



ROGER COTES E SUA VERSÃO DA FÓRMULA DE EULER

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck

<kelly.lubeck@unioeste.br>

Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, PR, Brazil



<<https://orcid.org/0000-0003-4787-1279>>

Resumo

Os números complexos representam uma extensão numérica do conjunto dos números reais que atribuem novas particularidades a esse agrupamento tornando-o, em vários cenários, mais simples e vantajoso. Entretanto, o seu reconhecimento e aceitação como sistema numérico enfrentou resistência e a estruturação de suas propriedades e a escolha das melhores definições para as extensões de funções reais, como a extração de raízes n -ésimas, a exponencial, a logarítmica e as funções trigonométricas, somente se consolidou após o trabalho de diversos matemáticos. Nesse artigo, pautados em considerações de cunho histórico, apresentaremos caminhos que conduziram a Fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, bem como discutiremos o trabalho realizado por Roger Cotes (1682–1716) sobre a área da superfície de um elipsóide, estudo que conduziu o matemático inglês a uma versão logarítmica da famosa Fórmula de Euler, antecipando em mais de 30 anos essa relação, mas cujo trabalho frequentemente não é mencionado em livros didáticos. Ademais, exibiremos exemplos numéricos que elucidam as asserções propostas por Cotes. Assim, por meio da apresentação e discussão de elementos históricos que conduziram o desenrolar da teoria dos números complexos, esperamos despertar o interesse de acadêmicos e professores de matemática para essa área do conhecimento.

Palavras-chave: Fórmula de Euler, Roger Cotes, Números Complexos.

1. INTRODUÇÃO

Os números complexos são representados pelo conjunto $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$ sobre o qual se estabelece as operações de adição e multiplicação como segue: se $z = a + ib$, $w = c + id \in \mathbb{C}$, então

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \text{ e } z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Tal definição permite provar que $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ possui a estrutura de corpo, ou seja, satisfaz as propriedades associativa e comutativa para a adição e multiplicação, a existência de elementos neutros (0 e 1) e simétricos ($z \neq 0$) para ambas as operações e a distributividade da multiplicação em relação a adição. Ademais, os números complexos, ou imaginários, possuem uma representação no *plano complexo*, conforme Figura 1, com a qual é possível apresentar uma interpretação para suas operações aritméticas, a adição como uma *soma vetorial* e a multiplicação como resultado de um vetor na direção da *soma angular* cujo módulo é a multiplicação dos módulos dos valores complexos que o define. Detalhes em (FERNANDES; JR., 2006).

A ideia de que todo o número elevado ao quadrado resulta em um número positivo ($a^2 = a \cdot a \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$) foi tomada como verdadeira por muito tempo e isso prejudicou a aceitação dos números complexos. De fato, para além dos imaginários, “até o final do século XVIII as raízes negativas e imaginárias de equações eram consideradas quantidades irrealis” (ROQUE, 2012, p. 409).

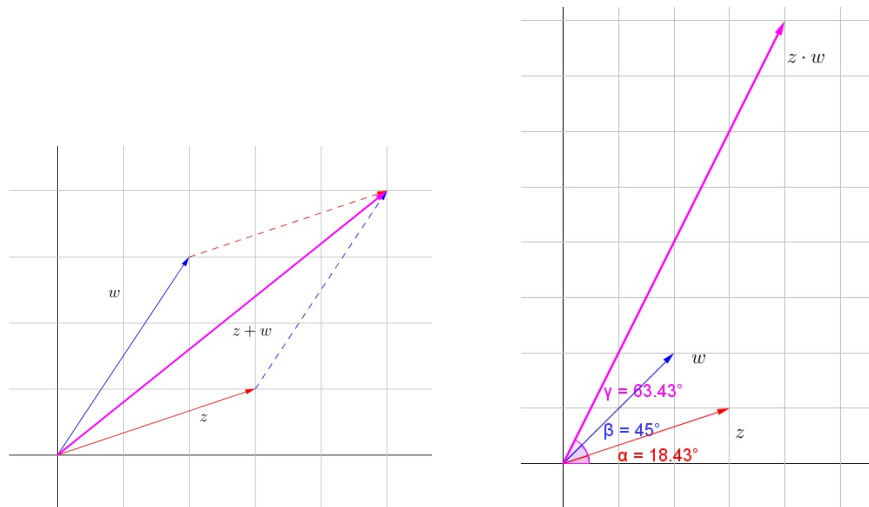


Figura 1. Representação da soma e do produto no plano complexo.

