RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024
<https://doi.org/10.5281/zenodo.10855185>

Existência e unicidade para a equação de Laplace no disco

Fernanda Aparecida de Jesus Silva
<fernanda.ajs@aluno.ufop.edu.br>
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Leandro Correa Paes Leme
<leandro.leme@ufop.edu.br>
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Geraldo César Gonçalves Ferreira
<geraldocesar@ufop.edu.br>
Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brazil

Resumo
Neste trabalho estudamos a equação de Laplace $\Delta u = 0$, no disco. Usando a teoria de equações diferenciais e técnicas para determinar a função de Green no disco, encontramos uma solução. Mostramos que esta solução é única via princípio do máximo.

Palavras-chave: *Equação de Laplace. Função de Green. Princípio do máximo.*

1. INTRODUÇÃO

Ao longo do texto, denotamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto conexo) limitado. Utilizaremos as notações $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ para denotar pontos (ou vetores) de $\mathbb{R}^2$. Para evitar confusão, vamos utilizar o subíndice x ou y, para denotar a variável de integração ou derivação. Nosso texto é baseado nas notas de aula do Rodney Josué Biezuner (BIEZUNER, 2010) e no livro do Lawrence C. Evans (EVANS, 1998).

Seja $u = u(x_1, x_2)$ uma função real de duas variáveis, que possua derivadas parciais de segunda ordem. O operador laplaciano (em duas dimensões) é um operador diferencial parcial de segunda ordem, definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

A seguir, destacamos algumas equações diferenciais parciais que envolvem o operador laplaciano. A equação de Poisson

$$\Delta u = f,$$

a equação do calor

$$u_t - \Delta u = 0,$$

a equação da onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

a equação de Schrödinger

$$iu_t - \Delta u = 0,$$

dentre várias outras.

A equação de Laplace, que recebe o nome de seu criador Pierre Simon Laplace, é definida por

$$\Delta u = 0.$$

Esta equação possui inúmeras aplicações em física, pois aparece naturalmente em problemas de potenciais elétricos, magnéticos, gravitacionais, hidrodinâmica, temperaturas de estado estacionário, entre outros. Sugerimos o capítulo 12 de (LEIGHTON M. SANDS, 1964) para mais exemplos de aplicações da equação de Laplace.

Em geral, a equação de Laplace possui várias soluções, como por exemplo, se u é constante ou um polinômio de primeiro grau nas variáveis x_1 e x_2, então u satisfaz a equação de Laplace. No entanto, quando inserimos um dado inicial g sobre a fronteira de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, temos então o chamado problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = g, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Podemos então levantar a seguinte questão: Será que o problema de Dirichlet possui solução? Se possuir, esta solução será única? Antes de responder a estas perguntas, vamos descrever com mais detalhes como o problema de Dirichlet para equação de Laplace aparece em problemas de temperaturas de estado estacionário.

Sejam $R > 0$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Definimos o disco de centro na origem e raio R, por

$$B_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| < R\right\},$$

em que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Definimos também o fecho e a fronteira do disco $B_R(0)$, respectivamente, por

$$\overline{B}_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| \leq R\right\},$$
$$\partial B_R(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| = R\right\}.$$

Suponha que tenhamos um disco $\Omega = B_R(0)$, de um certo material, em que este disco é aquecido em sua fronteira $\partial B_R(0)$, de acordo com a função temperatura g. Veja a figura 1. A partir deste momento, existe um fluxo de calor $\vec{F}$ para o interior do disco, dado pela Lei da condução de calor de Fourier:

$$\vec{F} = -k\nabla u,$$

em que k é a condutividade térmica do material e $u = u(x_1, x_2)$ é a temperatura em cada ponto do disco $B_R(0)$.

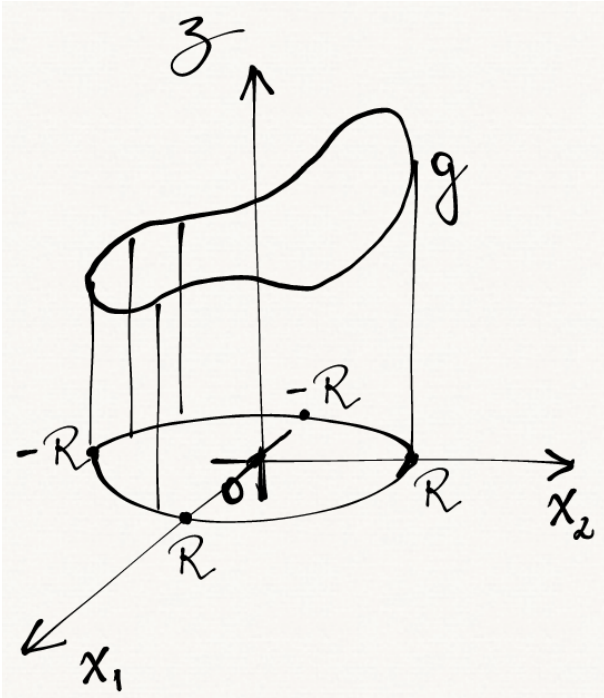
Quando consideramos que não há perda de calor para o ambiente, chega um momento em que o disco entra em equilíbrio térmico. Esta é uma situação de estado estacionário. Dessa forma, não existe fonte ou sumidouro do campo $\vec{F}$. Isto significa que

