


Circuncentro e Ortocentro: cinco problemas resolvidos das listas de Olimpíadas Internacionais de Matemática

Juan López Linares

<jlopez@usp.br>

Universidade de São Paulo, Pirassununga, S.P., Brasil

 <<https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>>

Resumo

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. Apresenta-se uma introdução dos conteúdos relativos ao circuncentro e ortocentro de um triângulo. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas, utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e interessem-se em problemas mais desafiadores.

Palavras-chave: Olimpíadas internacionais de Matemática. Circuncentro e Ortocentro. Problemas resolvidos. Ensino Médio e Universitário. Geometria.

1. INTRODUÇÃO

O circuncentro O e o ortocentro H são dois pontos no triângulo muito importantes. Neste artigo são resolvidos cinco problemas envolvendo estes, mas sem a pretensão de esgotar o tema. Os mesmos foram propostos na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad). Embora úteis, as resoluções apresentadas nos fóruns de problemas olímpicos não detalham muitas transições, as quais ficam para o leitor. Os autores parecem supor que todos têm conhecimentos matemáticos suficientemente avançados. Adicionalmente, essas resoluções encontram-se frequentemente em inglês.

Nossa apresentação visa que o material possa de fato ser lido e estudado por estudantes de língua portuguesa (e talvez espanhola) que preparam-se para as fases finais das olimpíadas nacionais ou internacionais. Esperamos também que a presente abordagem sirva de apoio aos professores do Ensino Médio que aventuram-se em tópicos mais avançados. Em comparação com outras soluções disponíveis, as discussões no artigo usam argumentos menos rebuscados e um número menor de transições a serem preenchidas pelo leitor.

Anteriormente discutimos outros conjuntos de problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Baricentro (LINARES; SANTOS; JESUS, 2021a), Incírculos e Ex-incírculos (LINARES; SANTOS; JESUS, 2021b), a Desigualdade de Ptolomeu (LINARES et al., 2022), Trigonometria (LINARES; BRUNO-ALFONSO, 2023) e Áreas (LINARES, 2024). Na Seção 2 é feita uma breve introdução de alguns conceitos básicos, utilizados neste trabalho. O leitor já familiarizado com a teoria pode passar diretamente para a Seção 3, onde são enunciados e resolvidos cinco problemas IMO.

2. ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS UTILIZADOS NESTE TRABALHO

Para o leitor iniciante recomenda-se consultar também os livros de Geometria (NETO, 2013), (DOLCE, 2013) e (BARBOSA, 2007).

2.1. Mediatriz e Circuncentro

Proposição 1. *Sejam B , C e P três pontos distintos e não colineares num plano. Vale que $PB = PC$ se, e somente se, o ponto P pertence à mediatriz m do segmento BC (Figura 1).*

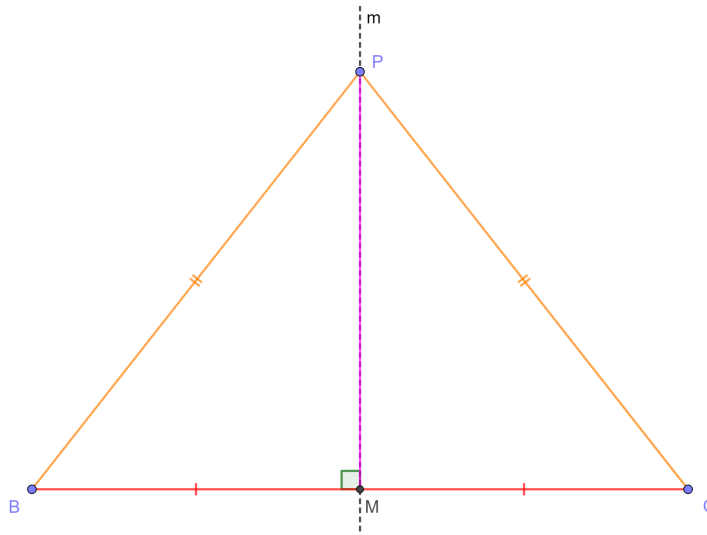


Figura 1. Demonstração da Proposição 1. Versão interativa aqui. O ponto P pode ser deslocado para verificar as medidas dos segmentos PB e PC .

Prova. *Suponha-se que o ponto P pertence à mediatriz m do segmento BC . Seja M o ponto médio de BC . Como m é mediatriz vale que:*

$$\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ.$$

Ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{l} BM = MC \\ \angle PMB = \angle PMC = 90^\circ \\ PM(\text{comum}) \end{array} \right.$$

Pelo critério de congruência LAL tem-se: $\triangle PMB \equiv \triangle PMC$. Logo, $PB = PC$.

Reciprocamente, parte-se da igualdade $PB = PC$. Portanto:

$$\begin{cases} BM = MC \\ PB = PC \\ PM(\text{comum}). \end{cases}$$

Neste caso utiliza-se o critério de congruência LLL para afirmar que:

$$\triangle PMB \equiv \triangle PMC.$$

Com isso, $\angle PMB = \angle PMC = 90^\circ$. Conclui-se que o ponto P pertence à mediatriz m do segmento BC .

Proposição 2. As três mediatrizes de um triângulo ABC intersectam-se num ponto O , chamado circuncentro, que é o centro da circunferência circunscrita d (Figura 2).

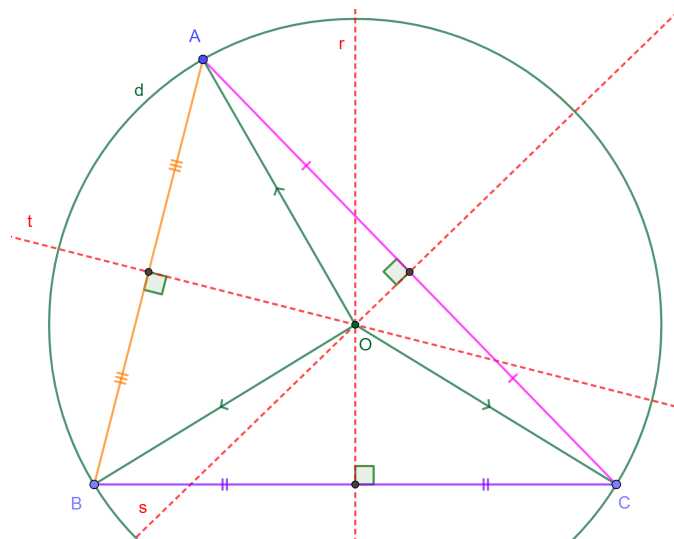


Figura 2. Demonstração da Proposição 2. Versão interativa aqui. Os pontos A , B e C podem ser deslocados para verificar a concorrência das mediatrizes e a posição do ponto O .