De modo geral, um corpo ordenado $K = (K, +, \cdot)$ pode ser escrito como união disjunta $K = \{P\} \cup \{-P\} \cup \{0\}$, onde P é chamado do conjunto de elementos positivos e $-P$ dos negativos. Como P é fechado para adição e multiplicação de K , segue que $\forall a \in P \subset K : a^2 = a \cdot a \in P$. Ainda, pela propriedade de ordenação da tricotomia, se a é não nulo e $a \notin P$, então $-a \in P$ e $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$. Isso mostra que um número elevado ao quadrado sempre é positivo e, também, que $-1 \in -P$, já que $1 = 1^2 \in P$. Assim, \mathbb{C} não pode ser um corpo ordenado, uma vez que $i^2 = -1$, ou seja, possui um elemento cuja potência quadrada não é positiva.¹

Outrossim, falar de ordem total de um corpo K é compreender uma relação de ordem (\preceq) que seja compatível com a operação de adição e multiplicação do corpo, ou seja, $\forall x, y, z \in K$, temos:

- se $x \preceq y$, então $x + z \preceq y + z$;
- se $0 \preceq x$ e $0 \preceq y$, então $0 \preceq x \cdot y$.

Há de se tomar cuidado e fazer a distinção entre corpo ordenado e as relações de ordem que se podem estabelecer num conjunto, sendo estas últimas definidas como relações $R \subset K \times K$ que satisfazem as propriedades reflexiva, antisimétrica e transitiva.² Conforme (BASTOS; COSTA, 2012, p. 38), ao dizermos que “os complexos não podem ser ordenados não estamos sendo nem corretos, nem precisos. Pois [...] o conjunto dos números complexos pode ser totalmente ordenado. No entanto, [...] temos que o corpo dos números complexos não é ordenado”.

Nesse artigo vamos retomar interpretações que conduziram a famosa fórmula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (1)$$

primeiramente, explorando a representação de determinadas funções por séries de potência, através de um desencadeamento utilizado por Euler, e, posteriormente, apresentando o estudo

¹ Observe que não é possível supor que $-1 \in P \subset \mathbb{C}$, pois teríamos $1 = (-1) \cdot (-1) \in P$, contrariando a lei da tricotomia. Detalhes em (LIMA, 2000).

² Reflexiva: xRx , antisimétrica: xRy e $yRx \Rightarrow x =_R y$, transitiva: xRy e $yRz \Rightarrow xRz$.

realizado por Roger Cotes que culminou em uma fórmula equivalente a expressa acima, mas que antecedeu essa relação em mais de 30 anos (veja (COTES, 1714)). Nesse estudo, Cotes buscava calcular a área da superfície de um elipsóide e, nesse interim, propôs a relação

$$\ln(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = i\theta. \quad (2)$$

Por fim, trabalhamos com exemplos para evidenciar as equivalências numéricas abordadas na argumentação desenvolvida por Cotes. Para isso, utilizamos a notação e a concepção atual de algumas funções complexas. Dessa forma, exploramos outras relações matemáticas que encaminham a resultados semelhantes aos clássicos já conhecidos.

As considerações que desenvolveremos nas seções 3 e 4 estão apoiadas na obra (NAHIN, 1998), as quais apresentamos, em linguagem moderna, sem maiores preocupações com as questões de manuseio de variáveis e convergência das séries (tanto reais quanto complexas), pois nosso objetivo é a compreensão das ideias que conduziram as expressões discutidas. Para maiores detalhes relacionados a convergência de séries e limites veja (LIMA, 2000) e (CHURCHILL, 1975). Ademais, Euler manipulou de forma despreziosa muitas séries e limites, que o rigor de hoje impõe certos cuidados e restrições, mas que a época eram justificáveis. Ainda, como forma de elucidar as discussões apresentadas, na seção 5 apresentamos exemplos que reforçam a validade da fórmula (2).

2. O DESPERTAR DA TEORIA - UM POUCO DA HISTÓRIA

Os números complexos não surgiram como resposta às soluções de raízes quadráticas negativas, provenientes da “Fórmula de Báskara”³; já que essas equações eram propostas, em sua maioria, para resolverem problemas práticos. Assim, caso a solução indicasse raízes quadradas de valores negativos se deduzia que a questão não possuía solução, desconsiderando-se os valores. Na verdade, eles surgem como resposta aos entraves numéricos advindos com a fórmula para resolução de equações cúbicas.