$$div\vec{F} = 0,$$

em que $div\vec{F} = div(F_1, F_2) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}$. Para o campo $\vec{F}$ dado pela Lei da condução de calor de Fourier, temos que

$$div\vec{F} = div(-k\nabla u) = -k\Delta u = 0$$

Figura 1. Condição de fronteira no disco.



Fonte: Os autores.

e portanto a função temperatura u deve satisfazer o problema de Dirichlet (1). Esta interpretação nos leva a acreditar que o problema de Dirichlet possui solução e esta solução é única, pois o sistema entra em equilíbrio térmico. Antes de enunciar o nosso resultado, daremos algumas definições.

Dizemos que uma função $u \in C^0(\Omega)$, ou é de classe $C^0(\Omega)$, se u for contínua em Ω. Uma função $u \in C^k(\Omega)$, ou é de classe $C^k(\Omega)$, se u possuir todas as derivadas parciais até a ordem k, contínuas em Ω.

Dizemos que uma função u é solução do problema de Dirichlet (1), se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e satisfaz as equações (1).

Usando a teoria de equações diferenciais e as técnicas para determinar a função de Green no disco, enunciamos o nosso principal resultado.

Teorema 1.1. *Se $\Omega = B_R(0)$ e $g \in C^0(\partial B_R(0))$, o problema de Dirichlet (1) possui uma única solução u de classe $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$, dada pela representação integral*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y.$$

2. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Iniciaremos esta seção enunciando um fato importante sobre o operador laplaciano.

Lema 2.1. *O operador laplaciano é invariante por rotações.*

Demonstração. Veja o apêndice, na seção 6. □

O resultado acima torna plausível a existência de *soluções radiais* para a equação de Laplace. Veremos que a equação de Laplace possui uma solução radial *fundamental*, a partir da qual soluções mais complexas podem ser construídas.

Transformaremos a equação de Laplace em uma equação diferencial ordinária para encontrarmos sua solução fundamental.

Teorema 2.1. *Seja $u(x) = u(|x|) = u(r)$ uma função radial. Para uma função radial, o operador laplaciano é dado por*

$$\Delta u(r) = u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right)$$

em que $u'(r)$ e $u''(r)$ denotam as derivadas de $u(r)$ com relação a r.

Demonstração. De fato, como

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r}.$$

Daí, pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{x_1}{r} = u'(r)\frac{x_1}{r}.$$

Calculando a derivada segunda de u com relação a x_1, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(u'(r)\frac{x_1}{r}\right) &= \frac{\partial u'(r)}{\partial x_1}\frac{x_1}{r} + u'(r)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{r}\right) \\ &= u''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

De maneira análoga, podemos calcular a derivada segunda de u, com relação a x_2:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u''(r)\frac{x_2^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3}\right). \tag{3}$$

Somando as equações (2) e (3), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta u\,(r) &= u''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_1^2}{r^3}\right) + u''(r)\frac{x_2^2}{r^2} + u'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_2^2}{r^3}\right) \\ &= u''(r)\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2}\right) + u'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^3}\right) \\ &= u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right).\end{aligned}$$

□

Com a finalidade de obter uma solução radial $u(r)$ para a equação de Laplace $\Delta u(r) = 0$, o teorema 2.1 afirma que esta solução deve satisfazer a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u''(r) + u'(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

Podemos reduzir a ordem desta equação substituindo $v(r) = u'(r)$. Então $v(r)$ satisfaz

$$v'(r) + v(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

donde obtemos

$$\frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{1}{r}.$$

A equação diferencial acima é separável. Podemos resolvê-la integrando ambos os lados da equação anterior, com relação a r.

