RMAT
ISSN: 2237-8103
REVISTA DE MATEMÁTICA DA UFOP

Volume 1, Número 1, 2024
https://doi.org/10.5281/zenodo.11044118
Recebido: 01/04/2024
Publicado: 22/04/2024

Sobre a abordagem combinatória dos números de Mulatu

Renata Passos Machado Vieira
<re.passosm@gmail.com>
Doutoranda em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN-Polo UFC), Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0002-1966-7097>

Ulisses Lima Parente
<ulisses.lima@uece.br>
Universidade Estadual do Ceará, Quixadá, CE, Brasil
<https://orcid.org/0009-0001-2626-3189>

Francisco Regis Vieira Alves
<fregis@gmx.fr>
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil
<https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

Paula Maria Machado Cruz Catarino
<pcatarino23@gmail.com>
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal
<https://orcid.org/0000-0001-6917-5093>

Resumo
A pesquisa atualmente em andamento, explora métodos e abordagens relacionados às sequências lineares e recorrentes, partindo do estudo combinatório da famosa sequência de Fibonacci. É importante ressaltar que a sequência de Fibonacci possui conexões com outras sequências, sendo a sequência de Mulatu uma das mais relevantes para este trabalho em particular. Nesse contexto, o objetivo principal desta pesquisa é introduzir e investigar a interpretação combinatória da sequência de Mulatu, o que permitirá a definição do modelo combinatório de Mulatu, considerando especialmente a noção de braceletes.

Palavras-chave: *Braceletes. Combinatória. Sequência de Mulatu.*

1. INTRODUÇÃO

A sequência de Fibonacci foi originalmente concebida pelo matemático Leonardo Pisano, que ficou famoso como Fibonacci ou "filho de Bonaccio". Leonardo nasceu em Pisa, na Itália, durante o período de 1180 a 1250. Sua notoriedade na história da matemática é atribuída ao famoso problema da reprodução dos coelhos imortais, que levou à criação da sequência de Fibonacci, como pode ser visto em detalhes em Santos (2017) e Koshy (2019).

Leonardo Pisano adquiriu um profundo conhecimento matemático das contribuições árabes e destacou-se nas áreas de Álgebra e Aritmética. No entanto, ele é mais lembrado por sua notável contribuição à matemática por meio da sequência que hoje leva seu nome. Esse legado perdura até os dias atuais, e a sequência de Fibonacci é amplamente estudada e aplicada em diversos campos da matemática e das ciências naturais. Portanto, o trabalho de Leonardo Pisano continua a influenciar a matemática e a ciência em todo o mundo. A sua fórmula de recorrência é dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$ e $F_0 = F_1 = 1$.

Abordando de forma breve a sequência de Lucas, L_n, pode-se definir como sendo uma sequência numérica de segunda ordem com recorrência definida por: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geqslant 2$, com valores iniciais $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, conforme definido por Sloane (1964), mais informações podem ser vistas em Sloane (1964) e Koshy (2019). Essa sequência recebe o nome em homenagem ao matemático francês Édouard Lucas (1842-1891), que é reconhecido por suas contribuições à Matemática Recreativa e é o criador do famoso Jogo da Torre de Hanoi.

A abordagem combinatória de sequências oferece uma perspectiva única para compreender e explorar suas propriedades matemáticas (ALVES et al., 2024; VIEIRA; ALVES; CATARINO, 2022). No caso da sequência de Mulatu, a pesquisa busca identificar padrões e relações combinatórias que podem ajudar a elucidar sua natureza e comportamento. A noção de braceletes pode ser particularmente relevante para essa investigação, pois pode fornecer insights sobre como os elementos da sequência estão relacionados e como podem ser combinados de maneira significativa.

À medida que a pesquisa avança, espera-se que ela contribua para o enriquecimento do conhecimento sobre a sequência de Mulatu, bem como para o desenvolvimento de métodos e abordagens combinatórias que podem ser aplicados a outras sequências lineares e recorrentes. Além disso, essa pesquisa pode ter aplicações práticas em diversas áreas, incluindo matemática discreta, teoria dos números e da ciência da computação.