Prova. Sejam r , s e t as mediatrizes dos lados BC , CA e AB , respectivamente. Define-se $O = r \cap s$. Devido a Proposição 1 vale que $BO = CO$ ($O \in r$) e $CO = AO$ ($O \in s$), logo $BO = AO$. Segue, ainda da Proposição 1, que o ponto O deve estar também sobre a mediatriz t . Da igualdade $BO = CO = AO$ o circuncentro O é o centro da circunferência circunscrita d .

Para um triângulo acutângulo o circuncentro encontra-se no interior do mesmo; num retângulo é localizado no ponto médio da hipotenusa e em um obtusângulo no exterior do triângulo.

2.2. Alturas e Ortocentro

Proposição 3. *As três alturas AD , BE e CF de um triângulo ABC intersectam-se num ponto H , chamado ortocentro (Figura 3).*

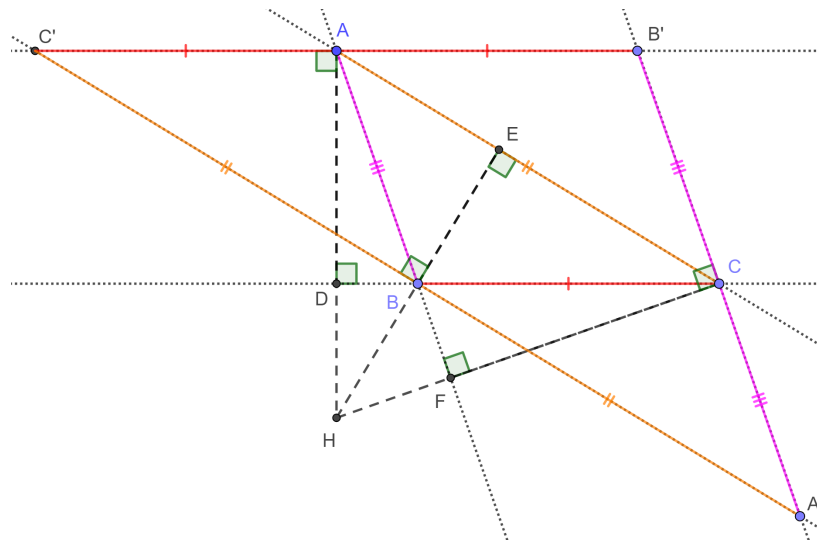


Figura 3. Ilustração para a Proposição 3. Versão interativa aqui. Os pontos A , B e C podem ser deslocados para verificar a concorrência das alturas e a posição do ponto H .

Prova. Por A , B e C são construídas retas paralelas aos lados BC , CA e AB , respectivamente. Marcam-se os pontos A' , B' e C' na interseção duas a duas destas. Por construção, os quadriláteros $AB'CB$, $AC'BC$ e $ABA'C$ são paralelogramos. Logo, A , B e C são pontos médios de $B'C'$, $C'A'$ e $A'B'$, respectivamente. Como as retas AD , BE e CF são mediatrizes do $\triangle A'B'C'$, sabe-se, pela Proposição 2, que concorrem num ponto. Mas AD , BE e CF também são alturas do $\triangle ABC$. Ou seja, as alturas são concorrentes.

Na Figura 3 o $\triangle ABC$ é chamado medial do $\triangle A'B'C'$. Para um triângulo acutângulo o ortocentro encontra-se no interior do mesmo; num retângulo é localizado no vértice do ângulo reto e em um obtusângulo no exterior do triângulo.

2.3. Circuncentro e Ortocentro são conjugados isogonais

Definição 4. *Sejam um triângulo ABC e k seu circuncírculo. O conjugado isogonal P' do ponto $P \notin k$ é obtido refletindo as retas PA , PB e PC em relação às bissetrizes internas de ABC , que passam por A , B e C , respectivamente. Isto é, P' é tal que valem as igualdades de ângulos a seguir (Figura 4):*

$$\begin{aligned} \angle BAP &= \angle CAP', \\ \angle ABP &= \angle CBP', \end{aligned}$$

$$\angle ACP = \angle BCP'$$

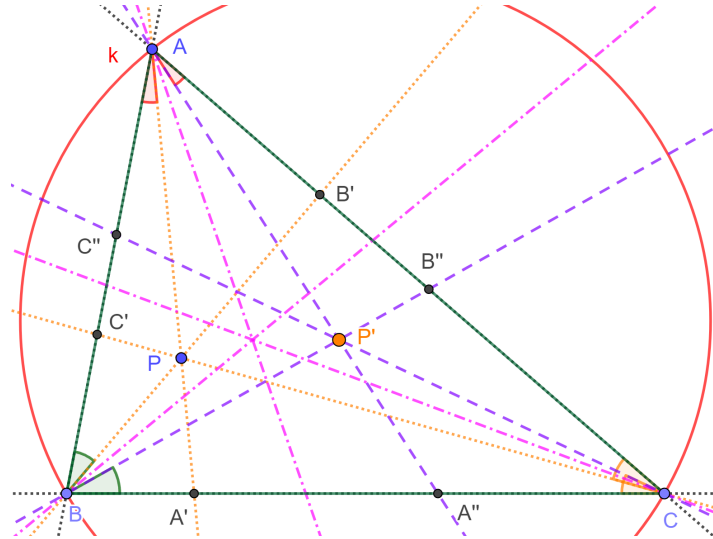


Figura 4. Construção geométrica para conjugados isogonais. Versão interativa aqui.