Segundo (STRUIK, 1992), Gregos e Orientais haviam ensaiado soluções para as equações do terceiro grau e resolvido alguns casos numericamente. Era de conhecimento dos estudiosos que as cúbicas podiam ser reduzidas aos casos:

$$x^3 + px = q, x^3 = px + q, x^3 + q = px,$$

em que p e q são números positivos. Ainda conforme (STRUIK, 1992, p. 146), a soluções para equações cúbicas

Foram investigadas especialmente pelo Prof. Scipio del Ferro, que morreu em 1526. Pode crer-se, [...] que, na realidade, del Ferro resolveu todos os tipos. Nunca publicou as suas soluções e falou a poucos amigos [Antônio Fior] sobre elas. Contudo, a fama da descoberta tornou-se conhecida e, depois da morte de Scipio, um calculador veneziano chamado Tartaglia, alcunhado de *O Gago*, redescobriu os seus métodos (1535).

³ No Brasil costuma-se atribuir o nome Fórmula de Báskara a fórmula de resolução das equações do segundo grau, entretanto Báskara não é o responsável por tal formulação.

Além desses personagens, sobrevém Girolamo Cardano que,

Depois de um juramento solene de segredo, conseguiu de Tartaglia a chave da solução da cúbica. Em 1545, porém, quando apareceu em Nuremberg a *Ars Magna* de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia da cúbica (EVES, 2011, p. 303).

De fato, Girolamo Cardano (1501-1576), em 1545, publicou o livro *Ars Magna*, um compêndio sobre a álgebra da época, no qual apresentou a fórmula para resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$, além de manipulações com raízes negativas, mas, como seus contemporâneos, acabou por descartá-las por considerá-las inúteis. A publicação dessa fórmula causou diversas discussões sobre a primazia da sua resolução. Disputas à parte,⁴ a fórmula de resolução da equação cúbica é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad (3)$$

Rafael Bombelli (1526-1573) foi um dos precursores no entendimento de que se deveria criar uma estrutura que contemplasse as raízes quadráticas negativas como forma de justificar a solução $x = 4$ para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, como menciona (GARBI, 2007).

Aplicando os coeficientes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ em (3), Bombelli chegou a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e, diferentemente de seus antecessores, estabeleceu uma estrutura permitindo o manuseio de $\sqrt{-1}$, uma vez que tinha conhecimento da raiz 4. As demais raízes são: $-2 + \sqrt{3}$ e $-2 - \sqrt{3}$. Assim, da necessidade de se justificar um procedimento aritmético que conduza a solução para

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4,$$

oriundo de uma equação de terceiro grau, Bombelli deu início aos estudos sobre os números complexos (GARBI, 2007).

A partir desse momento, diversos matemáticos contribuíram com a elucidação das questões que envolviam os números imaginários, entre eles destacamos: John Bernoulli (1667-1748), René Descartes (1596-1650), John Wallis (1616-1703), Abraham De Moivre (1667-1754), Roger Cotes (1682-1716), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Caspar Wessel (1745-1818), Jean-Robert Argand (1768-1822), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Agustin-Louis Cauchy (1789-1857) e William Rowan Hamilton (1805-1865) (KATZ, 2010).

Ademais, a dificuldade de se dissociar soluções para equações polinomiais de grandezas positivas, isto é, valores positivos que possam responder a problemas práticos, pode ter contribuído para o retardo dessa teoria.

A discussão sobre as quantidades negativas, durante o século XVIII, mostra que somente os números absolutos eram aceitos, pois se pretendia relacionar a existência em matemática a uma noção qualquer de "realidade". Para avançar era preciso migrar para um conceito de número não subordinado à ideia de quantidade (ROQUE, 2012, p. 407).

4 Aos interessados vide (EVES, 2011), (GARBI, 2007), (KATZ, 2010) e (STRUJK, 1992).

Por fim, “o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos fosse firmemente estabelecido foi dado com a introdução da noção de vetor. Esse conceito apareceu na Inglaterra, no final do século XIX, nos trabalhos de W. R. Hamilton” (ROQUE, 2012, p. 452).

