S^*(X) &= S^*\Big(\big(S^*(125)\big) \cdot \big(S^*(10^{100})\big)\Big) \\ &= S^*\big(8 \cdot 1\big) = 8 \ . \end{aligned}$$

Portanto, a soma iterada dos algarismos do número $2^{100} \cdot 5^{103}$ tem como resultado 8.

3. SOMA ITERADA DE NÚMEROS CONCATENADOS

Primeiramente vamos introduzir e utilizar a notação $n_{[k]}$, que significa n concatenado ou justaposto k vezes. Por exemplo, se $n = 2024$ e $k = 3$ então $2024_{[3]} = 202420242024$.

Nesta seção inicialmente tomamos um número n, e realizamos a concatenação (ou justaposição) deste número $k \geq 1$ vezes; e assim para cada k-etapa de concatenação aplicaremos a aplicação S^*. Observaremos, e estudaremos, a existência de uma regularidade nesse processo.

Aplicando o princípio de indução matemática em $k \geq 1$, mostra-se que:

Lema 3. Seja n um número com $t \geq 1$ algarismos assim o número $n_{[k]}$, concatenado k vezes, é escrito na forma

$$n_{[k]} = n \times 10^{(k-1)t} + \cdots + n \times 10^{2t} + n \times 10^t + n \ .$$

Exemplo 2. Sendo $n = 123$ um número com 3 algarismos e $2 \leq k \leq 4$, temos que:

$123_{[2]} = 123123 = 123 \times 10^3 + 123;$
$123_{[3]} = 123123123 = 123 \times 10^6 + 123 \times 10^3 + 123;$
$123_{[4]} = 123123123123 = 123 \times 10^9 + 123 \times 10^6 + 123 \times 10^3 + 123.$

Exemplo 3. Agora para $n = 5$, um número com um algarismo, e $2 \leq k \leq 4$, segue que:

$5_{[2]} = 55 = 5 \times 10^1 + 5;$
$5_{[3]} = 555 = 5 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 5;$
$5_{[4]} = 5555 = 5 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 5.$

Nota 2. Como no Exemplo 3, um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) é denominado de *monodígito* num sistema numérico posicional e numa base $b > 1$ fixada. Assim, dado $a \in D = \{1, 2, \cdots, 8, 9\}$, o número concatenado $a_{[k]}$, para todo $k \geq 1$ são exemplos de números *monodígitos*, vejamos:

$$2_{[2]} = 22, \ 1_{[3]} = 111, \ 4_{[5]} = 44444, \ 7_{[6]} = 777777, \ 9_{[11]} = 99999999999 \ .$$

O termo e o conceito de *monodígito* foi usado pela primeira vez por Beiler (BEILER, 1964, 1966), que também apresentou o termo *repunidade* (repetição da unidade) no caso em que o dígito repetido for 1. Para mais detalhes, veja também (COSTA; SANTOS, 2022).

No exemplo seguinte faremos a soma iterada de um número concatenado para cada etapa k da concatenação.

Exemplo 4. Para $1 \leq k \leq 5$ considere o número concatenado $123_{[k]}$. Vamos determinar $S^*(123_{[k]})$ para cada k.

- Para $k = 1$, segue que $S(123) = 1 + 2 + 3 = 6$ e assim $S^*(123_{[1]}) = 6$;
- para $k = 2$, temos que $S(123123) = 12$ e $S^2(123123) = S(12) = 3$ e obtemos que $S^*(123_{[2]}) = 3$;
- para $k = 3$, temos que $S(123_{[3]}) = 18$ e $S^2(123_{[3]}) = S(18) = 9$ e obtemos que $S^*(123_{[3]}) = 0$;
- para $k = 4$, temos que $S(123_{[4]}) = 24$ e $S^2(123_{[4]}) = S(24) = 6$ e obtemos que $S^*(123_{[4]}) = 6$;
- para $k = 5$, obtêm-se que $S^*(123_{[5]}) = 3$.