Proposição 5. O circuncentro O e ortocentro H do $\triangle ABC$ são conjugados isogonais (Figura 5).

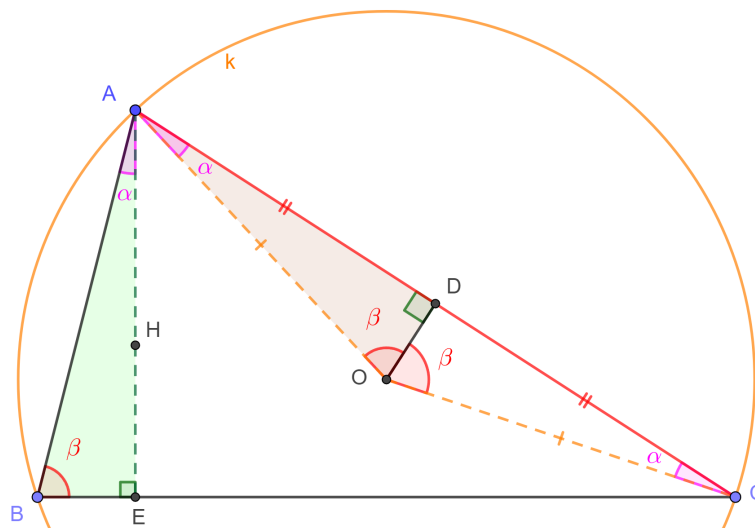


Figura 5. Construção geométrica para provar que circuncentro O e ortocentro H são conjugados isogonais. Versão interativa aqui.

Prova. Como O é o centro da circunferência k , circunscrita ao $\triangle ABC$, então:

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta.$$

Isto é, o ângulo central é duas vezes o inscrito (Figura 5). Seja D o ponto médio do segmento AC . Segue que $AD = DC$ e $AO = OC$. Como o $\triangle AOC$ é isósceles, de base AC , o segmento OD é mediana, bissetriz e altura ($OD \perp AC$). Logo, pelo critério de congruência LLL vale que:

$$\triangle ADO \equiv \triangle CDO$$

e $\angle DOA = \angle DOC = \beta$. Tem-se que $H \in AE$ e $AE \perp BC$. Pelo critério de semelhança AA que:

$$\triangle ADO \sim \triangle AEB$$

e $\angle DAO = \angle EAB = \alpha$. Em outras palavras, as retas AO e AE são simétricas em relação a bissetriz ao $\angle BAC$. Uma construção análoga pode ser feita partindo dos outros dois vértices.

2.4. Reta de Euler

Proposição 6 (Reta de Euler). Para todo triângulo ABC , o Circuncentro O , o Baricentro G e o Ortocentro H são colineares e $HG = 2GO$. Adicionalmente, sendo D o pé da mediana relativa ao vértice A , vale que $AH = 2OD$ (Figura 6).

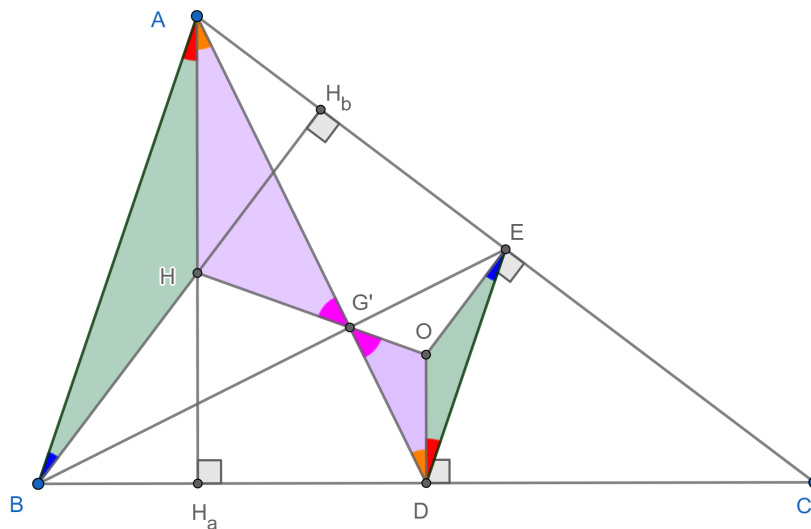


Figura 6. Guia para a demonstração da Proposição 6. Os pontos H , G e O são colineares e determinam a Reta de Euler. Versão interativa aqui.

Prova. A Figura 6 ilustra um triângulo ABC . Sejam D e E pontos médios dos lados BC e CA , respectivamente. Sejam H_a e H_b os pés das alturas relativas aos vértices A e B . Constroem-se o Circuncentro O e o Ortocentro H do triângulo ABC . Denota-se por G' a interseção das retas AD e HO .

Mostrar-se-á que o ponto $G' = G$ é o Baricentro. Isto é, H , G e O são colineares. Tem-se que DE é Base Média relativa ao lado AB . Logo, $DE \parallel AB$ e

$$\frac{AB}{DE} = 2.$$

Como $AH_a \parallel OD$ e $BH_b \parallel OE$ segue que $\angle BAH = \angle EDO$ e $\angle ABH = \angle DEO$. Por AA tem-se $\triangle ABH \sim \triangle DEO$. Portanto,

$$\frac{BH}{EO} = \frac{AH}{DO} = \frac{AB}{DE} = 2.$$

Adicionalmente, por ângulos alternos entre paralelas, $\angle HAG' = \angle ODG'$ e, por opostos pelo vértice, $\angle AG'H = \angle DG'O$. Consequentemente, pelo critério de semelhança AA, tem-se $\triangle AHG' \sim \triangle DOG'$. Logo,

$$\frac{AH}{DO} = \frac{HG'}{OG'} = \frac{AG'}{DG'} = 2.$$

Como $AG' = 2DG'$ e $AG = 2DG$ conclui-se que $G' = G$ e os pontos H , G e O são colineares (pertencem à Reta de Euler).