Essa teoria nos permite estabelecer uma das mais elegantes identidades matemáticas, relacionando valores que aparentemente nada tem em comum e que, também historicamente, se encontram afastados: a unidade (1), a constante definida pela razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro (π), o zero (0), o número de Euler (e), que está associado ao limite $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e a unidade imaginária (i). A Identidade de Euler, assim definida para homenagear esse importante matemático, é dada por: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Segundo (BOYER, 1996, p. 305),

Os três símbolos e , π , i , pelos quais Euler em grande parte é responsável, podem ser combinados com os dois inteiros mais importantes, 0 e 1, na célebre igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, que contém os cinco números mais significativos (bem como a mais importante relação e a mais importante operação) em toda a matemática. O equivalente dessa igualdade, em forma generalizada, fora incluído por Euler em 1748 em seu livro didático mais conhecido, *Introductio in analysin infinitorum* (Grifo do autor).

Euler apresentou a fórmula (1) em seu *Introductio* em 1748 e, para $\theta = \pi$, ela resulta na identidade acima mencionada. Entretanto, Roger Cotes publicou em 1714 a sua versão logarítmica da equação (2) na revista *Philosophical Transactions* de Londres, que foi republicada em 1722 (postumamente) no *Harmonia mensurarum*, um material que obteve maior divulgação. Se Cotes tivesse aplicado a periodicidade das funções trigonométricas a equação (2) teria antecipado a Euler em 34 anos, mostrando que a definição do logaritmo admite infinitos valores (CAJORI, 2007).

Na sequência apresentamos algumas relações que eram de conhecimento de Euler e que, possivelmente, desencadearam o estabelecimento da fórmula (1).

3. A FÓRMULA DE EULER

Em correspondências trocadas com John Bernoulli, no ano de 1740, Euler expõe duas soluções para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0,$$

que são $y(x) = 2 \cos x$ e $y(x) = e^{xi} + e^{-xi}$. Admitindo que $(e^{cx})' = ce^{cx}$, $\forall c \in \mathbb{C}$, um cálculo rápido mostra que elas satisfazem as condições acima, logo as duas expressões devem ser iguais, concluindo que:

$$2 \cos x = e^{xi} + e^{-xi}. \tag{4}$$

Nesse mesmo ano, em outra correspondência, apresenta a relação

$$2i \operatorname{sen} x = e^{xi} - e^{-xi}.$$

Ainda, no ano seguinte, em 1741, usa a relação estabelecida em (4) para mostrar uma surpreendente aproximação, já que o conceito de potências de números imaginários ainda não estava consolidado.

$$\frac{2^i + 2^{-i}}{2} \approx \frac{10}{13}.$$

De fato, Euler percebeu que $\frac{2^i + 2^{-i}}{2} = \frac{e^{i \ln 2} + e^{-i \ln 2}}{2} = \cos(\ln 2)$, e, com isso, calculou $\cos(\ln 2) \approx 0,7692389$. Como $\frac{10}{13} \approx 0,7692307$, os valores coincidem até a quinta casa decimal. (NAHIN, 1998)

Apesar do conhecimento das relações entre as funções cosseno, seno e exponencial (complexa), e das manipulações realizadas por Euler, somente em 1748 é que ele publica explicitamente a fórmula (1) em seu livro *Introductio in Analysis Infinitorum* que, segundo (NAHIN, 1998), se deu devido a confiança reforçada nessa expressão pelas relações que ele obteve com as séries de potências⁵ das funções e^x , $\cos x$, $\sin x$. Relembrando, elas são dadas por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \dots$$

Ao substituir x por $i\theta$ no desenvolvimento de e^x , Euler obteve:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

E chegasse a Fórmula de Euler de um novo modo: preciso, esclarecedor e brilhante! E para o valor de $\theta = \pi$ temos a identidade $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, ou seja, $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Ademais, para se preservar a propriedade da exponencial real, que soma expoentes de potências de mesma base, é natural esperarmos que, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tenhamos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \quad (5)$$

A expressão (5) permite simplificar a representação da forma polar (ou trigonométrica), vide Figura 2, de um número complexo $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ fazendo uso da exponencial:

⁵ As séries em questão, na época, já eram de conhecimento da comunidade de matemáticos. Hoje, pelo desenvolvimento da Série de Taylor, para vizinhanças adequadas de um valor a , uma função $f(x)$ de classe C^∞ analítica é aproximada pela série de potências: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$, vide (LIMA, 2000).

$z = re^{i\theta}$. Aqui, $r = |z|$ e θ , também chamado de argumento de z ou $\arg z$, satisfaz as equações $\cos \theta = \frac{x}{r}$ e $\sin \theta = \frac{y}{r}$. Perceba que $\arg z$ possui infinitos arcos, já que $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, são arcos que satisfazem a mesma representação polar. Esta característica é que irá permitir a interpretação do logaritmo como um conjunto com infinitas soluções.