$$\ln v(r) = -\ln r = \ln r^{-1} = \ln\left(\frac{1}{r}\right).$$

Logo $v(r) = \frac{1}{r}$. Substituindo $v(r) = u'(r)$, obtemos

$$u'(r) = \frac{1}{r}.$$

Integrando ambos os lados da equação anterior, concluímos que

$$u(r) = \ln r.$$

Observe que a função $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = u(|x|) = \ln|x|$ satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

Definição 2.1. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace $\Delta u = 0$, é chamada uma* ***função harmônica*** *em Ω.*

Note que $u(x) = \ln|x|$ é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Se Ω for um domínio radial, como por exemplo, o disco $B_R(0)$, queremos obter uma solução $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$. Note que a função $u(x)$ não é contínua na origem do plano $\mathbb{R}^2$. Contornaremos este problema através da inversão no círculo. Veja a seção 4.

Definição 2.2. *A função $\Gamma : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$$

é chamada a ***solução fundamental para a equação de Laplace.***

A razão pela qual aparece a constante multiplicativa $-1/2\pi$, na definição da solução fundamental, é para que a mesma não apareça na fórmula de representação de Green, teorema 3.1.

Lema 2.2. *O operador laplaciano é invariante por translações.*

Demonstração. Note que, por definição, $\Delta u(x) = \Delta u(x + a)$, em que $a = (a_1, a_2)$ é um vetor constante em $\mathbb{R}^2$. □

Observe que a função $\Gamma(x)$ não está definida na origem. Vamos retirar esta singularidade da origem, passando para uma singularidade em um ponto $y \in \Omega$. Isso pode ser feito considerando a função $\Gamma(x - y)$. O lema anterior garante que $\Gamma(x - y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

3. FUNÇÃO DE GREEN

Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, pretendemos obter uma fórmula de representação integral para $u(y)$, em termos da solução fundamental $\Gamma(x-y)$, onde $y \in \Omega$ é um ponto arbitrário. Para isto, gostaríamos de usar a segunda identidade de Green, enunciada pelo lema seguinte.

Lema 3.1 (Segunda identidade de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto com fronteira suave. Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ então vale a identidade*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dA = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Demonstração. Veja o apêndice, na seção 6. □

Inicialmente, podemos pensar em colocar diretamente $\Gamma(x-y)$ no lugar de v, mas isso não pode ser feito porque $\Gamma(x-y)$ possui uma singularidade em y. Uma maneira de superar esta dificuldade é aplicar a segunda identidade de Green na região $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$ e fazer $\varepsilon \to 0$. Antes de enunciar o próximo teorema, vamos enunciar uma propriedade importante que será utilizada em sua demonstração.

Lema 3.2 (Propriedade da média). *Se $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$, então u satisfaz a propriedade*

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(x)|} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u dS.$$

Demonstração. Veja o apêndice, na seção 6. □

Teorema 3.1 (Fórmula de representação de Green). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Então, para todo $y \in \Omega$, temos*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) \right) dS_x - \int_\Omega \Delta u \Gamma(x-y) dA_x.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, para que tenhamos $\overline{B}_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Então $\Gamma(x-y)$ é de classe C^1 em que $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$ e podemos aplicar a segunda identidade de Green a esta região para obter

$$\begin{aligned} \int_{\partial[\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)]} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS_x &= \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y) dA_x \\ &- \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} u \Delta \Gamma(x-y) dA_x \\ &= \int_{\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y) dA_x \end{aligned}$$

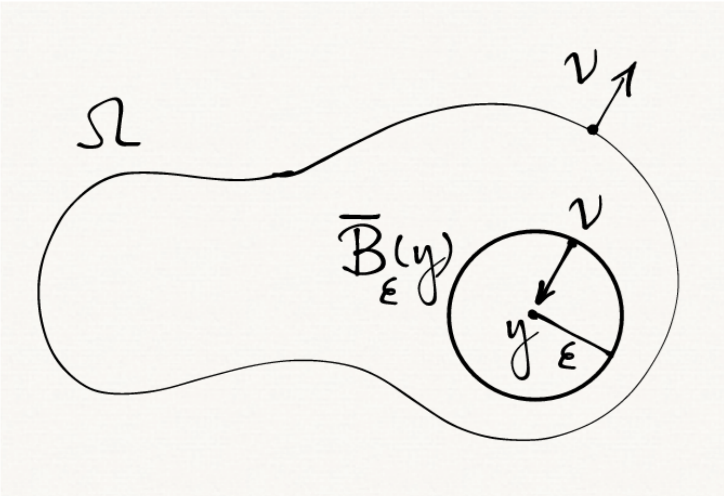
pois $\Gamma(x-y)$ é harmônica em $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$.