2.5. Círculo de nove pontos

Teorema 7 (Círculo de nove pontos). *Seja um $\triangle ABC$, O e H seu circuncentro e ortocentro e c_9 a circunferência que passa pelos pontos médios D , E e F , dos lados BC , CA e AB , respectivamente. Então c_9 passa também pelos pés H_a , H_b e H_c das alturas, bem como pelos pontos médios J , K e L dos segmentos que unem os vértices a H (Figura 7). Adicionalmente, o centro O_9 de c_9 está localizado no ponto médio do segmento HO e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$.*

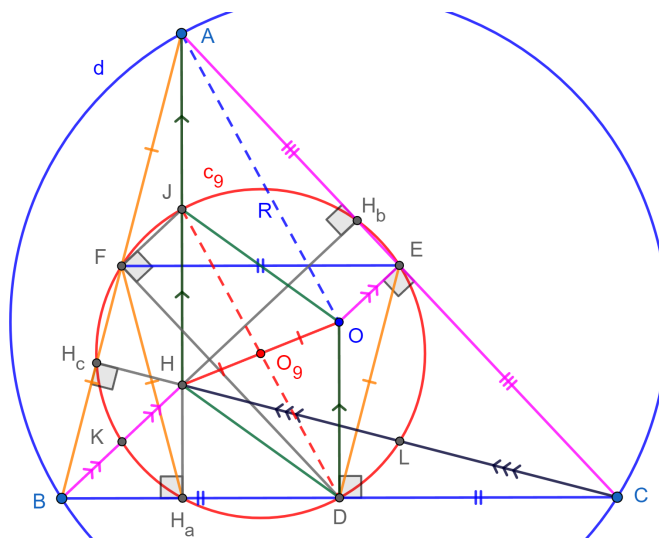


Figura 7. A circunferência c_9 passa pelos pontos notáveis: D , E , F , H_a , H_b , H_c , J , K e L . O centro O_9 de c_9 está localizado no ponto médio do segmento HO e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Versão interativa aqui.

Prova. É construída a circunferência c_9 passando pelos pontos médios D , E e F dos lados BC , CA e AB , respectivamente. Primeiro será provado que $H_a \in c_9$. Os segmentos DE e FE são

bases médias, logo $BFED$ é um paralelogramo. Isto é, $FE \parallel BD$, $ED \parallel FB$, $FE = BD$ e

$$ED = FB. \quad (1)$$

No $\triangle AH_aB$, retângulo em H_a , a mediana H_aF , relativa à hipotenusa AB , é metade desta. Logo,

$$H_aF = FB. \quad (2)$$

De (1) e (2) segue que $H_aF = ED$. Consequentemente o quadrilátero H_aDEF é um trapézio isósceles. Isto é, o quadrilátero H_aDEF é inscritível. Com isto mostra-se que $H_a \in c_9$. Analogamente demonstra-se que $H_b, H_c \in c_9$. Seja J o ponto médio do segmento HA . Quer-se provar que $J \in c_9$. No $\triangle AHB$ o segmento JF é base média. Com isto, $JF \parallel HB$. Analogamente, no $\triangle ABC$ o segmento FD é base média. Logo, $FD \parallel CA$. Por terem lados respectivamente paralelos tem-se:

$$\angle DFJ = \angle AH_bB = 90^\circ.$$

Como $\angle DFJ = \angle DH_aJ = 90^\circ$ o quadrilátero DH_aFJ é cíclico e JD é um diâmetro de c_9 . Portanto, $J \in c_9$. Analogamente mostra-se que os pontos K e L , médios entre B e H e C e H estão em c_9 . Localiza-se o circuncentro O do $\triangle ABC$ e marca-se a interseção O_9 dos segmentos OH e DJ . De $AH = 2OD$ segue $AJ = JH = OD$ e os quadriláteros $AODJ$ e $JODH$ são paralelogramos. Sendo R o raio da circunferência d circunscrita ao $\triangle ABC$ tem-se: $AO = JD = R$. Como as diagonais de um paralelogramo intersectam-se no seu ponto médio encontra-se que $HO_9 = O_9O$ e

$$JO_9 = O_9D = \frac{R}{2}.$$

Isto é, o centro O_9 do círculo de nove pontos c_9 está localizado no ponto médio do segmento HO e seu raio é metade do raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$.

3. PROBLEMAS OLÍMPICOS RESOLVIDOS

A seguir abordamos um problema da IMO 1982, realizada na cidade de Budapeste, capital da Hungria. Este é o P14 da SL, proposto pela delegação da Austrália (DJUKIC et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de Circuncentro, Quadriláteros convexos e Semelhança de figuras.

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero plano convexo e seja A_1 o circuncentro do $\triangle BCD$. Definam-se B_1, C_1 e D_1 de maneira correspondente. (a) Provar que todos os pontos A_1, B_1, C_1 e D_1 coincidem ou são todos distintos. Assumindo o último caso, mostrar que A_1 e C_1 estão em lados opostos da reta B_1D_1 e, da mesma forma, B_1 e D_1 estão em lados opostos da reta A_1C_1 . Isso estabelece a convexidade do quadrilátero $A_1B_1C_1D_1$. (b) Denotar por A_2 o circuncentro de $B_1C_1D_1$ e definir B_2, C_2 e D_2 de maneira análoga. Mostrar que os quadriláteros $A_2B_2C_2D_2$ e $ABCD$ são semelhantes.

A Figura 8 ilustra uma construção geométrica.

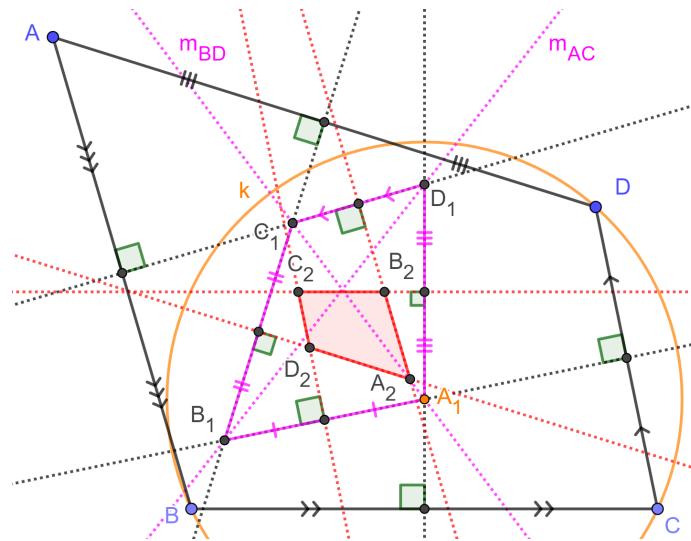


Figura 8. Uma construção geométrica do Problema 1. Versão interativa aqui.