À medida que os resultados desta pesquisa são obtidos e analisados, espera-se que novos insights e descobertas sejam feitos, contribuindo para o avanço do conhecimento matemático e para a compreensão mais profunda das sequências lineares e recorrentes, como a sequência de Mulatu.

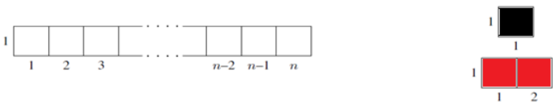
Por sua vez, os números de Mulatu, M_n, foram inicialmente introduzidos pelo Professor de Matemática Mulatu Lemma, da Savannah State University. Esses números constituem uma sequência numérica com a relação de recorrência $M_n = M_{n-1} + M_{n-2}$ para $n \geqslant 2$ e com os valores iniciais $M_0 = 4$ e $M_1 = 1$ (MULATU, 2018; MULATU, 2011). Esses números exibem propriedades e padrões notáveis que têm despertado grande interesse na comunidade matemática. Este artigo se dedica à investigação de abordagem combinatória desses números, perante a abordagem combinatória dos números de Fibonacci e Lucas.

2. INTERPRETAÇÃO COMBINATÓRIA DE FIBONACCI E LUCAS

De maneira geral, observamos que nas pesquisas contemporâneas há um crescente interesse pelo estudo de sequências numéricas recorrentes e suas diversas generalizações. É importante ressaltar que, esses estudos frequentemente não recebem a devida atenção em livros de História da Matemática, apesar de sua relevância e riqueza matemática (GRIMALDI, 2012; LAGRANGE, 2013; STILLWELL, 2010). Uma abordagem interessante, é a interpretação combinatória da sequência de Fibonacci via ladrilhamentos. Tão logo, tomando como base a recorrência da sequência de Fibonacci, dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 2$, cujos valores iniciais são dados por $F_0 = F_1 = 1$. Assim, tem-se o tabuleiro do tipo 1 x n, com dois tipos de ladrilhos: um ladrilho 1 x 1 na cor preta e um ladrilho (dominós) 1 x 2 de cor vermelha. Esse

n-tabuleiro unidimensional é indicado na Figura 1.

Figura 1. Interpretação sobre a noção de n-tabuleiro.



Fonte: Benjamin e Quinn (2003b).

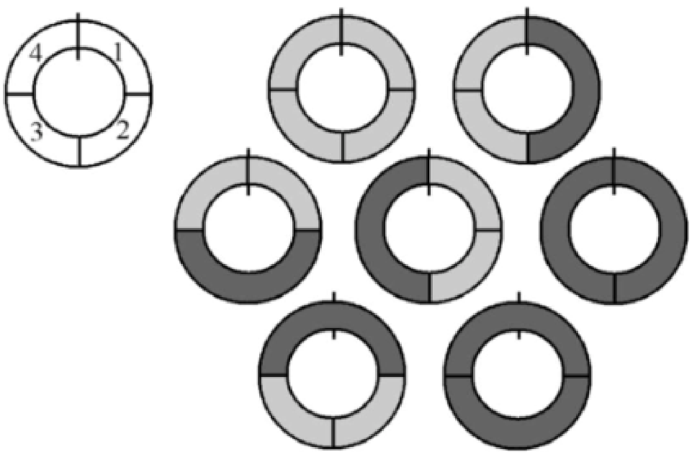
Destaca-se que um tabuleiro é composto por quadrados, conhecidos como casas, células ou posições, que são numerados para descrever suas posições. Um tabuleiro específico será referido como um n-tabuleiro para indicar seu tamanho ou ordem (Spreafico, 2014).

Em Spivey (2019) o autor demonstra que a quantidade de maneiras f_n de se cobrir um n-tabuleiro com monominós 1 x 1 e dominós 1 x 2 é igual a $f_n = F_{n+1}$.