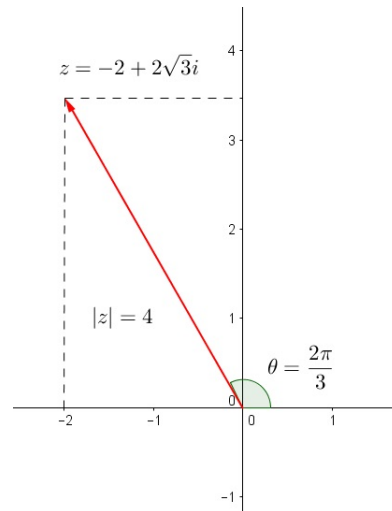


Figura 2. Representação de z no plano complexo.

A relação (5) conduziu Euler a esclarecer dúvidas e controvérsias que ainda existiam em relação ao logaritmo de um número real negativo ou complexo. Compreendendo o logaritmo como o inverso da exponencial, estabeleceu o $\log z$ como o conjunto dos valores $w = u + iv \in \mathbb{C}$ tais que $e^w = z = x + iy$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \log z = w &\Leftrightarrow e^w = z \\
 &\Leftrightarrow e^u e^{iv} = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \\
 &\Leftrightarrow e^u e^{iv} = |z|e^{i\theta} \\
 &\Leftrightarrow e^u = |z| \text{ e } v = \arg z \\
 &\Leftrightarrow w = \ln |z| + i \arg z \\
 &\Leftrightarrow w = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Elucidou-se, com isso, um dos pontos conflitantes da teoria, a definição de logaritmos para valores reais negativos e imaginários. Assim, depois de Euler ficou determinado, por exemplo, que:

- $\log 2 = \ln |2| + i \cdot \arg(2) = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- $\log -1 = \ln |-1| + i \cdot \arg(-1) = \pi i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- $\log i = \ln |i| + i \cdot \arg(i) = \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.
- $\log(1 + i) = \ln |1 + i| + i \cdot \arg(1 + i) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, para o argumento principal, ou seja, a determinação do argumento (do ângulo) em $[0, 2\pi)$, temos:

- $\log 2 = \ln 2$, coincide com a definição real.
- $\log -1 = \pi i$, logaritmo de -1 , um valor negativo, resulta em um imaginário.
- $\log i = \frac{\pi}{2}i$.
- $\log(1 + i) = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i$.

4. A FÓRMULA DE COTES

Nessa seção vamos apresentar o desenvolvimento utilizado por Roger Cotes que o conduziu a fórmula (2). Para tanto, considere a elipse, centrada na origem, dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

em que a e b são os comprimentos dos semi-eixos, conforme Figura 3. Tomando a porção do primeiro quadrante e rotacionando-a em torno do eixo- y , obtemos a superfície de revolução de meio elipsóide.

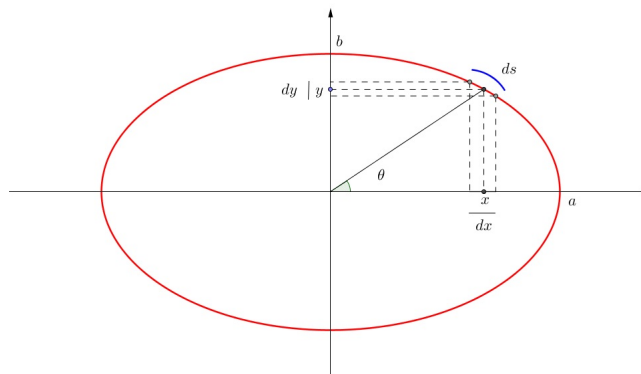


Figura 3. Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Relembramos que o cálculo da área de uma superfície gerada pela revolução de uma função $x = g(y)$, em torno do eixo- y , é dada pela fórmula $\mathcal{A} = \int_c^d 2\pi x ds$ sendo que ela provem, no limite, da aproximação de somas da área da superfície de troncos de cones, que é dada por $A_{TC} = 2\pi r l$, em que $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ é o raio médio e l a reta geratriz, conforme Figura 4.