(a) Seja k a circunferência circunscrita ao $\triangle BCD$, de centro A_1 . Suponha-se inicialmente que o quadrilátero $ABCD$ seja inscrito. Neste caso $A \in k$ e será válido que:

$$A_1 = B_1 = C_1 = D_1.$$

Considera-se agora o caso em que A é externo a k . Segue que $A_1A > A_1C$ e $C_1C > C_1A$. Com isto a mediatriz dos pontos A e C (m_{AC}) separa aos pontos A_1 e C_1 . Nota-se que, pelas propriedades do circuncentro, $B_1, D_1 \in m_{AC}$.

(b) Pela construção de mediatrizes $A_2B_2 \perp C_1D_1 \perp AB$. Logo, $A_2B_2 \parallel AB$. Analogamente, $B_2C_2 \parallel BC$, $C_2D_2 \parallel CD$ e $D_2A_2 \parallel DA$. Pelo critério de semelhança AA será válido:

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC,$$

$$\triangle A_2D_2C_2 \sim \triangle ADC.$$

Segue que os quadriláteros $A_2B_2C_2D_2$ e $ABCD$ são semelhantes. Isto conclui a solução do primeiro problema.

O segundo problema discutido é da IMO 1989, realizada na cidade de Brunsvique, na Alemanha. Este é o P32 da SL, proposto pela delegação dos Estados Unidos de América (DJUKIC et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de Circuncentro, Ortocentro e Lei dos Senos.

Problema 2. O vértice A do triângulo acutângulo ABC é equidistante do circuncentro O e do ortocentro H . Determinar todos os valores possíveis para a medida do ângulo \hat{A} .

A Figura 9 ilustra uma construção geométrica inicial.

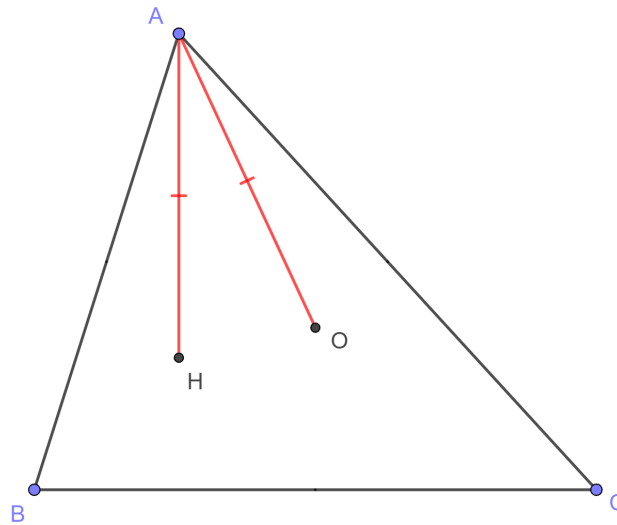


Figura 9. Uma construção geométrica inicial do Problema 2. Versão interativa aqui.

Sejam A' e C' os pés das alturas correspondentes aos vértices A e C , respectivamente, e R o circunraio do $\triangle ABC$ (Figura 10). Pela análise dos ângulos internos nos triângulos $AA'B$ e $AC'H$ encontra-se que:

$$\angle AHC' = \angle A'BA = \hat{B}.$$

Como, por hipótese, $AH = AO = R$, no $\triangle AC'H$ tem-se:

$$AC' = R \operatorname{sen}(\hat{B}).$$

Do $\triangle AC'C$ e o resultado anterior pode ser escrito:

$$\tan(\hat{A}) = \frac{CC'}{AC'},$$

$$CC' = R \operatorname{sen}(\hat{B}) \tan(\hat{A}). \quad (3)$$

Por outro lado, pela Lei dos Senos aplicada no $\triangle ABC$ tem-se:

$$2R = \frac{BC}{\operatorname{sen}(\hat{A})},$$

$$BC = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}).$$

Do $\triangle BC'C$ vale que:

$$CC' = BC \operatorname{sen}(\hat{B}).$$

Juntando os dois últimos resultados encontra-se:

$$CC' = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}) \operatorname{sen}(\hat{B}). \quad (4)$$

De (3) e (4) segue:

$$R \operatorname{sen}(\hat{B}) \tan(\hat{A}) = 2R \operatorname{sen}(\hat{A}) \operatorname{sen}(\hat{B}),$$

$$\begin{aligned}\tan(\hat{A}) &= 2 \operatorname{sen}(\hat{A}), \\ \cos(\hat{A}) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Como o $\triangle ABC$ é acutângulo a única solução possível é $\hat{A} = 60^\circ$. Isto conclui a resolução do segundo problema.

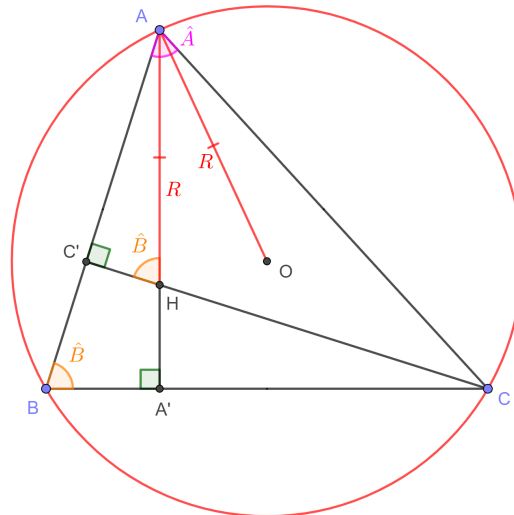


Figura 10. Uma construção geométrica do Problema 2. Versão interativa aqui.