A soma iterada de um número concatenado pode ser determinada pelo seguinte resultado, o principal resultado de nosso trabalho.

Teorema 3. Dados quaisquer números n e k, considere o número concatenado $n_{[k]}$, temos que

$$S^*(n_{[k]}) = S^*\big(S^*(k) \times S^*(n)\big) \ .$$

Demonstração. Dado um número n, pelo Lema 3 temos que

$$n_{[k]} = n \times 10^{(k-1)t} + \cdots + n \times 10^{2t} + n \times 10^t + n \ .$$

Agora realizando $S^*(n_{[k]})$, aplicando a Proposição 6, segue que,

$$\begin{aligned} S^*(n_{[k]}) &= S^*\big(n \times 10^{(k-1)t} + \cdots + n \times 10^{2t} + n \times 10^t + n\big) \\ &= S^*\big(S^*(n) \times S^*(10^{(k-1)t}) + \cdots + S^*(n) \times S^*(10^{2t}) + \\ &\quad + S^*(n) \times S^*(10^t) + S^*(n)\big) \end{aligned}$$

Como $S^*(10^t) = 1$, Proposição 2, resulta que,

$$\begin{aligned} S^*(n_{[k]}) &= S^*\big(\underbrace{S^*(n) + S^*(n) + \cdots + S^*(n)}_{k \text{ vezes}}\big) \\ &= S^*\big(k \times S^*(n)\big) \end{aligned}$$

Aplicando mais uma vez a Proposição 6, ou seja, $S^*(k \times S^*(n)) = S^*(S^*(k)) \times S^*(n))$, concluímos o resultado. $\square$

Exemplo 5. Especifiquemos o Teorema 3 tomando o número $n = 14$ e o número concatenado $n_{[7]} = 14141414141414$. Como $S^*(14) = 5$, segue que

$$\begin{aligned} S^*(14_{[7]}) &= S^*\big(S^*(7) \cdot S^*(5)\big) \\ &= S^*(35) = 8 \ . \end{aligned}$$

Para compreender o processo iterativo e obter uma regularidade, ou padrão, na aplicação $S^*(n_{[k]})$ vamos observar os elementos da soma iterada. Neste primeiro exemplo, observamos uma repetição após noves iterações, ou seja, uma sequência com ciclo 9, vejamos:

Exemplo 6. Considere $n = 23$ e a aplicação S^* em todo número concatenado $n_{[k]}$ para $k \geq 1$. Temos que:

$$\begin{array}{ll} S^*(23_{[1]}) = 5 & S^*(23_{[7]}) = 8 \\ S^*(23_{[2]}) = 1 & S^*(23_{[8]}) = 4 \\ S^*(23_{[3]}) = 6 & S^*(23_{[9]}) = 0 \\ S^*(23_{[4]}) = 2 & S^*(23_{[10]}) = 5 \\ S^*(23_{[5]}) = 7 & S^*(23_{[11]}) = 1 \\ S^*(23_{[6]}) = 3 & \vdots \end{array}$$

o processo iterativo no número concatenado $n_{[k]}$ gera uma sequência com ciclo de tamanho 9, isto é, conjunto de soma iterada é $\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, \ldots\}$

Observemos ainda outra situação análoga.

Exemplo 7. Tomemos $n = 11$ e a aplicação S^* em todo número concatenado $n_{[k]}$ para $k \geq 1$.

$$\begin{array}{ll} S^*(11_{[1]}) = 2 & S^*(11_{[7]}) = 5 \\ S^*(11_{[2]}) = 4 & S^*(11_{[8]}) = 7 \\ S^*(11_{[3]}) = 6 & S^*(11_{[9]}) = 0 \\ S^*(11_{[4]}) = 8 & S^*(11_{[10]}) = 2 \\ S^*(11_{[5]}) = 1 & S^*(11_{[11]}) = 4 \\ S^*(11_{[6]}) = 3 & \vdots \end{array}$$

Novamente podemos observar no conjunto de iterações é dado por $\{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 2, \ldots\}$, e como no exemplo anterior, uma periodicidade com um ciclo de tamanho 9.