Note que podemos escrever $\partial[\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)] = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(y)$. Dessa forma, podemos separar a integral de fronteira na identidade anterior, para obter

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS_x + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) dS_x$$
$$= \int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u \Gamma(x-y) dA_x. \tag{4}$$

Observe que na segunda integral de fronteira, o vetor normal unitário ν aponta para dentro do disco $B_\varepsilon(y)$. Veja a figura 2.

Figura 2. Vetor normal exterior à fronteira de $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(y)$.



Fonte: Os autores.

Se $C = \sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u|$, temos

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) dS_x \right| = \left| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \nabla u \cdot \nu \Gamma(x-y) dS_x \right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon} |\nabla u||\nu||\Gamma(x-y)| dS_x$$
$$\leq C \int_{\partial B_\varepsilon} |\Gamma(x-y)| dS_x = \frac{C}{2\pi} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \ln|x-y| dS_x$$
$$= \frac{C}{2\pi} \ln(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(y)} 1 dS_x = C\varepsilon \ln \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\varepsilon = 0.$$

Consequentemente

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Gamma(x-y) dS_x \to 0 \tag{5}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)dS_x &= \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\nabla_x\Gamma(x-y)\cdot\nu dS_x\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\nabla_x \ln|x-y|\cdot\left[\frac{-(x-y)}{|x-y|}\right]dS_x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(y)}\frac{u}{|x-y|}dS_x = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dS_x\\ &= \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dS_x\end{aligned}$$

pois $\nabla_x \ln|x-y| = \dfrac{x-y}{|x-y|^2}$ calculado na variável de integração x. Segue da propriedade da média, lema 3.2, que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)dS_x \to u(y) \tag{6}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Como a função $\ln|x|$ é integrável numa vizinhança da origem, obtemos também que

$$\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varepsilon(y)} \Delta u\Gamma(x-y)dA_x \to \int_\Omega \Delta u\Gamma(x-y)dA_x \tag{7}$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (4), concluímos por (5), (6) e (7), que

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)\right)dS_x - \int_\Omega \Delta u\Gamma(x-y)dA_x.$$

□

Corolário 3.1 (Fórmula de Representação para Funções Harmônicas)**.** *Seja Ω um aberto limitado e $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ uma função harmônica. Então, para todo $y \in \Omega$, temos*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(x-y)\right)dS_x.$$

Consequentemente, toda função harmônica é de classe C^∞ em Ω. Além disso, qualquer derivada parcial $D^\alpha u$ de u também é uma função harmônica.

Demonstração. De fato, como $y \notin \partial\Omega$, o integrando nesta fórmula de representação é infinitamente diferenciável com respeito a y. Dessa forma, podemos derivar sob o sinal de integral e mudar a ordem de derivação, para concluirmos que

$$\Delta[D^\alpha u](y) = D^\alpha[\Delta u](y) = 0.$$

□

Agora, para cada $y \in \Omega$, suponha que $h_y \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ resolve o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela segunda identidade de Green, lema 3.1, temos

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial h_y}{\partial \nu} \right) dS_x = \int_{\Omega} h_y \Delta u dA_x.$$

Subtraindo esta identidade da Fórmula de Representação de Green, teorema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} u(y) &= -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) \right) dS_x - \int_{\Omega} \Delta u \Gamma(x-y) dA_x \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y) - u\frac{\partial h_y}{\partial \nu} \right) dS_x + \int_{\Omega} h_y \Delta u dA_x \\ &= -\int_{\partial\Omega} u \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial h_y}{\partial \nu}(x) \right] dS_x - \int_{\Omega} \Delta u [\Gamma(x-y) - h_y(x)] dA_x. \end{aligned}$$

Definição 3.1. *A função $G : \Omega \times \Omega \setminus \{x = y\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$G(x, y) = \Gamma(x-y) - h_y(x)$$

*é chamada a **função de Green** para o laplaciano na região Ω. Portanto, segue que*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_x - \int_{\Omega} \Delta u(x) G(x, y) dA_x.$$

Lema 3.3 (Propriedades da função de Green)**.** *A função de Green possui as propriedades seguintes.*

i) A função de Green é simétrica, isto é, $G(x, y) = G(y, x)$.

ii) A função de Green $G(x, y)$ e sua derivada normal $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(x, y)$, são harmônicas nas duas variáveis em $x \neq y$.