A seguir abordamos um problema da IMO 1995, que foi realizada na cidade de Toronto, Canadá. Este é o P14 da SL, proposto pela delegação da Colômbia (DJUKIC et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de Ortocentro, Ângulos na circunferência e Paralelogramos.

Problema 3. *Seja ABC um triângulo. Uma circunferência que passa por B e C intercepta os lados AB e AC novamente em C' e B' , respectivamente. Provar que BB' , CC' e HH' são concorrentes, onde H e H' são os ortocentros dos triângulos ABC e $AB'C'$, respectivamente.*

A Figura 11 ilustra uma construção geométrica inicial.

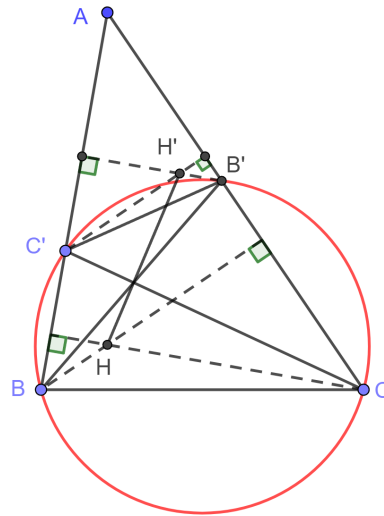


Figura 11. Uma construção geométrica inicial do Problema 3. Versão interativa aqui.

Seja o ponto $P = BB' \cap CC'$ (Figura 12). Quer-se provar que $\angle BPH = \angle B'PH'$. Pois nesse caso, pela recíproca de ângulos opostos pelo vértice, H, P e H' são colineares.

Por serem ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência vale que:

$$\angle B'BC' = \angle B'CC',$$

$$\angle B'C'C = \angle B'B'C.$$

Sejam D e E as projeções ortogonais dos vértices B e C relativos aos lados CA e AB , respetivamente. Pelo critério de semelhança AA tem-se que:

$$\triangle BDB' \sim \triangle CEC'.$$

Logo,

$$\angle DBB' = \angle C'CE,$$

$$\angle HBP = \angle PCH.$$

Sejam X e Y pontos tais que os quadriláteros $BPCX$ e $HPCY$ são paralelogramos (consequentemente, o quadrilátero $BHYX$ também o será). Como $BC'B'C$ é inscritível segue que $\angle CBC' = \angle AB'C'$. Pelo critério de semelhança AA tem-se:

$$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'.$$

Isto é, existe uma operação de roto-homotetia, centrada em A , que transforma B em B' e C em C' . Sendo H e H' os ortocentros dos triângulos ABC e $AB'C'$, respetivamente, a mesma operação transforma H em H' . Portanto, também será válida a semelhança:

$$\triangle HBC \sim \triangle H'B'C'.$$

Consequentemente,

$$\angle CBH = \angle H'B'C',$$

$$\angle HCB = \angle B'C'H'.$$

Pelas propriedades de paralelogramos e ângulos opostos pelo vértice segue:

$$\angle CXB = \angle BPC = \angle B'PC'.$$

Adicionalmente, pelo paralelogramo $BPCX$ e o quadrilátero inscrito $BC'B'C$ encontra-se:

$$\angle XBC = \angle PCB = \angle C'CB = \angle C'B'B.$$

Logo, pelo critério de semelhança AA, vale:

$$\triangle BXC \sim \triangle B'PC'.$$

Das duas últimas semelhanças de triângulos conclui-se a semelhança dos quadriláteros $BHCX$ e $B'H'C'P$. Portanto,

$$\angle HXB = \angle H'PB'.$$

Por outro lado, de ângulos com lados mutuamente paralelos e alternos entre paralelas:

$$\angle CXY = \angle PBH = \angle PCH = \angle CHY.$$

O anterior significa que o quadrilátero $HCYX$ é inscrito. Finalmente,

$$\angle BPH = \angle XCY = \angle XHY = \angle HXB = \angle H'PB'.$$

Ou seja, pela recíproca de ângulos opostos pelo vértice, H, P e H' são colineares e BB', CC' e HH' são concorrentes. Isto conclui a solução do terceiro problema.

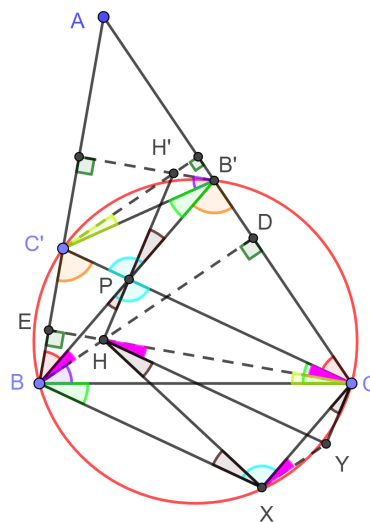


Figura 12. Uma construção geométrica do Problema 3. Versão interativa aqui.

O quarto problema é da IMO 1996, realizada na cidade de Bombaim, Índia. Este é o P10 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido (DJUKIC et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de Ortocentro, Circuncentro, Baricentro e Paralelogramos.

Problema 4. Seja o triângulo ABC de ortocentro H e P um ponto em seu círculo circunscrito, distinto de A , B e C . Sejam E o pé da altura BH e $PAQB$ e $PARC$ paralelogramos. Adicionalmente, as retas AQ e HR encontram-se em X . Provar que os segmentos XE e AP são paralelos.

A Figura 13 ilustra uma construção geométrica inicial.