A situação descrita pelos exemplos é comprovada pelo seguinte resultado.

Teorema 4. Dados quaisquer n, k, j números inteiros positivos e $n_{[k]}$ o número concatenado. Tem-se que

$$S^*\big(n_{[k]}\big) = S^*\big(n_{[j]}\big)$$

se, e somente se, k e j tiverem o mesmo resto na divisão por 9.

Demonstração. Dados k e j inteiros positivos, pela divisão euclidiana, temos o quociente e resto de k e j na divisão por 9 em ordem q_1, q_2 e r_1, r_2, ou seja, $k = 9q_1 + r_1$, com $q_1, r_1 \in$

$\mathbb{Z}_+, 0 \leq r_1 < 9$ e $j = 9q_2 + r_2$, com com $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq r_2 < 9$. Segue das Proposições 1, 4, 5 e 6 que

$$S^*(k) = S^*(9q_1 + r_1) = r_1 \; ,$$
$$S^*(j) = S^*(9q_2 + r_2) = r_2 \; .$$

Desde que $r_1 = r_2$ (hipótese), obtemos que

$$S^*(k) = S^*(j) \; . \tag{1}$$

E claramente, se a Equação (1) ocorre, acarreta que $r_1 = r_2$.

Agora fazendo uso do Teorema 3, e Equação (1), temos

$$\begin{aligned} S^*(n_{[k]}) &= S^*\big(S^*(k) \times S^*(n)\big) \\ &= S^*\big(S^*(j) \times S^*(n)\big) \\ &= S^*(n_{[j]}) \; . \end{aligned}$$

□

Nota 3. Naturalmente, nem todo conjunto de iterações de um número concatenado $n_{[k]}$ possui uma periodicidade com um ciclo de tamanho 9, veja Exemplo 4. No entanto o Teorema 4 garante que ocorre a igualdade dos elementos quando $k \equiv j \mod 9$.

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 4, e cada item, pode ser facilmente verificado.

Proposição 8. Dados quaisquer números n e k, considere o número concatenado $n_{[k]}$.

- Se $S^*(n) = 1$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 1, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 2$ então a órbita $S^*(n_{[k]})$ é igual $\{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 0, 2, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 3$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual $\{3, 6, 0, 3, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 4$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual $\{4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 0, 4, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 5$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual$\{5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 0, 5, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 6$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual$\{6, 3, 0, 6, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 7$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual $\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 0, 7, \ldots\}$.
- Se $S^*(n) = 8$ então $S^*(n_{[k]})$ terá órbita igual$\{8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 8, \ldots\}$.

Para finalizar a seção, o seguinte problema.

Questão 2. (ZEITZ, 1999, adaptado) Seja $n_{[k]} = 4444_{[4444]}$. Encontre a órbita gerada por $S^*(n_{[k]})$ e a quantidade de vezes que $S^*(4444_{[4444]})$ aparece no intervalo de $1 \leq k \leq 4444$.

Solução: Inicialmente vamos determinar $S^*(n)$, ou seja, $S^*(4444) = 7$. Segue da Proposição 8 que a órbita gerada pelo conjunto de iterações de $S(4444_{[4444]})$ é igual $\{7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2, 9, 7 \cdots\}$.

Agora vamos determinar $S^*(4444_{[4444]})$, para esse resultado vamos fazer uso do Teorema 3, como $S^*([4444]) = 7$ segue que

$$\begin{aligned} S^*(S^*(4444) \times S^*(4444)) &= S^*(S^*(7) \times S^*(7)) \\ &= S^*(7 \times 7) \\ &= S^*(49) = 4\,. \end{aligned}$$

Então temos que $S^*(4444_{[4444]}) = 4$,

O último ponto a ser determinado é quantas vezes o número 4 aparece na órbita. Pelo Teorema 4, $S^*\left(n_{[k]}\right) = 4$ para os números k que possuem o mesmo resto por 9 que número 4444 . Como $4444 = 9 \times 493 + 7$, segue que existem 494 números na forma $k = 9q + 7$ com $0 \leq q \leq 493$, tais que $S^*\left(n_{[k]}\right) = 4$.