Demonstração. Veja a Proposição 5.18 e o Corolário 5.19 de (BIEZUNER, 2010). □

Proposição 3.1. *Seja Ω um aberto limitado. Então toda solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

satisfaz

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS_x - \int_{\Omega} f(x) G(x, y) dA_x.$$

Dessa forma, temos uma fórmula para construir a solução de qualquer problema de Dirichlet para o laplaciano em um aberto limitado Ω, desde que conheçamos a função de Green para Ω. A dificuldade é obter a função de Green para um dado domínio Ω.

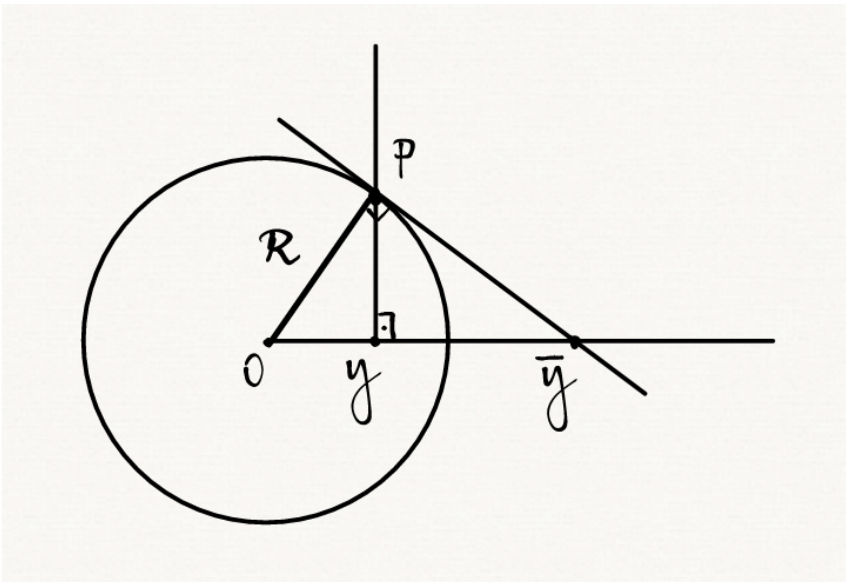
4. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE NO DISCO - FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON

Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ T : y \mapsto \overline{y} = T(y)$ definida por

$$\overline{y} = \frac{R^2 y}{|y|^2}.$$

Esta transformação é chamada a inversão através do círculo $\partial B_R(0)$, centrado na origem e de raio R. A inversão transforma o disco $B_R(0)$ em seu exterior $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$, mantendo fixado o círculo $\partial B_R(0)$. A sua inversa é ela própria. Veja a figura 3.

Figura 3. Inversão através do círculo.



Fonte: Os autores.

Usaremos a inversão através do círculo, para determinar a função de Green no disco $B_R(0)$. Mas antes, vamos enunciar um resultado útil em nossa argumentação.

Lema 4.1. *A equação de Laplace é invariante por dilatações.*

Demonstração. Veja o apêndice, na seção 6. □

Teorema 4.1. *A função de Green para o operador laplaciano no disco $B_R(0)$ é dada por*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) & \textit{se} \quad y \neq 0, \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & \textit{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, fixado $y \in B_R(0)$, precisamos encontrar uma função harmônica $h_y \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B}_R(0))$ que seja solução para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h_y = 0 & \text{em} \quad B_R(0), \\ h_y(x) = \Gamma(x-y) & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases} \tag{8}$$

Se $y = 0$, basta tomar h_y como sendo a função constante $h_y(x) \equiv \Gamma(R)$. Se $y \neq 0$, a situação é mais complicada. Em princípio, poderíamos pensar em tomar a própria função Γ, mas esta função possui uma singularidade em y. Vamos usar a inversão através do círculo, para transformar a singularidade y em um ponto $\overline{y}$, fora do disco. Observe que a função

$$h_y(x) = \Gamma\left(x - \overline{y}\right) = \Gamma\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)$$

é harmônica em $B_R(0)$, pois esta função deixa de ser harmônica apenas no ponto $\overline{y}$, que está fora do disco. Dessa forma, a função $h_y(x) = \Gamma\left(x - \overline{y}\right)$ é solução da equação

$$\Delta h_y = 0 \quad \text{em} \quad B_R(0),$$

mas

$$h_y(x) = \Gamma(x - \overline{y}) \neq \Gamma(x - y) \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0).$$

Assim sendo, precisamos fazer alguma operação na função $h_y(x)$ de tal maneira que ela continue sendo harmônica no disco $B_R(0)$. O lema 4.1 nos diz que a equação de Laplace é invariante por dilatações. Note que a função Γ é radial, mas

$$|x - \overline{y}| \neq |x - y| \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0).$$