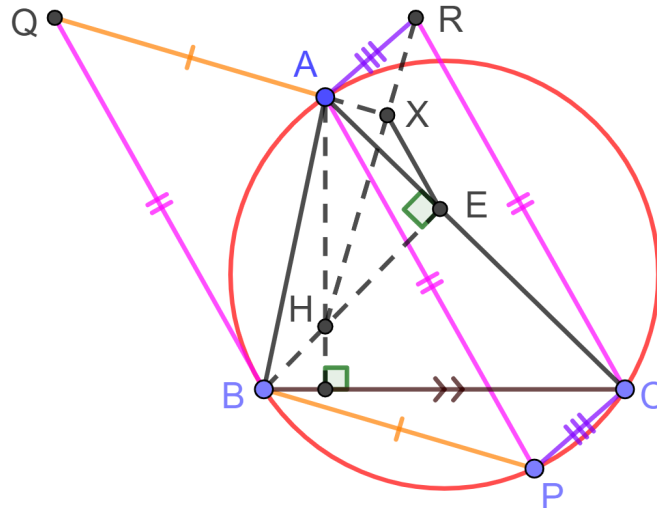


Figura 13. Uma construção geométrica inicial do Problema 4. [Versão interativa aqui.](#)

Pela hipótese de $PAQB$ e $PARC$ serem paralelogramos segue que $QB \parallel AP \parallel RC$ e $QB = AP = RC$. Logo, o quadrilátero $QBCR$ também é um paralelogramo com $QR \parallel BC$ e $QR = BC$. Portanto, a reta AH é perpendicular com QR (Figura 14). Pelo critério de congruência LLL vale que $\triangle BCP \cong \triangle QRA$. O $\triangle QRA$ pode ser construído trasladando o $\triangle BCP$ pelo vetor \vec{PA} . Sejam G, G' e H' os baricentros do $\triangle ABC$, do $\triangle PBC$ e o ortocentro do $\triangle PBC$, respectivamente. Como os triângulos ABC e PBC têm circuncentro comum O , a partir das propriedades da reta de Euler e a recíproca do Teorema de Tales vale:

$$\vec{HH'} = 3\vec{GG'}$$

Seja M o ponto médio do lado BC , comum aos $\triangle ABC$ e $\triangle PBC$. Pelas propriedades do baricentro e a recíproca do Teorema de Tales vale:

$$3\vec{GG'} = \vec{AP}$$

Segue que:

$$\vec{HH'} = \vec{AP} = \vec{RC}$$

Logo, o quadrilátero $HH'CR$ também é um paralelogramo com $HR \parallel H'C$. Com isto, $RH \perp QX$ da mesma forma que $CH' \perp BP$. Ou seja, o ponto H é ortocentro comum dos $\triangle ABC$ e $\triangle AQR$. Como $\angle AXH = \angle AEH = 90^\circ$ o quadrilátero $AHEX$ é cíclico. Portanto,

$$\angle QXE = \angle AXE = 180^\circ - \angle EHA.$$

Estudando os triângulos retângulos associados com H encontra-se que $\angle EHA = \angle ACB$.
Segue:

$$\angle QXE = 180^\circ - \angle ACB.$$

Por construção $ABPC$ é cíclico. Portanto, $\angle ACB = \angle APB$ e

$$\angle QXE = 180^\circ - \angle APB.$$

Também por hipótese, o quadrilátero $QBPA$ é um paralelogramo, disto:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle QAP.$$

Ou seja,

$$\angle QXE = \angle QAP.$$

Pela recíproca de correspondentes entre paralelas demonstra-se que $XE \parallel AP$. Isto conclui a solução do quarto problema.

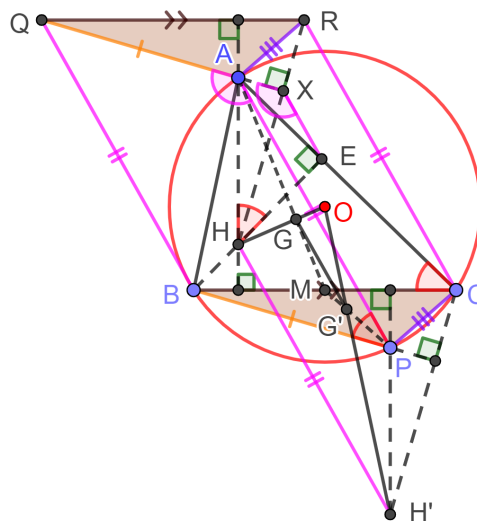


Figura 14. Uma construção geométrica do Problema 4. Versão interativa aqui.

O último problema é da IMO 1996, realizada na cidade de Bombaim, Índia. Este é o P12 da SL, proposto pela delegação do Reino Unido (DJUKIC et al., 2011). Neste exploramos os conceitos de Ortocentro, Circuncentro e Potência de ponto relativo a circunferência.

Problema 5. *Seja ABC um triângulo acutângulo com $BC > CA$. Seja O o circuncentro, H seu ortocentro e F o pé da altura CH . Deixe a perpendicular a OF em F encontrar o lado CA em P . Provar que $\angle PHF = \angle BAC$.*

A Figura 15 ilustra uma construção geométrica inicial.

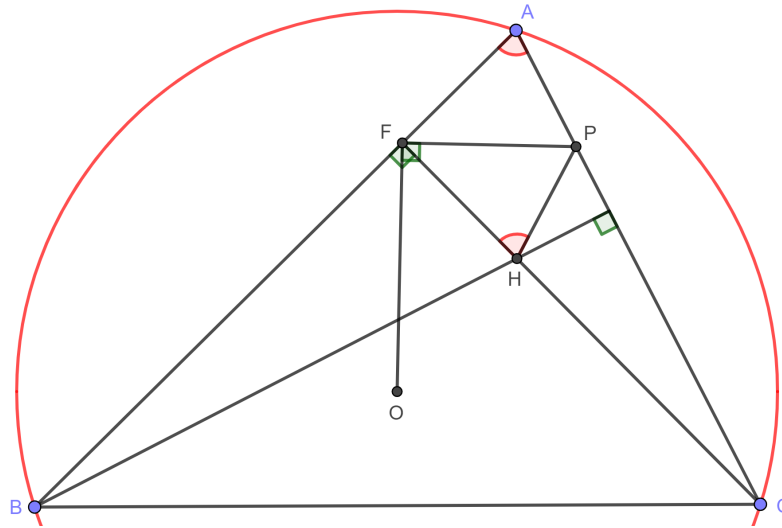


Figura 15. Uma construção geométrica inicial do Problema 5. Versão interativa aqui.