4. CONSIDERAÇÕES

O conceito de *soma iterada* de um número natural é conhecido há algum tempo, e antes do desenvolvimento dos dispositivos computacionais, esta técnica era utilizada pelos calculadores para verificar resultados. Examinando o fundamento deste procedimento vemos que existe a possibilidade de ocorrer falha quando a conta está errada e a verificação não consegue detectar tal erro, erro, como discutido na Nota 1, maiores detalhes em (GUEDES, 2000; RODRIGUES, 1989).

Neste trabalho compreendemos que ao concatenar um número n geramos um conjunto de elementos, uma órbita, que a depender de $S^*(n)$ tem uma sequência específica com um ciclo, ou seja, um padrão de regularidade. A aplicação soma iterada de algarismos é algo bastante recorrente em problemas olímpicos, por exemplo consulte o banco de questões da OBMEP(Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), para um leitor interessado sugerimos uma consulta aos Banco de Questões ou Provas aplicada da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)(OBMEP, 2019), ou ainda as referências(ANDREESCU; GELCA, 2008; COSTA et al., 2021; COSTA; SANTOS, 2022; ZEITZ, 1999). Destarte, o trabalho teve como propósito instigar estudantes, professores e pesquisadores dá área, de modo a despertar outros estudos e contribuições. Esperamos, ainda, que este estudo também contribua como ferramenta potencializadora no contexto da educação básica, incentivando os estudantes ao campo da pesquisa científica e desmitificando a matemática como uma área difícil e que é para poucos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho, o primeiro autor, foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.

5. REFERÊNCIAS

ANDREESCU, T.; GELCA, R. **Mathematical olympiad challenges**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.

BALL, W. W. R. **Mathematical recreations and essays**. [S.l.]: Macmillan, 1917.

BEILER, A. H. **Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains**. [S.l.]: Courier Corporation, 1964.

CARDOSO, L. T.; QUADROS, G. Properties of the digital root and its extension to rational numbers–an algebraic approach. **preprint arXiv:2110.03746v1 [math.NT]**, 2021.

COSTA, E. A.; LIMA, D.; MESQUITA, E. G. C.; SOUZA, K. C. O. Soma iterada de algarismos de um número racional. **Ciência e Natura, Santa Maria**, v. 43, p. e12, 2021.

COSTA, E. A.; SANTOS, D. C. Algumas propriedades sobre os números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47–58, 2022.

COSTA, E. A.; SOUZA, K. C. O. Sequência de somas de números racionais. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 8, n. 1, p. e3004–e3004, 2022.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. [S.l.]: Florianópolis: editora da UFSC, 2017.

GUEDES, E. C. B. A prova dos onze. **Revista do Professor de Matemática**, v. 44, p. 40–41, 2000.

HEFEZ, A. **Aritmética, Coleção PROFMAT, 1a edição**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

IZMIRLI, I. M. On some properties of digital roots. **Advances in Pure Mathematics**, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 6, p. 295–301, 2014.

MESQUITA, É. G. C. Soma iterada de algarismos de racionais e números primos. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 48–62, 2023.

NIVEN, I.; ZUCKERMAN, H. S.; MONTGOMERY, H. L. **An introduction to the theory of numbers**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991.

OBMEP, O. B. d. M. d. E. P. **Banco de Questões**. 2019. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em: 10 dez 2023.

RODRIGUES, F. W. A prova dos nove. **Revista do Professor de Matemática**, v. 14, p. 1–3, 1989.

VYAWAHARE, A. The digital root. **At Right Angles**, Azim Premji University, v. 5, n. 2, p. 42–44, 2016.

ZEITZ, P. **Art Craft Problem Solving**. [S.l.]: John Wiley New York publisher, 1999.