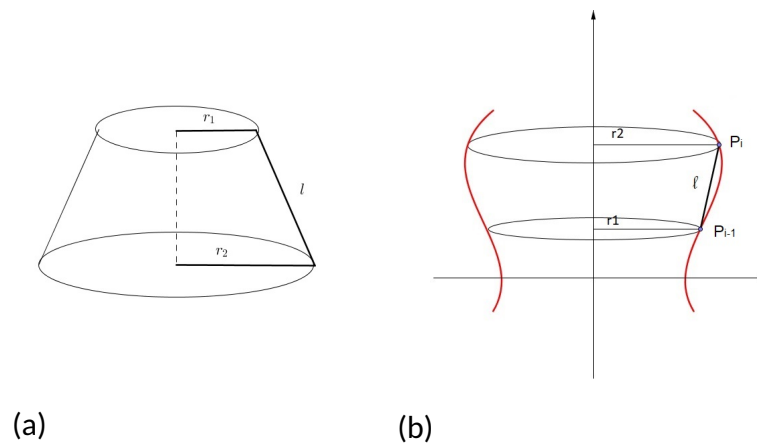


Figura 4. (a) Tronco de cone. (b) Superfície de rotação aproximada por um tronco de cone.

Em nossa construção $l = |P_{i-1}P_i|$ e, no limite, representa o comprimento do arco de P_{i-1} a P_i e $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.⁶

Parametrizando a elipse da Figura 3 em função do ângulo θ , $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, e realizando as respectivas derivadas, obtemos:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -a \sin \theta d\theta \\ dy = b \cos \theta d\theta \end{cases}.$$

Assim,

$$ds = \sqrt{(-a \sin \theta d\theta)^2 + (b \cos \theta d\theta)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

Logo, a área A de meio elipsoide é dada por:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(a \cos \theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

Fazendo a mudança de variáveis,

$$\begin{cases} u = \sin \theta \\ du = \cos \theta d\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow u = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} (\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^1 2\pi a \sqrt{a^2 u^2 + b^2 (1 - u^2)} du \\ &= \int_0^1 2\pi a \sqrt{u^2 (a^2 - b^2) + b^2} du. \end{aligned}$$

⁶ De fato, a distância entre os pontos $P_{i-1} = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ e $P_i = (x(t_i), y(t_i))$, para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, é dada por: $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x'(t_i^*)\Delta t)^2 + (y'(t_i^+)\Delta t)^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Utilizamos, nessa dedução, o Teorema do Valor Médio. Detalhes em (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

Para prosseguirmos, utilizaremos as fórmulas das integrais abaixo. Detalhes da técnica utilizada para estas resoluções podem ser obtidos em (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

$$\int \sqrt{x^2 + c^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + c^2}}{2} + \frac{c^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + c^2}) + c_0.$$

$$\int \sqrt{c^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{c^2 - x^2}}{2} + \frac{c^2}{2} \arcsen\left(\frac{x}{c}\right) + c_0.$$

Aqui, apesar de termos representado a Figura (3) com $a > b$, é necessário considerarmos duas situações se quisermos expressar A em termos de integrais reais, a saber:

- Se $a > b$:

$$A = \int_0^1 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{u^2 + \frac{b^2}{(a^2 - b^2)}} du.$$

- Se $a < b$:

$$A = \int_0^1 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - u^2} du.$$

É importante observarmos, para a discussão posterior, que se obtivermos imaginários em algum ponto ao avaliar uma das equações para A , a depender da suposição de $a > b$ ou $a < b$, então haverá outro imaginário em “outro lugar” que irá eliminar o primeiro, pois A , que representa a área do elipsóide, deve ser real. Os exemplos abaixo ajudarão a esclarecer essa questão. Ademais, utilizando as fórmulas de integração acima, segue-se que:

- Se $a > b$:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \int_0^1 \sqrt{u^2 + \frac{b^2}{(a^2 - b^2)}} du \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{u\sqrt{u^2 + \frac{b^2}{a^2 - b^2}}}{2} + \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)} \ln \left(u + \sqrt{u^2 + \frac{b^2}{a^2 - b^2}} \right) \right) \Bigg|_0^1 \\ &= 2\pi a \sqrt{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}} \right) \right) \\ &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left(\ln \left(1 + \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}} \right) - \ln \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2}} \right) \right) \right) \\ &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right). \end{aligned}$$

- Se $a < b$:

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - u^2} du \\
 &= 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \left(\frac{u \sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a^2} - u^2}}{2} + \frac{b^2}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{u}{\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a^2}}} \right) \right) \Big|_0^1 \\
 &= 2\pi a \sqrt{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2 - a^2}} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \operatorname{arcsen} \left(\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \right) \right) \\
 &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Agora, independente de tomarmos $a > b$ ou $a < b$, fixando uma medida ϕ tal que: $\phi = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, temos que $\operatorname{sen} \phi = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{-1 \cdot (a^2 - b^2)}}{b} = i \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ e, da identidade fundamental $\operatorname{sen}^2 \phi + \operatorname{cos}^2 \phi = 1$ segue, em ambos os casos, que $\operatorname{cos} \phi = \frac{a}{b}$, já que o quadrante que estamos considerando é o primeiro. Ainda, $\sqrt{-1} = \pm i$, e colocar $\operatorname{sen} \phi = i \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ é uma escolha arbitrária, pois esse valor (positivo ou negativo) se cancelará nas expressões. Por fim, o leitor mais atento poderia se questionar como $\operatorname{cos} \phi = \frac{a}{b}$ pode assumir valores maiores do que 1 quando $a > b$, mas essa situação é permitida no caso das extensões complexas das funções seno e cosseno, que nos complexos não são limitadas, ao contrário dos casos reais em que $|\operatorname{cos} x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.

Cabe ressaltarmos que as duas fórmulas da área acima foram expressas para apresentar apenas números reais para as equações, entretanto, em se introduzindo os números complexos, ambas devem permanecer válidas. Cotes, então, comparou as duas expressões da área A , já que *elas devem representar a mesma quantidade física*⁷. Se, por exemplo, $a > b$ a primeira fórmula dará o valor da área somente com manipulações de números reais e, a segunda, apresentará números complexos, mas ambas calculam o valor para a mesma área A . Logo, ele obteve:

$$\begin{aligned}
 A &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \left(\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \right) \\
 &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln (\operatorname{cos} \phi - i \operatorname{sen} \phi) \right)
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 A &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right) \\
 &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{i \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} \phi) \right) \\
 &= \pi a \left(a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} (-i \phi) \right)
 \end{aligned}$$

⁷ "[...] which represent the same physical quantity" (NAHIN, 1998, p. 165), tradução minha.

que conduz a relação

$$\ln(\cos \phi - i \operatorname{sen} \phi) = -i\phi.$$

Cotes concluiu sua apresentação nesse ponto, não avançando em discussões mais gerais, como por exemplo uma mudança de variáveis de ϕ por $-\phi$, para obtermos $\ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) = i\phi$, uma representação um pouco mais “limpa”.

Talvez as dificuldades que os matemáticos estavam enfrentando para elucidar a definição de função logarítmica para valores imaginários e reais negativos, dentre outros obstáculos relacionados aos números complexos, fez com que ele sustasse suas investidas acerca da fórmula (2), mas se o tivesse feito, anteciparia em anos a fórmula de Euler $e^{i\phi} = \cos \phi + i \operatorname{sen} \phi$ e, ainda, a fórmula D’ Moivre $(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)^n = \cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi$, pois das propriedades do logaritmo, teríamos

$$\begin{aligned} \ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)^n &= n \ln(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi) \\ &= n(i\phi) \\ &= i(n\phi) \\ &= \ln(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) \end{aligned}$$

e, assim,

$$(\cos \phi + i \operatorname{sen} \phi)^n = (\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi).$$

5. EXEMPLOS DA RELAÇÃO DE COTES

Nessa seção vamos aplicar exemplos nas relações discutidas por Cotes como forma de evidenciar as equivalências numéricas abordadas por ele. Para tanto, utilizaremos as definições já estabelecidas das extensões complexas das funções seno, cosseno, logaritmo e exponencial.

Começamos com a elipse dada por $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$, sendo $a = 4$ e $b = 3$. Neste caso, $a > b$ e a área da superfície de meio elipsóide é dada por

$$A = 4\pi \left(4 + \frac{9}{\sqrt{7}} \ln \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \right) \right). \quad (6)$$

Agora, considerando a segunda fórmula da área, na qual teremos de trabalhar com os valores complexos, pois $\sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{-7}$, temos

$$A = 4\pi \left(4 + \frac{9}{i\sqrt{7}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{i\sqrt{7}}{3} \right) \right). \quad (7)$$

Abaixo retomamos algumas definições para $t \in \mathbb{R}$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e $\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.
- $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ou, equivalentemente, $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.