Sejam E o pé da altura BH e Y e Z os pontos médios de AC e AB , respectivamente (Figura 16). Como Y é o circuncentro do $\triangle FCA$ ($AY = YF$ e $\angle FAY = \angle YFA = \hat{A}$) tem-se $\angle AYF = 180^\circ - 2\hat{A}$. Como $\angle OFP = \angle PYO = 90^\circ$ o quadrilátero $OFPY$ é inscritível e

$$\angle FPO = \angle FYO = 2\hat{A} - 90^\circ.$$

Desenha-se a perpendicular HR a FP com $R \in FP$. De $\angle OZF = \angle OFP = 90^\circ$ segue que $\angle ZFO = \angle HFR$. Pelo critério de semelhança AA vale:

$$\triangle OZF \sim \triangle HRF.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{OZ}{OF} &= \frac{HR}{HF}, \\ HR \cdot OF &= HF \cdot OZ. \end{aligned} \quad (5)$$

Pelas propriedades do ortocentro tem-se:

$$\frac{HC}{OZ} = \frac{HB}{OY} = 2. \quad (6)$$

Devido a $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$, o quadrilátero $BCEF$ é inscritível por uma circunferência k . A potência do ponto H relativa a k pode ser escrita como:

$$Pot_k(H) = HF \cdot HC = HE \cdot HB. \quad (7)$$

Combinando (5), (6) e (7) escreve-se:

$$HR \cdot OF = HF \cdot OZ = \frac{1}{2} HF \cdot HC = \frac{1}{2} HE \cdot HB = HE \cdot OY.$$

Portanto,

$$\frac{HR}{HE} = \frac{OY}{OF}.$$

Adicionalmente, de $OF \parallel HR$ e $OY \parallel HE$ segue que:

$$\angle EHR = \angle YOF.$$

Pelo critério de semelhança LAL vale:

$$\triangle EHR \sim \triangle FOY.$$

Logo, $\angle HRE = \angle FYO = 2\hat{A} - 90^\circ$. Do quadrilátero inscrito $HRPE$ tem-se:

$$\angle HPC = \angle HPE = \angle HRE = \angle FYO.$$

Do $\triangle CFA$ encontra-se que $\angle ACF = 90^\circ - \hat{A} = \angle PCH$. Como o $\angle PHF$ é externo no vértice H do $\triangle PHC$ segue:

$$\begin{aligned} \angle PHF &= \angle HPC + \angle PCH, \\ \angle PHF &= 2\hat{A} - 90^\circ + 90^\circ - \hat{A}, \\ \angle PHF &= \hat{A} = \angle BAC. \end{aligned}$$

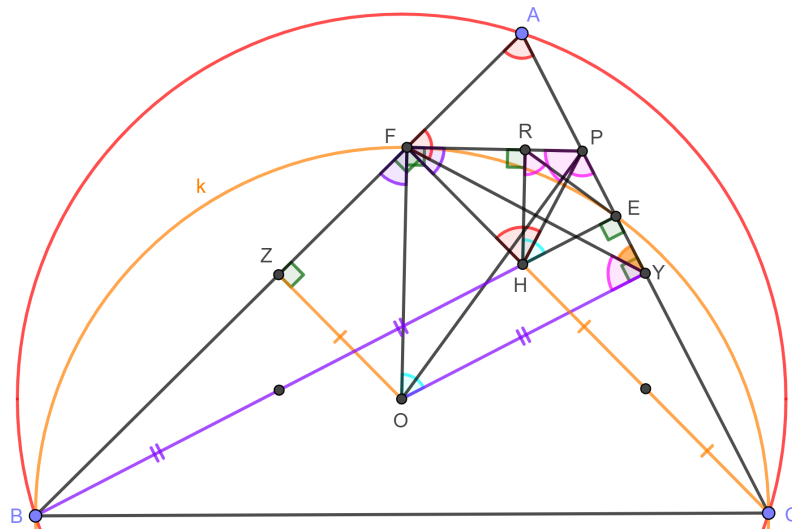


Figura 16. Uma construção geométrica do Problema 5. Versão interativa aqui.

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Foi feita uma rápida introdução de alguns conceitos básicos relativos aos centros de triângulos Circuncentro e Ortocentro. A seguir foram discutidos detalhadamente cinco problemas IMO. Espera-se que estes sirvam de apoio aos professores do Ensino Médio que se aventuram em tópicos mais avançados e treinam estudantes para participar em olimpíadas.

5. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. [S.l.]: SBM, Sociedade Brasileira de Matemática., 2007. ISBN 9788583371069.

DJUKIC, D. et al. **The IMO Compendium**. Springer-Verlag GmbH, 2011. ISBN 1441998535. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/14636976/dusan_djukic_vladimir_jankovic_ivan_matic_nikola_petrovic_du_an_djuki_the_imo_compendium.html>.

DOLCE, O. **Fundamentos de Matematica Elementar Geometria Plana - Vol.9**: Geometria plana - vol.9. [S.l.]: ATUAL (DIDATICO) - GRUPO SARAIVA, 2013. ISBN 9788535716863.

LINARES, J. L. Cálculo de áreas: cinco problemas resolvidos das listas de olimpíadas internacionais de matemática. **Revista de Matemática da UFOP, RMAT**, v. 1, n. 1, p. 01-21, fev 2024. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/7040>>.

LINARES, J. L.; BRUNO-ALFONSO, A. Trigonometria: cinco problemas resolvidos das listas de olimpíadas internacionais de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, n. 1, p. 14-36, jun. 2023. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/6799/5334>>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de. Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, n. 2-2021, p. 46-69, jul 2021. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5074/3825>>.

LINARES, J. L.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 117-139, nov. 2021. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>>.

LINARES, J. L. et al. Desigualdade de ptolomeu: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto (2237-8103)**, v. 2, p. 15-37, 2022. ISSN 2237-8103. Disponível em: <<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5396/4012>>.

NETO, A. C. M. **Geometria**. [S.l.]: SBM, 2013. ISBN 9788585818937.