Isto nos leva a crer que uma operação de dilatação possa resolver o problema. Isto é, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$|k(x - \overline{y})| = |x - y| \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0)?$$

Daremos uma resposta afirmativa a esta questão tomando $k = \dfrac{|y|}{R}$. Com efeito, para $x \in \partial B_R(0)$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right| &= \left|\frac{|y|}{R}\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right)\right| = \frac{|y|}{R}\left|x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right| \\
&= \left(\frac{|y|^2}{R^2}\left|x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{|y|^2}{R^2}\left(|x|^2 - \frac{2R^2}{|y|^2}\langle x, y\rangle + \frac{R^4}{|y|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 - 2\langle x, y\rangle + R^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|y|^2 - 2\langle x, y\rangle + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|x - y|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |x - y|,
\end{aligned}$$

pois $|x| = R$ e $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$. Portanto, a função h_y definida por

$$h_y(x) = \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right)$$

é a solução procurada para o problema de Dirichlet (8), no caso $y \neq 0$.

Concluímos que, a função de Green no disco $B_R(0)$ é a função $G(x,y) = \Gamma(x-y) - h_y(x)$, dada por

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) & \text{se} \quad y \neq 0, \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & \text{se} \quad y = 0. \end{cases}$$

$\square$

Segue da Proposição 3.1 que, se $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B}_R(0))$ é harmônica, então

$$u(y) = -\int_{\partial B_R(0)} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS_x. \tag{9}$$

A derivada normal $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$ em $\partial B_R(0)$, pode ser calculada da seguinte maneira. Como o vetor normal unitário apontando para fora é $\nu = \dfrac{x}{R}$, segue que

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \langle \nabla_x G(x,y), \frac{x}{R} \rangle.$$

O vetor gradiente de G, calculado na variável x, é dado por

$$\nabla_x G(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)\right], \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)\right]\right).$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{|y|}{R}\left(x_1 - \frac{R^2 y_1}{|y|^2}\right)\right|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1 - y_1}{|x-y|^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{|y|}{R}\left(x_2 - \frac{R^2 y_2}{|y|^2}\right)\right|\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2 - y_2}{|x-y|^2}$$

obtemos

$$\nabla_x G(x,y) = \left(-\frac{1}{2\pi}\frac{x_1-y_1}{|x-y|^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1 - y_1}{|x-y|^2}, -\frac{1}{2\pi}\frac{x_2-y_2}{|x-y|^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2 - y_2}{|x-y|^2}\right).$$

Calculando agora a derivada normal, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \langle \nabla_x G(x,y), \frac{x}{R}\rangle = -\frac{1}{2\pi R}\Bigg[\frac{x_1^2 - x_1y_1}{|x-y|^2} - \left(\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_1^2 - x_1y_1}{|x-y|^2}\right) \\ &+ \frac{x_2^2 - x_2y_2}{|x-y|^2} - \left(\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_2^2 - x_2y_2}{|x-y|^2}\right)\Bigg] \\ &= -\frac{1}{2\pi R|x-y|^2}\Bigg[x_1^2 - x_1y_1 - \left(\frac{|y|^2}{R^2}x_1^2 - x_1y_1\right) \\ &+ x_2^2 - x_2y_2 - \left(\frac{|y|^2}{R^2}x_2^2 - x_2y_2\right)\Bigg] \\ &= -\frac{1}{2\pi R|x-y|^2}\left[R^2 - \frac{|y|^2}{R^2}R^2\right] \\ &= -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^2}\end{aligned}$$

pois $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 = R^2$. Como a derivada normal de G é simétrica com relação às variáveis x e y, veja o lema 3.3(i), podemos trocar as variáveis de $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ e substituir em (9), para obtermos a fórmula de representação

$$u(x) = -\int_{\partial B_R(0)} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(y,x)dS_y = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)} \frac{u(y)}{|x-y|^2}dS_y. \tag{10}$$

Esta fórmula é chamada **fórmula integral de Poisson.** A função

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^2},\ x \in B_R, y \in \partial B_R,$$

é chamada o **núcleo de Poisson** para o disco $B_R(0)$.

Lema 4.2. *Para todo $x \in B_R(0)$ vale*

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)dS_y = 1.$$

Demonstração. Basta fazer $u = 1$ na fórmula integral de Poisson e observar que $\frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R}$ é constante com relação a y, daí podemos passá-lo para dentro da integral. □

5. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

O próximo resultado demonstra a existência de solução para o problema de Dirichlet no disco.