- $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ou, equivalentemente, $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Tomando $w = u + iv \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{arcsen} \left(i \frac{\sqrt{7}}{3} \right) = w$ temos que $\operatorname{sen} w = i \frac{\sqrt{7}}{3}$. Logo,

$$\operatorname{sen} w = \operatorname{sen} u \cosh v + i \cos u \operatorname{senh} v = 0 + i \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} u \cosh v = 0 \quad (\cosh v > 0) \\ \cos u \operatorname{senh} v = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} u = 0 \Rightarrow u = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pm \operatorname{senh} v = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

Considerando o argumento principal de w , ou seja, $k = 0$, precisamos resolver a equação $\operatorname{senh} v = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Então,

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow (e^v)^2 - \frac{2\sqrt{7}}{3}e^v - 1 = 0 \Leftrightarrow e^v = \frac{\sqrt{7} + 4}{3} \text{ ou } e^v = \frac{\sqrt{7} - 4}{3}.$$

Como $\frac{\sqrt{7} - 4}{3} < 0$ e, portanto, $e^v = \frac{\sqrt{7} - 4}{3}$ não admite solução, temos que $v = \ln \frac{\sqrt{7} + 4}{3}$, um valor que já apareceu na equação (6). Dessa forma,

$$\operatorname{arcsen} \left(i \frac{\sqrt{7}}{3} \right) = w = u + iv = 0 + i \ln \left(\frac{\sqrt{7} + 4}{3} \right) = i \ln \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} \right),$$

evidenciando a igualdade das relações (6) e (7).

De forma análoga, consideramos a elipse dada por $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, sendo $a = 2$ e $b = 5$. Neste caso, $a < b$ e a área da superfície de meio elipsóide é dada por

$$A = 2\pi \left(2 + \frac{25}{\sqrt{21}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{\sqrt{21}}{5} \right) \right). \quad (8)$$

Para a outra equação da área teremos

$$A = 2\pi \left(2 + \frac{25}{i\sqrt{21}} \ln \left(\frac{2}{5} + i \frac{\sqrt{21}}{5} \right) \right). \quad (9)$$

Desenvolvendo a logaritmo complexo da expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{2}{5} + i \frac{\sqrt{21}}{5} \right) &= \log \left(\frac{2}{5} + i \frac{\sqrt{21}}{5} \right) \\ &= \ln \left| \frac{2}{5} + i \frac{\sqrt{21}}{5} \right| + i \arg \left(\frac{2}{5} + i \frac{\sqrt{21}}{5} \right) \\ &= \ln 1 + i \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{21}}{5} \\ &= i \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{21}}{5}. \end{aligned}$$

Novamente, verifica-se a igualdade entre (8) e (9), o que ocorre devido a validade da construção de Cotes.

6. CONCLUSÃO

Roger Cotes apresentou um resultado surpreendente sobre o logaritmo de números complexos e, por motivos que desconhecemos, não explorou as possibilidades que envolviam a relação. Sua construção se apoiou em argumentações não triviais, explorando uma perspectiva de um problema de área que comumente não é utilizada, mas que revela a conexão entre as funções complexas logarítmicas e as trigonométricas, como ilustrado nos exemplos. Certo é que muitas dúvidas pairavam sobre esta emergente teoria, as quais, posteriormente, Euler ajudou a elucidar. Por fim, a Fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ encanta os que dela se apropriam, pois mais do que a possibilidade de conexão entre cinco valores numéricos $(0, 1, i, e, \pi)$, ela estabelece uma perfeita relação entre funções transcendentais.

7. REFERÊNCIAS

- BASTOS, R.; COSTA, E. A. da. Colocando ordem nos complexos. *Colloquium Exactarum*, v. 4, n. 1, p. 33–38, 2012.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, Brasil: Edgar Blücher, 1996.
- CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora Ciência Moderna, 2007.
- CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo, Brasil: McGraw-Hill, 1975.
- COTES, R. Logometria. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v. 29, n. 338, p. 5–45, 1714.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- FERNANDES, C. S.; JR., N. C. B. *Introdução as Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo, Brasil: Livraria da Física, 2007.
- KATZ, V. J. *História da Matemática*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro, Brasil: Impa, 2000.
- NAHIN, P. J. *An Imaginary Tale The Story of Root Square of -1*. New Jersey, USA: Princeton University Press, 1998.
- ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Brasil: Zahar, 2012.

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa, Portugal: Gradiva, 1992.

THOMAS, G.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. São Paulo, Brasil: Pearson Education do Brasil, 2012.
v. 1.