No contexto geral, esta pesquisa se baseia em contribuições anteriores, notadamente nos estudos de Benjamin e Quinn (2003a), Benjamin e Quinn (2003b), Spreafico (2014) e Koshy (2019). Essas obras introduzem o conceito de um n-tabuleiro e fornecem definições de termos e abordagens que serão utilizados como parte integrante deste estudo, à medida que exploramos as propriedades combinatórias da sequência de Fibonacci.

Com base nisso, Benjamin e Quinn (2003a) e Benjamin e Quinn (2003b) conceituam um n-bracelete como uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Nesse contexto, os números de Lucas desempenham um papel em estruturas circulares. O número l_n representa a quantidade de maneiras de se cobrir um tabuleiro circular composto por n células marcadas com monominós e dominós de tamanho 1 x 2. Na Figura 2, apresenta-se a contagem de pavimentações no bracelete de Lucas de tamanho 4, ou seja, l4, demonstrando um total de 7 possibilidades distintas de pavimentação no bracelete. Para $n \geqslant 0$, tem-se l_n como sendo a quantidade de maneiras de ladrilhar num tabuleiro circular de tamanho n, com monominós e dominós. Então L_n, representa o n-ésimo número de Lucas, tem-se que $l_n = L_n$.

Figura 2. Modelo combinatório de Lucas.



Fonte: Benjamin e Quinn (2003a).

A partir dos estudos realizados acerca do modelo combinatório de Lucas, tem-se a investigação das abordagens combinatórias de Mulatu.

3. O ESTUDO DA ABORDAGEM COMBINATÓRIA PARA OS NÚMEROS DE MULATU

Nesta seção, seguiremos as discussões apontadas por Koshy (2019) e Benjamin e Quinn (2003b), em que analisam o comportamento combinatório da sequência de Lucas via braceletes.

Com isso, tem-se o modelo combinatório de Mulatu por meio de braceletes e utilizando monominós curvos brancos, dominós curvos cinzas e dominós curvos pretos para compôr esse modelo. A partir dessas peças disponíveis, é possível estabelecer uma interpretação combinatória para os números de Mulatu.

Defina m_n o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular com n-posições rotuladas no sentido horário, usando monominós curvos brancos, dominós curvos cinzas e dominós curvos pretos. Denomina-se um n-bracelete, uma cobertura de um n-tabuleiro circular. Ressalta-se que um bracelete é dito fora de fase se existe um dominó na posição $(n, 1)$, ou seja, se o dominó cobre as células n e 1. Caso contrário ele é dito em fase.

Para $n \geq 3$, tem-se que os possíveis braceletes de tamanho 1 x n, com monominós curvos brancos, dominós curvos cinzas e dominós curvos pretos. Se o dominó curvo preto aparecer, deve ser inserido somente uma vez; não pode estar fora de fase; e, na presença do dominó curvo cinza, este deverá aparecer primeiro.

Teorema 1. *Sejam m_n o número de maneiras de preencher o $n-$bracelete e M_n é o n-ésimo termo da sequência de Mulatu. Então $m_n = M_n$.*

Demonstração. Para $n = 3$, tem-se $m_3 = 6$, resultando em 6 braceletes, 5 em fase e 1 fora de fase.

Considere o último ladrilho de um n-bracelete contado por m_n. Observe que este último ladrilho não é dominó curvo preto, pois $n \geqslant 3$. Então, o n-bracelete termina com um monominó curvo branco ou dominó curvo cinza. No caso da última peça ser um monominó curvo branco, tem-se o bracelete em fase com os dominós em posição $(1, n)$, ou o bracelete fora de fase, com os dominós na posição $(n, 1)$.