Teorema 5.1. *Seja* $g \in C^0(\partial B_R(0))$*. Defina*

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y.$$

Então $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ *e* u *é solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{em} \quad B_R(0), \\ u = g & \textit{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Demonstração. Observe que a função $u(x)$ definida acima é a fórmula integral de Poisson dada por (10). Dessa forma, podemos escrever

$$u(x) = -\int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(y, x) dS_y.$$

Pelo lema 3.3(ii), a função $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(y, x)$ é harmônica com relação à segunda variável x. Logo, podemos derivar dentro do sinal de integral para obter $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in B_R(0)$. Resta estabelecer a continuidade até a fronteira, isto é, para todo $x_0 \in \partial B_R(0)$, devemos obter

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0).$$

Por definição de continuidade, veja (LIMA, 2008), precisamos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, devemos obter $\delta_0 > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta_0 \implies |u(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

De fato, como $g \in C^0(\partial B_R)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|y - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $y \in \partial B_R(0)$. Seja $M = \max\limits_{\partial B_R(0)} |g|$. Pelo lema 4.2, temos

$$g(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} g(x_0) K(x, y) dS_y.$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
|u(x)-g(x_0)| &= \left|\int_{\partial B_R(0)} g(y)K(x,y)dS_y - \int_{\partial B_R(0)} g(x_0)K(x,y)dS_y\right| \\
&= \left|\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)(g(y)-g(x_0))dS_y\right| \\
&\leq \int_{\partial B_R(0)} |K(x,y)||g(y)-g(x_0)|dS_y \\
&\leq \int_{|y-x_0|<\delta_1} K(x,y)|g(y)-g(x_0)|dS_y \\
&+ \int_{|y-x_0|\geq\delta_1} K(x,y)|g(y)-g(x_0)|dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{|y-x_0|<\delta_1} K(x,y)dS_y \\
&+ \int_{|y-x_0|\geq\delta_1} K(x,y)\left(|g(y)|+|g(x_0)|\right)dS_y \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\int_{|y-x_0|\geq\delta_1} K(x,y)dS_y \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{|y-x_0|\geq\delta_1} \frac{1}{|x-y|^2}dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{R^2-|x|^2}{\pi R\delta_1^2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Note que $h(x)=R^2-|x|^2$ é contínua, não negativa em $\overline{B}_R(0)$ e $h(x_0)=0$ $(x_0\in\partial B_R(0))$. Então dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_2>0$ tal que

$$
|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-h(x_0)| = h(x) < \frac{\varepsilon\pi R\delta_1^2}{2M}
$$

para $x\in B_R(0)$. Defina $\delta_0=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$. Para $|x-x_0|<\delta_0$, utilizamos a desigualdade acima em (11), para concluir que

$$
|u(x)-g(x_0)|<\varepsilon.
$$

$\square$

6. PROVA DO TEOREMA 1.1

Para mostrar a unicidade de solução e provar o teorema 1.1, vamos enunciar o princípio do máximo. Este resultado afirma que o máximo e o mínimo de uma função harmônica não pode estar no interior do domínio.

Teorema 6.1 (Princípio do máximo). *Suponha que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfaça $\Delta u = 0$. Se Ω é limitado, temos*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Veja o teorema 6.1 de (BIEZUNER, 2010). □

Agora estamos prontos para provar o nosso principal resultado, o teorema 1.1.

Demonstração. Seja $\Omega = B_R(0)$ e $g \in C^0(\overline{B}_R(0))$. Pelo teorema 5.1 a função dada por

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS_y$$

é de classe $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ e resolve o problema de Dirichlet (1).

Para provar a unicidade, suponha que existam duas soluções, u_1 e u_2, do problema de Dirichlet de classe $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$. Então defina $u = u_1 - u_2$ e observe que, pela linearidade do operador laplaciano, u é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em} \quad B_R(0), \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases}$$

Portanto u é harmônica e satisfaz

$$\max_{\partial B_R(0)} u = \min_{\partial B_R(0)} u = 0.$$

Segue do princípio do máximo, teorema 6.1, que $u = 0$. □

7. APENDICE

Demonstração do Lema 2.1. O operador laplaciano é invariante por rotações.