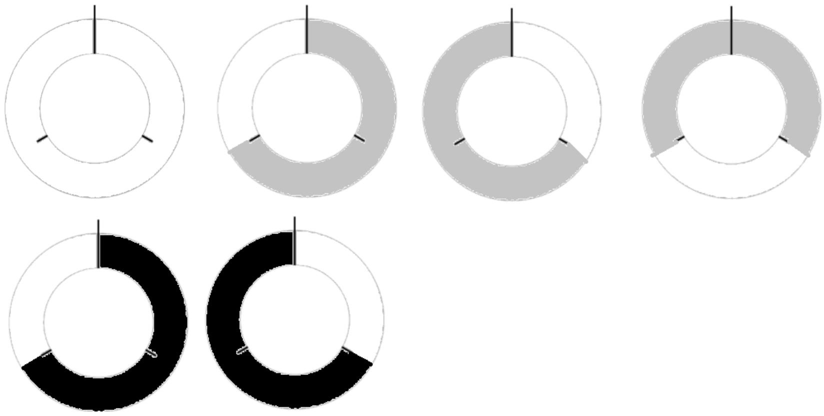
Assim, existem $n - 1$ posições restantes que devem ser percorridas de m_{n-1} maneiras. Quando o n-bracelete termina com um dominó curvo cinza, tem-se os braceletes em fase com este ladrilho na posição $(n-1, n)$, ou o bracelete fora de fase, com os dominós na posição $(n, 1)$. Isso implica que restam $n - 2$ posições que devem ser percorridas de m_{n-2} maneiras. Assim, $m_n = m_{n-1} + m_{n-2}$, para $n \geqslant 3$, e $m_3 = 6$, $m_4 = 11$ e $m_5 = 17$. Portanto, $m_n = M_n$. □

Para melhor compreensão do leitor, tem-se na Figura 3 o modelo combinatório de Mulatu para o caso $n = 3$, com 6 braceletes.

Para o caso $n = 4$, tem-se 11 braceletes gerados, como mostrada na Figura 4.

Desse modo, pode-se realizar as operações e estabelecer que, para $n = 5$ tem-se 17 braceletes e, para $n = 6$ tem-se 28 braceletes.

Figura 3. Modelo combinatório de Mulatu para $n = 3$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

4. CONCLUSÃO

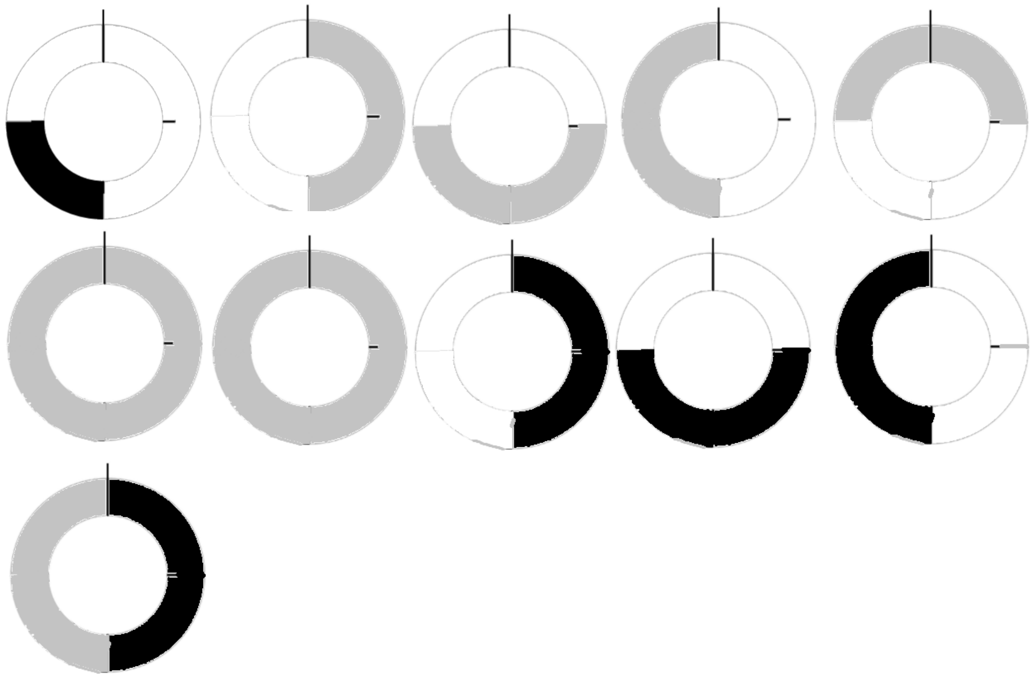
Devido ao amplo cenário de pesquisa e ao crescente interesse em explorar formas de generalização de sequências lineares e recorrentes, esta pesquisa se baseia fundamentalmente na abordagem combinatória das sequências de Fibonacci e Lucas. Além disso, a abordagem combinatória é apresentada como uma vertente essencial para avanços na investigação de sequências matemáticas. Nesse contexto, a introdução do estudo combinatório da sequência de Mulatu, por meio da noção de braceletes, representa um passo significativo para entender esses números no contexto mais amplo, das sequências recorrentes e suas propriedades combinatórias.