Demonstração. Seja R_θ a matriz de rotação em $\mathbb{R}^2$, dada por

$$R_\theta = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}.$$

Considere a mudança de coordenadas $y = R_\theta x$ e defina $v(y) = u(R_\theta^{-1}(y))$. Note que $u(x) = v(R_\theta x)$ e pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}. \tag{12}$$

Como $y = R_\theta x$, temos que

$$y = (cos\,\theta x_1 - sen\,\theta x_2, sen\,\theta x_1 + cos\,\theta x_2).$$

Calculando as derivadas parciais e substituindo em (12), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1} cos\,\theta + \frac{\partial v}{\partial y_2} sen\,\theta.$$

Daí, novamente pela regra da cadeia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} cos^2\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} sen^2\,\theta.$$

De maneira inteiramente análoga, obtemos também

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} sen^2\,\theta + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} cos^2\,\theta.$$

Somando as duas últimas identidades, concluímos que $\Delta u(x) = \Delta v(y)$. $\square$

Demonstração do Lema 3.1. Antes de demonstrar este lema, vamos relembrar o teorema da Divergência, que será utilizado em sua demonstração.

Teorema 7.1 (Divergência). *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$. Se a fronteira $\partial\Omega$ for uma curva, cuja parametrização é de classe C^1, temos*

$$\int_\Omega div\vec{F} dA = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{F}, \nu \rangle dS$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}$ é um campo vetorial em Ω de classe C^1 e ν é o vetor normal exterior à fronteira $\partial\Omega$.

Demonstração. A primeira identidade de Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dA = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}dS - \int_\Omega u\Delta v dA$$

segue diretamente do teorema da Divergência escolhendo $\vec{F} = u\nabla v$ e a segunda é obtida da primeira, permutando u e v e subtraindo as duas identidades. □

Demonstração do Lema 3.2.

Demonstração. Suponha que $u \in C^0(\Omega)$ e $\overline{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Então u é contínua sobre o círculo $\partial B_\varepsilon(x)$, que é um conjunto compacto. Dessa forma, a função u assume um mínimo e um máximo em $\partial B_\varepsilon(x)$, digamos

$$u(x_\varepsilon^1) = m_\varepsilon \quad \text{e} \quad u(x_\varepsilon^2) = M_\varepsilon, \quad \text{respectivamente.}$$

Logo

$$m_\varepsilon|\partial B_\varepsilon(x)| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(x)} udS \leq M_\varepsilon|\partial B_\varepsilon(x)|. \tag{13}$$

em que $|\partial B_\varepsilon(x)|$ denota o comprimento do círculo $\partial B_\varepsilon(x)$. Observe que, as sequências $\{x_\varepsilon^1\}$, $\{x_\varepsilon^2\}$ convergem para x, quando $\varepsilon \to 0$. Como $u \in C^0(\Omega)$, temos que

$$m_\varepsilon = u(x_\varepsilon^1) \to u(x) \quad \text{e} \quad M_\varepsilon = u(x_\varepsilon^2) \to u(x)$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (13) e usando as convergências acima, obtemos o resultado. □

Demonstração do Lema 4.1. A equação de Laplace é invariante por dilatações.

Demonstração. Considere a mudança de coordenadas $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$ não nulo e defina $v(y) = u(k^{-1}(y))$. Note que $u(x) = v(kx)$ e pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial y_1}k$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}k^2.$$

De maneira análoga, obtemos também que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}k^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\Delta u(x) = k^2\Delta v(y) = 0.$$

□

8. CONCLUSÃO

O problema de temperatura de estado estacionário, descrito na introdução, nos motivou a procurar por soluções para a equação de Laplace no disco. Usando teoria de equações diferenciais e técnicas para determinar a função de Green no disco, concluímos que a solução existe e depende de seus dados de fronteira, de acordo com a representação integral dada no teorema 1.1. Concluímos também que esta solução é única, via princípio do máximo.

9. AGRADECIMENTOS

Eu agradeço à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), por proporcionar o acesso à educação pública e de qualidade, ao Programa de Educação Tutorial de Matemática (PETMAT UFOP), que permitiu o desenvolvimento deste trabalho e aos professores orientadores Leandro e Geraldo, por serem pacientes, solícitos e motivadores.

10. REFERÊNCIAS

BIEZUNER, R. J. Notas de aula de edp i/ii. *Website: http://150.164.25.15/∼rodney*, 2010.

EVANS, L. C. Partial differential equations. *Providence: American Mathematical Society*, vol. 19, n. 1, 1998.

LEIGHTON M. SANDS, R. P. F. R. B. The feynman lectures on physics. *Addison-Wesley*, vol. 2, 1964.

LIMA, E. L. Curso de análise. *Projeto Euclides, IMPA*, vol. 2, 2008.