Essa abordagem permite uma exploração mais profunda e abrangente das sequências, buscando identificar padrões, relações e propriedades que podem não ser imediatamente evidentes em uma análise puramente numérica. O estudo combinatório das sequências oferece uma perspectiva única para a compreensão de seu comportamento e pode levar a descobertas importantes no campo da matemática discreta.

À medida que esta pesquisa avança, ela não apenas contribuirá para o enriquecimento do conhecimento sobre a sequência de Mulatu, mas também abrirá caminho para a aplicação de métodos e técnicas combinatórias em outras áreas da matemática e da ciência da computação. A noção de braceletes, em particular, pode se mostrar uma ferramenta poderosa para explorar sequências e padrões em diversas disciplinas.

Portanto, esta pesquisa representa um esforço significativo para avançar na compreensão das sequências lineares e recorrentes, abrindo portas para novas descobertas e aplicações no campo da matemática e além.

Figura 4. Modelo combinatório de Mulatu para $n = 4$. Fonte: Elaborado pelos autores.



5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap). O terceiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap). O quarto autor agradece aos Fundos Nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P., no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

6. REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. et al. Combinatorial approach on the recurrence sequences: An evolutionary historical discussion about numerical sequences and the notion of the board. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, v. 19, n. 2, p. 1–11, 2024.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. The fibonacci numbers-exposed more discretely. *Math. Magazine*, v. 76, n. 3, p. 182–192, 2003.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. *Proofs That Really Count, IN: The Art of Combinatorial Proof. The Dolciani Mathematical Expositions, v. 27*. Mathematical Association of America: Washington, DC, 2003.

GRIMALDI, R. P. *Fibonacci and Catalan numbers*. John Wiley ss Sons, Inc., Hoboken: NJ, USA, 2012.

KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, v. 2*. John Wiley x Sons: Hoboken: NJ, USA, 2019.

LAGRANGE, J. D. A combinatorial development of fibonacci numbers in graph spectra. *Linear Algebra and Applications*, v. 438, n. 11, p. 4335–4347, 2013.

MULATU, L. The mulatu numbers. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, v. 10, n. 4, p. 431–440, 2011.

MULATU, L. The fascinating mathematical beauty of the mulatu numbers withinteresting open questions. *IJRDO-Journal of Mathematics*, v. 4, n. 4, p. 1–10, 2018.

Santos, A. A. dos. *Engenharia Didática sobre o estudo da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci*. 2017. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) — Programa de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2017.

Sloane, N. J. A. An on-line version of the encyclopedia of integer sequences. In: *The OEIS Foundation Inc.* OEIS: USA, 1964. Disponível em: <https://oeis.org/>.

SPIVEY, Z. M. *The Art of Proving Binomial Identities*. Taylor and Francis: London, 2019.

Spreafico, E. V. P. *Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - IME, 2014.

STILLWELL, J. *Mathematics and it's History*. Springer: New York, 2010.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Combinatorial interpretation of numbers in the generalized padovan sequence and some of its extensions. *Axioms*, v. 11, n. 11, p. 1–9, 2022.